

제2교시

수학영역

[출처]

2021년 교육청 고3공통 3월 미적분 30 [4.00점]

1. 자연수 n 에 대하여 삼차함수 $f(x) = x(x-n)(x-3n^2)$ 이
 극대가 되는 x 를 a_n 이라 하자. x 에 대한 방정식

$f(x) = f(a_n)$ 의 근 중에서 a_n 이 아닌 근을 b_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{n^3} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처]

2021년 교육청 고3공통 4월 미적분 30 [4.00점]

2. 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{2n} + bx^{2n-1} + x}{x^{2n} + 2} \quad (a, b \text{는 양의 상수})$$

라 하자. 자연수 m 에 대하여 방정식 $f(x) = 2(x-1) + m$ 의
 실근의 개수를 c_m 이라 할 때, $c_k = 5$ 인 자연수 k 가 존재한다.

$k + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m - 1)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2021년(2022학년도) 평가원 고3공통 6월 미적분 30 [4.00점]

3. $t > \frac{1}{2} \ln 2$ 인 실수 t 에 대하여 곡선

$y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$ 과 직선 $y = x + t$ 가 만나는 서로 다른

두 점 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p} \sqrt{2}$ 이다.

$p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021년 교육청 고3공통 7월 미적분 30 [4.00점]

4. 두 자연수 a, b 에 대하여 이차함수 $f(x) = ax^2 + b$ 가 있다.
함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \ln f(x) - \frac{1}{10} \{f(x) - 1\}$$

이라 하자. 실수 t 에 대하여 직선 $y = |g(t)|$ 와 함수

$y = |g(x)|$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 두

함수 $g(x), h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $h(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 k 의 값의 개수는 7이다.

$\int_0^a e^x f(x) dx = me^a - 19$ 일 때, 자연수 m 의 값을 구하시오.

[출처] 2021년(2022학년도) 평가원 고3공통 9월 미적분 30 [4.00점]

5. 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = 0$
 (나) $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$ 는 $0 \leq x < 1$ 일 때 $g(x) = f(x)$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = g(x)$ 이다. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 xg(x)dx = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
 (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021년 교육청 고3공통 10월 미적분 30 [4.00점]

6. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = -\frac{ax^3 + bx}{x^2 + 1}$$

라 하자. 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \neq 0$ 이고, 두 함수 $g(x) = f(x) - f^{-1}(x)$, $h(x) = (g \circ f)(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $g(2) = h(0)$
 (나) $g'(2) = -5h'(2)$

$4(b-a)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2021년(2022학년도) 평가원 고3공통 11월 30 [4.00점]

7. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(1)=1, \int_1^2 f(x) dx = \frac{5}{4}$$

(나) 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,
 $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(2x)=2f(x)$ 이다.

$$\int_1^8 xf'(x) dx = \frac{q}{p} \text{ 일 때, } p+q \text{의 값을 구하시오.}$$

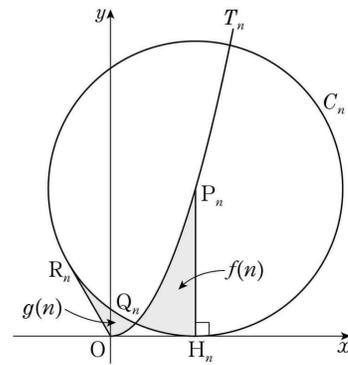
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022년 교육청 고3공통 3월 미적분 30 [4.00점]

8. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 곡선

$$T_n : y = \frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2 (x \geq 0)$$

위에 있고 원점 O 와의 거리가 $2n+2$ 인 점을 P_n 이라 하고, 점 P_n 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H_n 이라 하자. 중심이 P_n 이고 점 H_n 을 지나는 원을 C_n 이라 할 때, 곡선 T_n 과 원 C_n 의 교점 중 원점에 가까운 점을 Q_n , 원점에서 원 C_n 에 그은 두 접선의 접점 중 H_n 이 아닌 점을 R_n 이라 하자. 점 R_n 을 포함하지 않는 호 Q_nH_n 과 선분 P_nH_n , 곡선 T_n 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(n)$, 점 H_n 을 포함하지 않는 호 R_nQ_n 과 선분 OR_n , 곡선 T_n 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(n)$ 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)-g(n)}{n^2} = \frac{\pi}{2} + k$ 이다. $60k^2$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.)



[출처] 2022년 교육청 고3공통 4월 미적분 30 [4.00점]

9. 함수 $f(x) = a\cos x + x\sin x + b$ 와 $-\pi < \alpha < 0 < \beta < \pi$ 인 두 실수 α, β 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$
 (나) $\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\beta - \alpha} + \frac{1}{\beta} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = c$ 일 때, $f\left(\frac{\beta - \alpha}{3}\right) + c = p + q\pi$ 이다.

두 유리수 p, q 에 대하여 $120 \times (p + q)$ 의 값을 구하시오.
 (단, a, b, c 는 상수이고, $a < 1$ 이다.)

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 6월 미적분 30 [4.00점]

10. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \frac{x^2 - ax}{e^x}$$

이다. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$f(x) = f'(t)(x - t) + f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

$g(5) + \lim_{t \rightarrow 5} g(t) = 5$ 일 때, $\lim_{t \rightarrow k^-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow k^+} g(t)$ 를 만족시키는

모든 실수 k 의 값의 합은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처]

2022년 교육청 고3공통 7월 미적분 30 [4.00점]

11. 최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서
 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = e^x f(x)$$

이다. 양수 k 에 대하여 집합 $\{x \mid g(x) = k, x \text{는 실수}\}$ 의 모든
 원소의 합을 $h(k)$ 라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서
 정의된 함수 $h(k)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$ 가 $k=t$ 에서 불연속인 t 의 개수는 1이다.

$$(나) \lim_{k \rightarrow 3e^+} h(k) - \lim_{k \rightarrow 3e^-} h(k) = 2$$

$g(-6) \times g(2)$ 의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$)

[출처]

2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 9월 미적분 30 [4.00점]

12. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 와 구간
 $(0, \infty)$ 에서 $g(x) \geq 0$ 인 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq -3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f(-3)$ 이다.

(나) $x > -3$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2 = f'(x) \text{이다.}$$

$$\int_4^5 g(x) dx = \frac{q}{p} \text{일 때, } p+q \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022년 교육청 고3공통 10월 미적분 30 [4.00점]

13. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x) = \ln\{f(x) + f'(x) + 1\}$$

이 있다. 상수 a 와 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) > 0$ 이고

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt = \int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$$

이다.

(나) $g(4) = \ln 5$

$\int_3^5 \{f'(x) + 2a\}g(x)dx = m + n\ln 2$ 일 때, $m+n$ 의 값을

구하시오. (단, m, n 은 정수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.)

[출처] 2022년(2023학년도) 평가원 고3공통 11월 미적분 30 [4.00점]

14. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 와 함수

$g(x) = e^{\sin \pi x} - 1$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x) = g(f(x))$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 0을 갖는다.

(나) 열린구간 $(0, 3)$ 에서 방정식 $h(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3) = \frac{1}{2}$, $f'(3) = 0$ 일 때, $f(2) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을

구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처]

2023년 교육청 고3공통 3월 미적분 30 [4.00점]

15. 함수

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} - x}{x^{2n} + 1}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$2k-2 \leq |x| < 2k$ 일 때,

$$g(x) = (2k-1) \times f\left(\frac{x}{2k-1}\right)$$

이다. (단, k 는 자연수이다.)

$0 < t < 10$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $y=t$ 가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t 의 값의 합을 구하시오.

[출처]

2023년 교육청 고3공통 4월(5/10시행) 미적분 30 [4.00점]

16. $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = -\frac{1}{2}f(x)$ 이다.

$x > 0$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

라 할 때,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \{g(n+t) - g(n-t)\} + 2g(n) = \frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 6월 미적분 28 [4.00점]

17. 두 상수 a ($a > 0$), b 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times b$ 의 값은?

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$\{f(x)\}^2 + 2f(x) = a \cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b \text{이다.}$$

(나) $f(0) = f(2) + 1$

- ① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$
 ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

[출처] 2023년 교육청 고3공통 7월 미적분 30 [4.00점]

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \sin|\pi f(x)|$$

라 하자. 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점의 x 좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. 함수 $g(x)$ 와 자연수 m 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x = a_4$ 와 $x = a_8$ 에서 극대이다.

(나) $f(a_m) = f(0)$

$f(a_k) \leq f(m)$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 9월 미적분 28 [4.00점]

19. 실수 a ($0 < a < 2$)에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} 2|\sin 4x| & (x < 0) \\ -\sin ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수

$$g(x) = \left| \int_{-a\pi}^x f(t) dt \right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
- ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[출처] 2023년 교육청 고3공통 10월 미적분 30 [4.00점]

20. 두 정수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖는다.
- (나) 함수 $|f(x)|$ 가 $x = k$ 에서 극대 또는 극소인 모든 k 의 값의 합은 3이다.

$f(10) = pe^{-10}$ 일 때, p 의 값을 구하시오.

[출처] 2023년(2024학년도) 평가원 고3공통 11월 미적분 28 [4.00점]

21. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이고, $x < 0$ 일 때 $f(x) = -4xe^{4x^2}$ 이다. 모든 양수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$ 라 하자.

두 함수 $g(t), h(t)$ 는 모든 양수 t 에 대하여

$$2g(t) + h(t) = k \quad (k \text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x) dx = e^4 - 1$ 일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$ 의 값은?

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$

④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

[출처] 2024년 교육청 고3공통 3월 미적분 30

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 자연수 m 에 대하여 구간 $(0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) \left(\frac{x}{m}\right)^n + x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n + 1}$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 미분가능하고, $g'(m+1) \leq 0$ 이다.
- (나) $g(k)g(k+1) = 0$ 을 만족시키는 자연수 k 의 개수는 3이다.
- (다) $g(l) \geq g(l+1)$ 을 만족시키는 자연수 l 의 개수는 3이다.

$g(12)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2024년 교육청 고3공통 5월 미적분 30 [4.00점]

23. 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 0이 아닌 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 을 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (|a_n| < \alpha) \\ -\frac{5}{a_n} & (|a_n| \geq \alpha) \end{cases} \quad (\alpha \text{는 양의 상수})$$

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 과 자연수 p 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$$

(나) $\sum_{n=1}^m \frac{a_n}{b_n}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m 은

$$p \text{이고, } \sum_{n=1}^p b_n = 51, \sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \frac{1}{64} \text{이다.}$$

$32 \times (a_3 + p)$ 의 값을 구하시오.

[출처]

2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 6월 미적분 30 [4.00점]

24. 함수 $y = \frac{\sqrt{x}}{10}$ 의 그래프와 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가

만나는 모든 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^3 \tan^2(a_{n+1} - a_n)$$

의 값을 구하시오.

[출처] 2024년 교육청 고3공통 7월 미적분 30 [4.00점]

25. 상수 a ($0 < a < 1$)에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \int_0^x \ln(e^{|t|} - a) dt$$

라 하자. 함수 $f(x)$ 와 상수 k 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x = \ln \frac{3}{2}$ 에서 극값을 갖는다.

(나) $f\left(-\ln \frac{3}{2}\right) = \frac{f(k)}{6}$

$\int_0^k \frac{|f'(x)|}{f(x) - f(-k)} dx = p$ 일 때, $100 \times a \times e^p$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 9월 미적분 30 [4.00점]

26. 양수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = (k - |x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$ 에 대하여 $F(0)$ 의 최솟값을 $g(k)$ 라 하자.

모든 실수 x 에 대하여 $F'(x) = f(x)$ 이고 $F(x) \geq f(x)$ 이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{3}{2}\right) = pe + q$ 일 때, $100(p+q)$ 의 값을 구하시오. (단,

$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ 이고, p 와 q 는 유리수이다.)

[출처]

2024년 교육청 고3공통 10월 미적분 30 [4.00점]

27. 두 상수 a ($a > 0$), b 에 대하여 함수

$f(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때,
 $60 \times (a+b)$ 의 값을 구하시오.

(가) $\{x \mid f(x) = f'(t) \times x\} = \{0\}$ 을 만족시키는 실수 t 의
 개수가 1이다.

(나) $f(2) = 2e^{-2}$

[출처]

2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 11월 미적분 30 [4.00점]

28. 두 상수 a ($1 \leq a \leq 2$), b 에 대하여 함수

$f(x) = \sin(ax + b + \sin x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi a + b$

(나) $f'(0) = f'(t)$ 인 양수 t 의 최솟값은 4π 이다.

함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극대인 α 의 값 중 열린구간

$(0, 4\pi)$ 에 속하는 모든 값의 집합을 A 라 하자. 집합 A 의

원소의 개수를 n , 집합 A 의 원소 중 가장 작은 값을 α_1 이라

하면, $n\alpha_1 - ab = \frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와

q 는 서로소인 자연수이다.)

4개년 교육청&평가원 미적 30번 모음(빠른
정답)

작업공간

2025.02.04

1. [정답] 5
2. [정답] 13
3. [정답] 11
4. [정답] 586
5. [정답] 115

6. [정답] 10
7. [정답] 143
8. [정답] 80
9. [정답] 135
10. [정답] 16

11. [정답] 129
12. [정답] 283
13. [정답] 12
14. [정답] 31
15. [정답] 25

16. [정답] 107
17. [정답] ②
18. [정답] 208
19. [정답] ②
20. [정답] 91

21. [정답] ②
22. [정답] 84
23. [정답] 138
24. [정답] 25
25. [정답] 144

26. [정답] 25
27. [정답] 40
28. [정답] 17