2017학년도 6월 홍현빈 모의고사

수학 영역
(나 형)

성명	

수험번호						-				

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

아무렇지 않은 척

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

Bin

제 2 교시

수학 영역(나 형)

5지선다형

1. 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$와 $B=\{3,4,5,6,7\}$ 에 대하여 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은?[2점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

sol) $A\cap B=\{3,4,5\}$이므로 답은 13

2. $\log_2 a=4$일 때, a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 16 ⑤ 32

sol) $a=16$

3. 등차수열 a_n에 대하여 $a_3+a_5=4$일 때, a_1+a_7의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

sol) 등차중항 활용, $a_3+a_5=a_1+a_7=4$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+8x+3}{4x^2}=2$일 때, $a+b$의 값은?[3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

sol) 최고차항이 $8x^2$ 이어야 하므로 $a=0, b=8$

5. 크기와 모양이 같은 사탕 5개를 학생 3명에게 나누어줄 때, 모든 학생이 적어도 한 개씩 받도록 하는 경우의 수는? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 16 ⑤ 24

sol) 중복조합을 활용하자. $x+y+z=5$인데 한 개씩 미리 주면 $x+y+z=2$만 계산해주면 된다. 답은 ${}_3H_2=6$

6. 곡선 $y=\sqrt{x}$를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 4만큼 평행이동한 곡선이 점 $(6,6)$을 지날 때, a의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

sol)
평행이동을 다 하면 $y=\sqrt{x-a}+4$ 이다. $(6,6)$대입해주면
$6=\sqrt{6-a}+4$ 이므로 $a=2$

7. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=3$, $a_3=5$일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+1}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

sol)
등차수열이므로 일반항으로 접근하자.
$a_n=1+2(n-1)=2n-1$이므로, 답은 2.

8. 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R이라 하자. $Q \subset P^c$, $P \subset R^c$ 일 때, 다음 중 항상 참인 명제는? [3점]

① $q \rightarrow r$ ② $\sim r \rightarrow \sim q$ ③ $p \rightarrow q$
④ $p \rightarrow \sim q$ ⑤ $p \rightarrow r$

$sol)$ 첫 번째 조건에서 $q \rightarrow \sim p$ 인데, 대우관계 활용하면 $p \rightarrow \sim q$이다. 답은 4

9. 함수 $f(x) = 3x^2 + 4x + 7$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

$sol)$ 미분하면, $f'(x) = 6x + 4$ 이므로 $f'(1) = 10$

10. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 2$, $a_1 = 16$ 을 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값은? [3점]

① 15 ② 31 ③ 63 ④ 127 ⑤ 511

$sol)$

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 2$를 정리하면, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n$이다. a_n은 등비수열이므로 즉, $a_n = 16\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$$\sum_{n=1}^{5} a_n = \frac{16\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 31$$

11. 서로 다른 펜 7개를 서로 같은 상자 3개에 나누어 넣을 때, 각 상자에 적어도 2개씩 넣는 경우의 수는? [3점]

① 105 ② 150 ③ 175 ④ 210 ⑤ 315

$sol)$
적어도 2개씩 넣는 경우는 3개/2개/2개 씩 넣는 경우뿐이 없다.
${}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 105$

12. $2^a \times 4^b = 32$, $\log_2 b = 1$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$sol)$ $2^{a+2b} = 2^5$이므로 $a+2b=5$, $\log_2 b = 1, b = 2$

그러면 $a+4=5$이므로 $a=1$ 즉 답은 3

[13~14] 좌표평면에 곡선 $f(x)=\sqrt{ax}$ 가 있다. 13번과 14 번의 물음에 답하시오.

13. $a=1$일 때, 직선 $y=2$와 함수 $f(x-4)$의 교점을 A라 하자. 직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

$sol)$ $\sqrt{x-4}$ 와 $y=2$의 교점은 $(8,2)$이므로 답은 $\frac{1}{4}$

14. 곡선 $y=f^{-1}(x)$위의 점 B에서 그은 접선의 기울기가 2이다. 점 B에서 그은 접선이 y축과 만나는 점을 C라 하고 점 B에서 x축과 평행한 직선을 그어 y축과 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 넓이가 16일 때, a의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$sol)$ $f^{-1}(x)=\frac{x^2}{a}$이다. 점 B를 $\left(t,\frac{t^2}{a}\right)$이라 한다면 $\frac{2t}{a}=2$임을 알 수 있다. (접선의 기울기가 2)

점 B에서 x축과 평행한 직선을 그어 y축과 만나는 점은 $\left(0,\frac{t^2}{a}\right)$이 된다. 그러면 $\overline{\mathrm{BC}}=\mathrm{t}$이고, 삼각형에서 기울기가 2였으므로 높이는 $2t$가 된다.

$\therefore t\times 2t\times\frac{1}{2}=16,\ t=4.$

그런데 $\frac{2t}{a}=2$이므로 $a=4.$

15. 1부터 9까지 번호가 하나씩 쓰여 있는 9개의 공이 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 차례로 공을 3개 뽑고 공에 적힌 번호를 뽑힌 순서대로 a, b, c라 할 때, $a \times b$, c가 모두 3의 배수가 될 확률은? [4점]

① $\frac{13}{84}$ ② $\frac{5}{28}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

sol)
c가 $a \times b$보단 간단하므로 c부터 생각해보자.
c가 3의 배수가 되려면 c는 3,6,9 중 하나여야 한다.
3개 중 하나택해야 하므로 ${}_3C_1$

이제, 3의 배수는 2개가 남았고, 3의 배수가 아닌 것은 7개가 남았다. $a \times b$가 3의 배수가 되려면, a, b둘 중 **적어도 하나는** 3혹은 6혹은 9가 된다. 여사건을 취해주면, a, b둘 다 3의 배수가 아니면 된다.
전체 경우의 수는 8×7, 둘다 3의 배수가 아니려면 6×5

즉, ${}_3C_1 \times (56 - 30) = 78$

분모는 $9 \times 8 \times 7$이므로 답은 $\frac{13}{84}$

16. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$와 집합 $P = \{1,3,5\ 7, 9\}$에 대하여 집합 P, R, Q가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) 집합 P는 집합 Q이기 위한 필요조건, 집합 R이기 위한 충분조건이다.
(나) $R - Q \subset P^c$

집합 Q의 모든 원소의 합은? [4점]

① 12 ② 16 ③ 21
④ 25 ⑤ 30

sol)
(가) 조건에 의해서 $Q \subset P \subset R$임을 안다.
(나) 조건을 만족하려면 $P = Q$여야 한다. ((가)조건을 그린 뒤 생각해보면 이해가 쉽다.)

해서, 답은 1+3+5+7+9 = 25.

17. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)=2x-1$이 $x=0$에서 접할 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-a}{x}=b$이다. $a+b$의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

sol)

$f(x)$와 $g(x)$가 $x=0$에서 접한다는 것은,
$f(0)=g(0), f'(0)=g'(0)$이라는 것이다.

$f(0)=g(0)=-1$이므로, 준식에 넣어 활용해보자.
주어진식 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-a}{x}$에서 분모가 0이므로 분자에도 0을 넣어주면, $f(0)+g(0)-a=0$이므로 $a=-2$이다.

준식을 변형하면, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-(f(0)+g(0))}{x}$ 이므로,
$f'(0)+g'(0)$이 된다. $g'(0)=2=f'(0)$이므로, 답은 4

18. 첫째항이 -3이고 공차가 자연수인 등차수열 $\{b_n\}$이 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $b_m=3$인 어떤 m이 존재한다.
(나) $\sum_{n=1}^{4}\frac{a}{b_n}=t$ (단, t는 자연수이다.)

a의 최솟값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 15 ⑤ 45

sol)
첫째항이 -3, 공차가 자연수라는 점과 (가)조건을 연결시키면,
가능한 공차는 $1,2,3,6$밖에 없음을 안다. (어떤 m은 조건을 만족하는 m값이 3이든 4이든 뭐 100이든 단한개라도 존재한다로 받아들이면 된다. 반대의 뜻은 "모든")

(나) 조건은, $\sum$의 정의에 따라 $\frac{a}{b_1}+\frac{a}{b_2}+\frac{a}{b_3}+\frac{a}{b_4}$ 이다.
그런데 분모는 0이 될 수 없으므로, b_1, b_2, b_3, b_4모두 0이 될 수 없다.

그러면 공차가 1,3인 경우 b_n이 0이 되는 경우가 존재하므로 성립하지 않는다. 즉, 가능한 공차는 오로지 $2, 6$뿐이다.

i) 공차가 2일 때

$$\frac{a}{b_1}+\frac{a}{b_2}+\frac{a}{b_3}+\frac{a}{b_4}=\frac{a}{-3}+\frac{a}{-1}+\frac{a}{1}+\frac{a}{3}=0$$

그런데 t는 자연수므로 0이 될 수 없다.

ii) 공차가 6일 때

$$\frac{a}{b_1}+\frac{a}{b_2}+\frac{a}{b_3}+\frac{a}{b_4}=\frac{a}{-3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{9}+\frac{a}{15}=\frac{8a}{45}$$

즉, 답은 45

19. $1 \le a \le 3$, $1 \le b \le 3$인 자연수 a, b와 집합 $X : \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$가 모든 a, b에 대하여 $f(a) \times f(b) \le f(4)$를 만족한다. 함수 f의 개수는? (단, $a \ne b$이다.) [4점]

① 10 ② 13 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

sol)
$f(4)$값에 따라 $f(a) \times f(b)$값이 영향을 받으므로,
$f(4)$를 기준으로 사건을 나눌 것이다.

1. $f(4) = 1$일 때, $(f(1), f(2), f(3))$으로 가능한 순서쌍 ?

(1,1,1)

2. $f(4) = 2$일 때, $(f(1), f(2), f(3))$으로 가능한 순서쌍 ?

(1,1,1) (1,1,2) (1,2,1) (2,1,1)

3. $f(4) = 3$일 때, $(f(1), f(2), f(3))$으로 가능한 순서쌍 ?

(1,1,1) (1,1,2) (1,2,1) (2,1,1) (1,1,3) (1,3,1) (3,1,1)

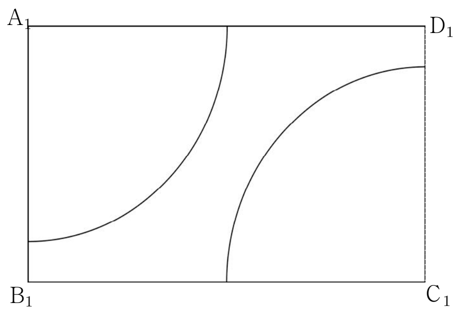
4. $f(4) = 4$일 때, $(f(1), f(2), f(3))$으로 가능한 순서쌍 ?

(1,1,1) (1,1,2) (1,2,1) (2,1,1) (1,1,3) (1,3,1) (3,1,1) (1,1,4)(1,4,1)
(4,1,1) (2,2,1) (2,1,2) (1,2,2) (2,2,2)

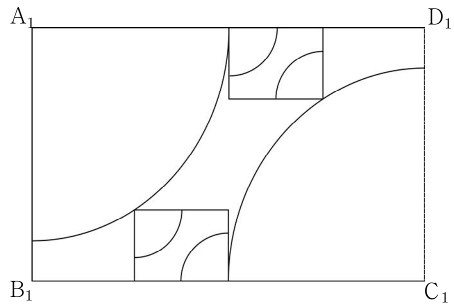
$\therefore\ 1 + 4 + 7 + 14 = 26$

** 규칙성 따져서 해도 되나 몇 개 빠먹어서 틀린분들을 위해
다 썼습니다.

20. 그림과 같이 가로의 길이가 4이고 세로의 길이가 3인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$가 있다. 직사각형 내부에 점 A_1을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 부채꼴과 점 C_1을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 부채꼴을 그린 도형을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 B_1C_1의 중점을 꼭짓점으로 하고 가로의 길이 :세로의 길이 $= 4 : 3$인 직사각형이 두 부채꼴과 동시에 접하게 그린다. 마찬가지로 선분 A_1D_1의 중점을 꼭짓점으로 하고 가로의 길이 : 세로의 길이 $= 4 : 3$인 직사각형을 그린다. 두 직사각형에 도형 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 도형 R_2를 그린다. 이같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 그림 R_n에 있는 모든 부채꼴의 반지름 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{23}{4}$ ④ $\frac{25}{4}$ ⑤ 6

해설 다음장에

21. $f(0)=2, f(2)=1$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 정수 k에 대하여 함수 $|f(x)-k|$가 $x=b$에서 미분가능하지 않은 서로 다른 실수 b의 개수를 a_k라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n$을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 최솟값이 a일 때, $f(3a)$의 값은? [4점]

① $\frac{31}{2}$ ② 15 ③ 10 ④ $-\frac{19}{2}$ ⑤ $-\frac{23}{2}$

sol) 수정 중입니다.

단답형

22. 함수 $xf(x)=3x^2+4x$ 일 때, $f'(1)$을 구하시오. [3점]

sol)

양변미분하면, $f(x)+xf'(x)=6x+4$

$x=1$대입하면 $f(1)+f'(1)=10$ $f(1)=7$이므로 $f'(1)=3$이 된다.

23. 3개의 숫자 $1, 2, 3$를 중복사용하여 3자리 비밀번호를 만들 때, 가능한 경우의 수를 구하시오. [3점]

sol)

$3^3=27$

24. 세포 밖의 물질 A의 농도를 C_1, 세포 안의 물질 A의 농도를 C_2라 할 때, 세포 밖에서 세포 안으로 물질 A를 옮기는 데 필요한 에너지 $E(kcal/g)$는 다음과 같다.

$$E = 1.4(\log C_2 - \log C_1) \text{ (단, } C_2 > C_1)$$

세포 안의 물질 A의 농도가 세포 밖의 물질 A의 농도의 2배일 때, 세포 밖에서 세포 안으로 물질 A를 옮기는데 필요한 에너지를 E_1, 세포 안의 물질 A의 농도가 세포 밖의 물질 A의 농도의 8배일 때, 세포 밖에서 세포 안으로물질 A를 옮기는데 필요한 에너지를 E_2라 하자. $\frac{2E_2}{E_1}$의 값을 구하시오. [3점]

sol)

차근차근 대입해서 정리해보자.

$E_1 = 1.4(\log 2C_1 - \log C_1)$

$E_2 = 1.4(\log 8C_1 - \log C_1)$

정리하면, $E_1 = 1.4(\log 2)$

$E_2 = 1.4(3\log 2)$

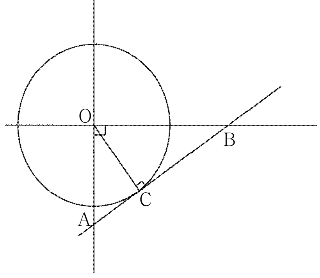
즉, $\frac{2E_2}{E_1} = 6$ 이다.

25. 원점을 중심으로 하고 반지름이 a_n인 원이 직선 $y = \frac{3}{4}x - 3n$과 한 점에서 만난다. $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n}$을 구하시오. [3점]

sol)

i) 중심에서 접점까지의 거리는 반지름과 같으므로,
점과 직선사이의 거리를 활용해도 좋다.

ii) 그림을 그려보자.



그러면 닮음을 활용하여 해결 할 수있다. ($\triangle$ACO 와 $\triangle$AOB)

$3n : a_n = 5n : 4n$ **즉** $a_n = \frac{12n^2}{5n}$ 답은 12.

26. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{ka_k}{2n} = n^2$$

가 성립할 때, $3a_3$을 구하시오. [4점]

sol)

$\sum$내에서 $2n$은 $\sum$밖으로 뺄 수 있다.

즉, $\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}ka_k = n^2$ 이다.

정리해주면, $\sum_{k=1}^{n}ka_k = 2n^3$ 이다.

$\sum_{k=1}^{n}ka_k - \sum_{k=1}^{n-1}ka_k = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1 = na_n$입니다.

n에다가 3을 대입하면, 답은 5

27. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x^3+8 & (x<1) \\ f(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x), g(x)$가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2+4x+7}{x^2}=6$

(나) 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.

sol)

(가) 조건에서, $f(x)=9x^2+ax+b$로 둘 수 있다.
(나) 조건에서, 연속과 미분가능 조건을 활용해주면,

$9=f(1)\,/\,3=f'(1)$임을 알 수 있다.

이 조건을 $f(x)=9x^2+ax+b$에 활용하면,

$f(x)=9x^2-9x+9$이다.

$f(2)=36-18+9=27$

28. 좌표평면에서 두 직선 $y=nx, y=2n(x-3)$이 만나는 점을 A라 할 때, 최고차항 계수가 1이고 $f(x)=-f(-x)$인 삼차함수 $f(x)$가 점 A와 원점을 지난다. $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-n^3}{n^2}$의 값을 구하시오. [4점]

sol)

점 A는 $(6, 6n)$이다. $f(x)$는 원점대칭이므로, 홀수차항만 존재하므로 $f(x)=x^3-ax$로 둘 수 있다. 함수가 점 A를 지나므로

$6n=6^3-6a$ 이다. 정리하면,

$a=36-n$이고, 그러므로 $f(x)=x^3+(n-36)x$이므로,
$f(n)=n^3+n^2-36n$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-n^3}{n^2}=1$

29. 기홍, 현수, 유지 3명의 학생이 2시, 5시, 8시에 각 1편씩 총 3편의 영화를 관람하려한다. 그림과 같이 상영관은 1,2,3관으로 총 3개의 관이 있고 각 상영관에서는 매시간마다 같은 영화만 상영한다. 예를 들어, 2관에선 오직 B영화만 상영한다. **각 상영관의 정원이 총 2명일 때,** 3명의 학생이 다음 조건에 맞게 3편의 영화를 관람하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 모든 영화를 현수는 유지와 함께 관람 하지 않고, 기홍은 유지와 함께 영화를 관람한다.
(나) 기홍과 유지는 A, B, C 모든 영화를 관람한다.

상영시간표

시간 \ 관	1관	2관	3관
2시	A	B	C
5시	A	B	C
8시	A	B	C

sol)

현수를 기준으로 풀어보자. 만약 현수가 2시-5시-8시 로 영화를 AAA 로 보면, 남은 영화는 B, C 뿐이라 (나)조건을 만족할 수 없다. 즉 현수는 ABB 로 두 개만 같은 경우, ABC 로 세 영화 모두 다른 경우로만 영화를 봐야한다. 이제 경우를 나눠 풀어보자.

1. 현수가 ABB꼴로 보는 경우.

ABB 꼴로 보는 경우는 3×2가 된다. (처음영화 고르고 나머지두 영화 중 하나 선택)

그런데 ABB 말고도 BAB, BBA 꼴도 있으므로, $3\times 2\times 3$이 된다.
또한,
만약 ABB 로 현수가 본다면 기홍과 유지는 현수가 A본 시각에 꼭 B를 봐줘야만 한다. (왜냐면 나머지 두타임엔 현수가 다 B를 봐버리니깐.)
그 후 현수가 B를 볼 때 A -> C 혹은 C -> A 로 보면 된다.

즉! 현수가 ABB 로 보면 기홍유지는 2가지 선택권 뿐이 없다.

$\therefore 3\times 2\times 3\times 2 = 36$

2. 현수가 ABC 꼴로 보는 경우.

그려보면 두가지 밖에 나오질 않는다.(혹은 수형도.)
현수가 ABC를 보는 경우는 3!이므로 12 즉! 둘다 더하면 답은 48.

30. 두 곡선 $y=\dfrac{24}{x-12+5k}+8$, $y=\sqrt{x}$ 와 y축으로 둘러싸인 부분에 속하는 서로 다른 모든 점 (a, b)의 개수를 $f(k)$라 할 때, $f(0)+f(1)+f(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이고, 둘러싸인 부분의 경계에 있는 점도 포함한다.) [4점]

sol)

$f(0) = 23$
$f(1) = 8$
$f(3) = 225$

다 합하면 256