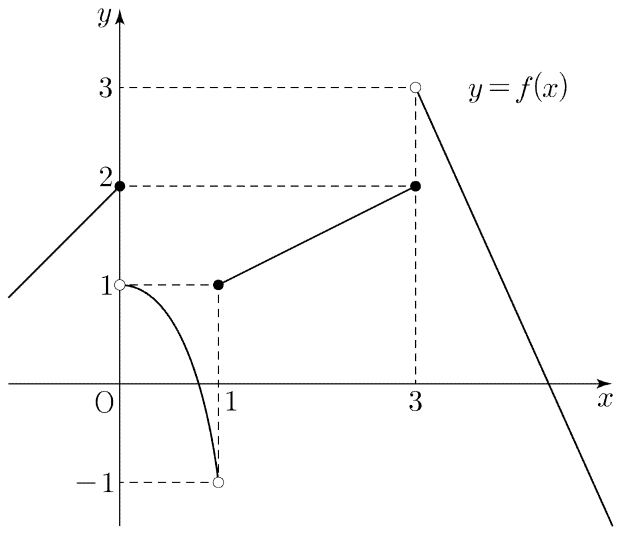
수학 영역

1. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x)+\lim_{x \to 3+} f(x)+\lim_{x \to 1}|f(x)|$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

1) 정답 ④

$\lim_{x \to 0-} f(x)=2$, $\lim_{x \to 3+} f(x)=3$, $\lim_{x \to 1-}|f(x)|=\lim_{x \to 1+}|f(x)|=1$ 이므로
$\lim_{x \to 0-} f(x)+\lim_{x \to 3+} f(x)+\lim_{x \to 1}|f(x)|=6$

2. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x \to -2}\{(x+2)f(x)-(2x+1)\}=8,$$

$$\lim_{x \to -2}\left\{\frac{g(x)}{3x+6}+\frac{3}{\sqrt{2x^2+1}}\right\}=5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \to -2} f(x)g(x)$의 값을 구하시오.

2) 정답 60

$\lim_{x \to -2}\{(x+2)f(x)-(2x+1)\}=8$
$\lim_{x \to -2}(x+2)f(x)-\lim_{x \to -2}(2x+1)=8$
$\lim_{x \to -2}(x+2)f(x)+3=8$
$\therefore \lim_{x \to -2}(x+2)f(x)=5$ ⋯ ㉠
$\lim_{x \to -2}\left\{\frac{g(x)}{3x+6}+\frac{3}{\sqrt{2x^2+1}}\right\}=5$
$\lim_{x \to -2}\frac{g(x)}{3x+6}+\lim_{x \to -2}\frac{3}{\sqrt{2x^2+1}}=5$
$\lim_{x \to -2}\frac{g(x)}{3(x+2)}+1=5$
$\therefore \lim_{x \to -2}\frac{g(x)}{x+2}=12$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡에 의하여 구하는 값은

$$\lim_{x \to -2} f(x)g(x)=\lim_{x \to -2}\left\{(x+2)f(x)\times\frac{g(x)}{x+2}\right\}$$
$$=\lim_{x \to -2}(x+2)f(x)\times\lim_{x \to -2}\frac{g(x)}{x+2}$$
$$=5\times 12=60$$

3. 함수 $f(x)$가 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{2x^2-3x-1}{5x+3}<(x-1)f(x)<\frac{2(x+2)(x+4)}{5x-2}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-xf(x)}{2x+(x+1)f(x)}$의 값은?

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ $\frac{13}{12}$

3) 정답 ⑤

함수 $f(x)$가 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{2x^2-3x-1}{5x+3}<(x-1)f(x)<\frac{2(x+2)(x+4)}{5x-2}$$

를 만족시키므로 양변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{2x^2-3x-1}{(5x+3)(x-1)}<f(x)<\frac{2(x+2)(x+4)}{(5x-2)(x-1)}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-1}{(5x+3)(x-1)}=\frac{2}{5},\ \lim_{x\to\infty}\frac{2(x+2)(x+4)}{(5x-2)(x-1)}=\frac{2}{5}$$

이므로 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-xf(x)}{2x+(x+1)f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-f(x)}{2+\frac{(x+1)f(x)}{x}}$$

$$=\frac{3-\frac{2}{5}}{2+\frac{2}{5}}=\frac{13}{12}$$

4. 2가 아닌 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to-1}|f(x)|=\lim_{x\to-1}(2x+a)f(x)=4$$

를 만족시킬 때, 모든 a의 값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

4) 정답 ②

$\lim_{x\to-1}|f(x)|=4$에서 $\lim_{x\to-1}f(x)=4$ 또는 $\lim_{x\to-1}f(x)=-4$

(ⅰ) $\lim_{x\to-1}f(x)=4$일 때

$\lim_{x\to-1}(2x+a)f(x)=4$

$(-2+a)\times4=4$

$\therefore\ a=3$

(ⅱ) $\lim_{x\to-1}f(x)=-4$일 때

$\lim_{x\to-1}(2x+a)f(x)=4$

$(-2+a)\times(-4)=4$

$\therefore\ a=1$

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 $a=3$ 또는 $a=1$이므로 모든 a의 값의 합은 4이다.

5. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-f(x)}{x+1}=-4,\ \lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{x+1}=a$$

를 만족시킬 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5) 정답 ②

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-f(x)}{x+1}=-4$에서 다항함수 $x^2-f(x)$는 최고차항의 계수가 -4인 일차함수이므로

$x^2-f(x)=-4x+b$

$f(x)=x^2+4x-b$ (단, b는 상수)

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{x+1}=a$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}\{f(x)-3\}=f(-1)-3=0$

$\therefore\ f(-1)=3$

$f(-1)=1-4-b=3$

$\therefore\ b=-6$

따라서 $f(x)=x^2+4x+6$

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+3)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x+3)=2$$

$\therefore\ a=2$

6. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{\{f(x)\}^2+2x^2g(x)}$의 값은? 0

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2+3xf(x)+3xg(x)-\{g(x)\}^2=0$$

이다.

(나) $\lim_{x\to1}f(x)=-1$, $g(1)>1$

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

6) 정답 ①

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$\{f(x)\}^2+3xf(x)+3xg(x)-\{g(x)\}^2$

$=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)+3x\}$

이므로 $f(x)+g(x)=0$ 또는 $f(x)-g(x)=-3x$이다.

조건 (나)에서 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=-1$이고 $g(1)>1$이므로 $f(1)+g(1)>0$이다.

$x=1$에서 $f(1)+g(1)\neq0$이므로 조건 (가)에 의하여

$f(1)-g(1)=-3$

$\therefore\ g(1)=2$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)}{\{f(x)\}^2+2x^2g(x)}=\frac{-1+2}{(-1)^2+2\times2}=\frac{1}{5}$$

7. 자연수 n에 대하여 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{n-1}}{f(x)}=n$$

을 만족시킨다. $f(1)=\frac{10}{3}$ 일 때, $f(3)$의 값은?

① 81 ② 84 ③ 87 ④ 90 ⑤ 93

7) 정답 ②

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}=n$ 이므로 다항함수 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수는 모두 n이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{x^{n-1}}{f(x)}=n$ 이므로 $f(x)$는 x^{n-1}을 인수로 가지고

x^{n-1}의 계수는 $\frac{1}{n}$ 이다.

따라서 $f(x)=nx^n+\frac{x^{n-1}}{n}$ 이고, $f(1)=\frac{10}{3}$ 이므로

$n+\frac{1}{n}=\frac{10}{3}$

$3n^2-10n+3=0$

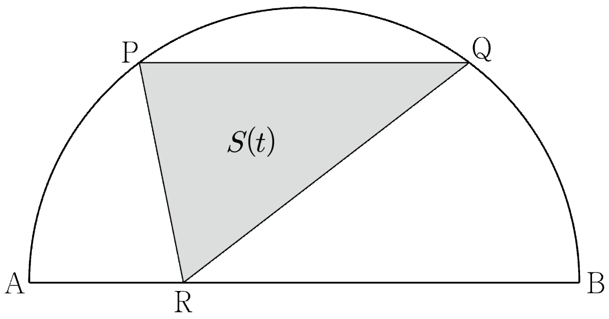
$(3n-1)(n-3)=0$

$\therefore\ n=3$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 $f(x)=3x^3+\frac{x^2}{3}$ 이고 구하는 값은

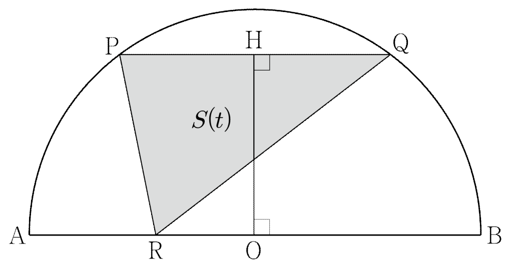
$f(3)=81+3=84$

8. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB와 평행하고 길이가 $t\,(0<t<2)$인 현 PQ와 선분 AB 위의 한 점 R에 대하여 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하자. $\lim_{t\to 2-}\frac{S(t)}{\sqrt{2-t}}$ 의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

8) 정답 ⑤



선분 AB의 중점을 O라 하고, 점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 POH에서

$\overline{\mathrm{OP}}=1$, $\overline{\mathrm{HP}}=\frac{t}{2}$, $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}$

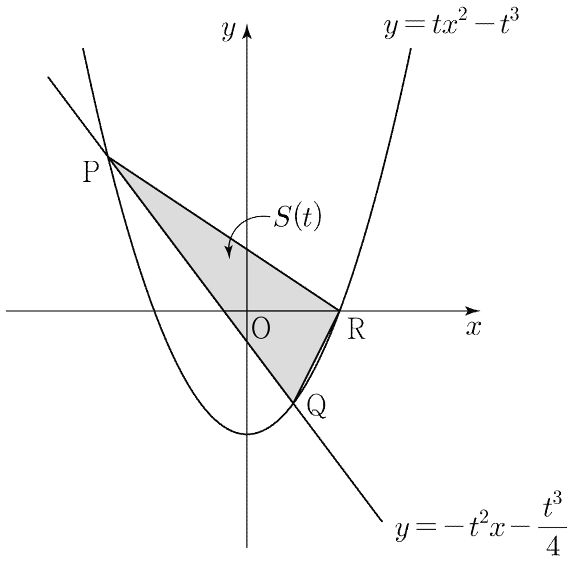
삼각형 PQR의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{OH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times t\times\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}$$
$$=\frac{t\sqrt{4-t^2}}{4}$$

따라서

$$\lim_{t\to 2-}\frac{S(t)}{\sqrt{2-t}}=\lim_{t\to 2-}\frac{t\sqrt{4-t^2}}{4\sqrt{2-t}}$$
$$=\lim_{t\to 2-}\frac{t\sqrt{2+t}}{4}$$
$$=\frac{4}{4}=1$$

9. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=tx^2-t^3$과 직선 $y=-t^2x-\frac{t^3}{4}$이 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 곡선 $y=tx^2-t^3$이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 R이라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하자. $100\times\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t^4}$의 값을 구하시오.



9) 정답 125

곡선 $y=tx^2-t^3$과 직선 $y=-t^2x-\frac{t^3}{4}$이 만나는 점의 x좌표는 방정식 $tx^2-t^3=-t^2x-\frac{t^3}{4}$의 두 실근이다.

$$tx^2+t^2x-\frac{3}{4}t^3=0$$
$$x^2+tx-\frac{3}{4}t^2=0\ (\because\ t>0)$$
$$\left(x-\frac{t}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}t\right)=0$$

따라서 두 점 P, Q의 x좌표는 $-\frac{3}{2}t$, $\frac{t}{2}$이다.

두 점 $\left(-\frac{3}{2}t, \frac{5}{4}t^3\right)$, $\left(\frac{t}{2}, -\frac{3}{4}t^3\right)$에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}&=\sqrt{\left(\frac{t}{2}+\frac{3}{2}t\right)^2+\left(-\frac{3}{4}t^3-\frac{5}{4}t^3\right)^2}\\&=\sqrt{(2t)^2+(2t^3)^2}\\&=t\sqrt{4+4t^4}\\&=2t\sqrt{1+t^4}\end{aligned}$$

한편, 방정식 $tx^2-t^3=t(x^2-t^2)=0$에서 $x=t$ 또는 $x=-t$이므로 점 R의 좌표는 $\mathrm{R}(t, 0)$이다.

점 R와 직선 $y=-t^2x-\frac{t^3}{4}$ 사이의 거리는 $\frac{5t^3}{4\sqrt{1+t^4}}$

따라서 삼각형 PQR의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times2t\sqrt{1+t^4}\times\frac{5t^3}{4\sqrt{1+t^4}}=\frac{5}{4}t^4$$

따라서 구하는 값은

$$100\times\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t^4}=100\times\frac{5}{4}=125$$

10. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2+1}=2$

(나) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}$

$f(-4)>0$일 때, $f(3)$의 값은?

① 14 ② 18 ③ 22 ④ 26 ⑤ 30

10) 정답 ④

조건 (가)에 의하여

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ (a, b는 상수) … ㉠

조건 (나)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=p$라 하면

$p=\frac{1}{p}$이므로 $p=1$ 또는 $p=-1$이다.

이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=p$에서 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $f(1)=a+b+3=0$. $b=-a-3$이고,

$b=-a-3$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3+2x^2+ax-a-3\\&=(x-1)(x^2+3x+a+3)\end{aligned}$$

(i) $p=1$일 때

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+3x+a+3)=a+7=1$$

이므로 $a=-6$이고, $f(x)=(x-1)(x^2+3x-3)$이다.

이때 $f(-4)=-5\times(16-12-3)<0$이므로 모순이다.

(ii) $p=-1$일 때

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+3x+a+3)=a+7=-1$$

이므로 $a=-8$이고, $f(x)=(x-1)(x^2+3x-5)$이다.

이때 $f(-4)=-5\times(16-12-5)>0$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=(x-1)(x^2+3x-5)$이다.

따라서 구하는 값은

$$f(3)=2\times(9+9-5)=26$$

이다.