10일의 기적

(기하 문제지)

Part A. 올해기출 최종점검 2·3점 문제 (28문항)

Part B. 올해기출 최종점검 3·4점 문제 (16문항)

Part C. 올해기출 최종점검 고난도 문제 (4문항)

인간은 과정 앞에 무적이고, 결과 앞에 무력하다.
내가 매일 최선을 다하는 것만이
내가 이루어내야 할 유일한 일이다. -김지석

김지석수학연구소

기하

1. 이차곡선

PART B

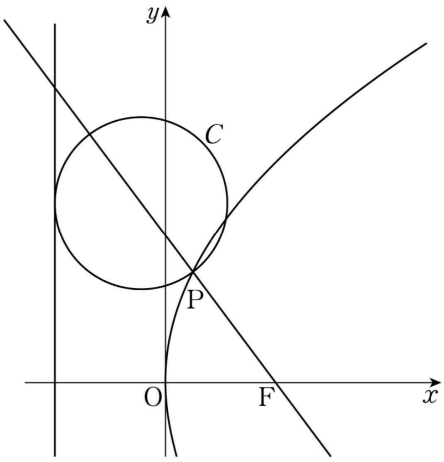
❈ 4점 ❈

(& 어려운 3점)

포물선의 정의 활용

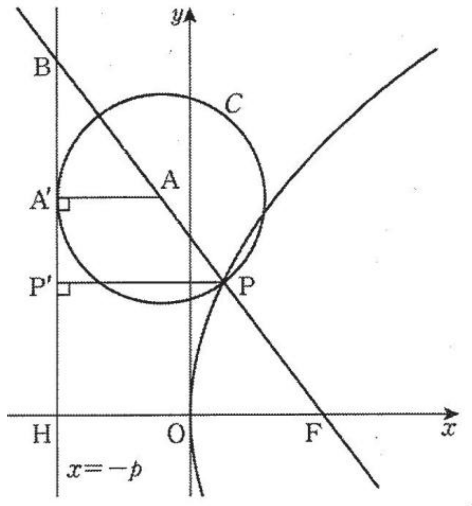
[2023년 3월 (기하) 29번]

1. 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 $F(p,0)$ $(p>0)$인 포물선이 있다. 점 F를 지나고 기울기가 $-\frac{4}{3}$인 직선이 포물선과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 직선 FP 위의 점을 중심으로 하는 원 C가 점 P를 지나고, 포물선의 준선에 접한다. 원 C의 반지름의 길이가 3일 때, $25p$의 값을 구하시오. [4점]
(단, 원 C의 중심의 x좌표는 점 P의 x좌표보다 작다.)



[정답] 96

원 C의 중심을 A라 하자.
세 점 A, P, F에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린
수선의 발을 각각 A$'$, P$'$, H라 하자.
직선 FP가 준선 $x=-p$와 만나는 점을 B라 하자.



원 C의 반지름의 길이가 3이므로
$\overline{AA'}=3$, $\overline{AP}=3$

직선 l의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로

$\frac{\overline{BA'}}{\overline{AA'}}=\frac{4}{3}$, 즉 $\overline{BA'}=4$, $\overline{BA}=5$, $\overline{BP}=8$

두 삼각형 BA$'$A, BP$'$P는 서로 닮음이므로

$\overline{A'A}:\overline{P'P}=\overline{BA}:\overline{BP}$, $\overline{P'P}=\frac{8\times3}{5}=\frac{24}{5}$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF}=\overline{P'P}=\frac{24}{5}$이므로

$\overline{BF}=\overline{BA}+\overline{AP}+\overline{PF}=\frac{64}{5}$

두 삼각형 BA$'$A, BHF는 서로 닮음이므로

$\overline{A'A}:\overline{HF}=\overline{BA}:\overline{BF}$, $\overline{HF}=\frac{\frac{64}{5}\times3}{5}=\frac{192}{25}$

$2p=\overline{HF}=\frac{192}{25}$에서 $p=\frac{96}{25}$

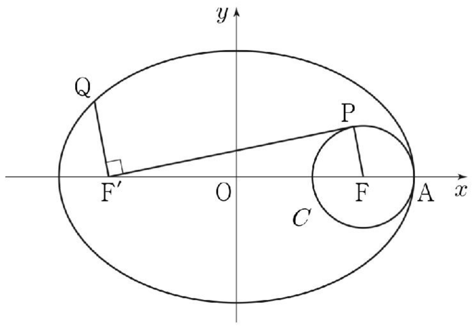
따라서 $25p=96$

[2023년 4월 (기하) 27번]

2. 다음 그림과 같이 두 점 F$(5,0)$, F$'(-5,0)$을 초점으로 하는 타원이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 점 F를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 y좌표가 양수인 점 P와 타원 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 PF$'$은 원 C에 접한다. (나) 두 직선 PF$'$, QF$'$은 서로 수직이다.

$\overline{\mathrm{QF'}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{PF}}$일 때, 이 타원의 장축의 길이는?
[3점]
(단, $\overline{\mathrm{AF}}<\overline{\mathrm{FF'}}$)



① $\frac{25}{2}$ ② 13 ③ $\frac{27}{2}$
④ 14 ⑤ $\frac{29}{2}$

[정답] ④

$\overline{\mathrm{PF}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{QF'}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{PF}}$

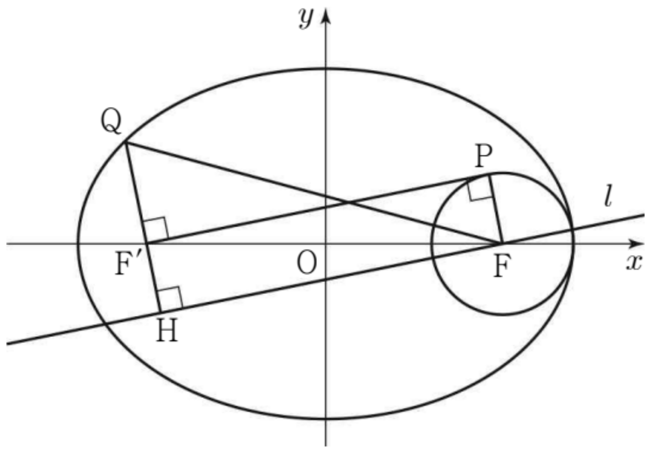
$=\frac{3}{2}k$

점 A의 x좌표는 $k+5$이므로
타원의 장축의 길이는 $2(k+5)$

$\overline{\mathrm{QF}}=2(k+5)-\overline{\mathrm{QF'}}$

$=\frac{k}{2}+10$

점 F를 지나고
직선 F$'$P에 평행한 직선을 l,
두 직선 QF$'$, l의 교점을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{F'H}}$

$=\frac{3}{2}k+k$

$=\frac{5}{2}k$

$\overline{\mathrm{HF}}=\overline{\mathrm{F'P}}$

$=\sqrt{\overline{\mathrm{F'F}}^2-\overline{\mathrm{PF}}^2}$

$=\sqrt{100-k^2}$

삼각형 QHF는 직각삼각형이므로

$\left(\frac{5}{2}k\right)^2+(100-k^2)=\left(\frac{k}{2}+10\right)^2$

$k(k-2)=0$에서 $k>0$이므로 $k=2$
따라서
타원의 장축의 길이는 $2(k+5)=2\times7=14$

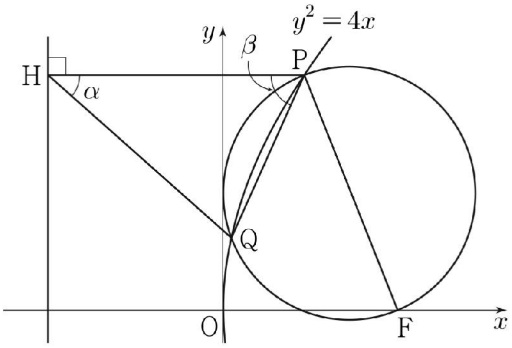
[2023년 4월 (기하) 28번]

3. 초점이 F인 포물선 $C: y^2=4x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P가 있다. 선분 PF를 지름으로 하는 원을 O라 할 때, 원 O는 포물선 C와 서로 다른 두 점에서 만난다. 원 O가 포물선 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q, 점 P에서 포물선 C의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle \mathrm{QHP}=\alpha$, $\angle \mathrm{HPQ}=\beta$라 할 때, $\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}=3$이다.

$\dfrac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{4\sqrt{6}}{7}$ ② $\dfrac{3\sqrt{11}}{7}$ ③ $\dfrac{\sqrt{102}}{7}$ ④ $\dfrac{\sqrt{105}}{7}$ ⑤ $\dfrac{6\sqrt{3}}{7}$



[정답] ④

점 Q에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 R라 하고,
점 Q에서 포물선 C의 준선에 내린 수선의 발을 S라 하자.

$\overline{\mathrm{PR}}=k$라 하면

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{\dfrac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}}{\dfrac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\overline{\mathrm{RH}}}}=\frac{\overline{\mathrm{RH}}}{k}=3\text{에서}$$

$\overline{\mathrm{RH}}=3k$

두 점 P, Q가 포물선 C 위의 점이므로

$$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RH}}=4k,$$

$$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{SQ}}=\overline{\mathrm{RH}}=3k$$

한편 원 O의 지름이 선분 PF이므로 삼각형 PQF는

$\angle \mathrm{FQP}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{QF}}^2}=\sqrt{16k^2-9k^2}=\sqrt{7}k$$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{PR}}^2=\overline{\mathrm{QH}}^2-\overline{\mathrm{RH}}^2$

$7k^2-k^2=\overline{\mathrm{QH}}^2-9k^2$에서 $\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{15}k$

따라서

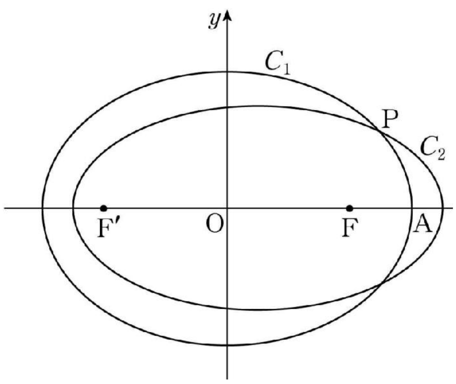
$$\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\frac{\sqrt{15}k}{\sqrt{7}k}=\frac{\sqrt{105}}{7}$$

타원의 정의 활용

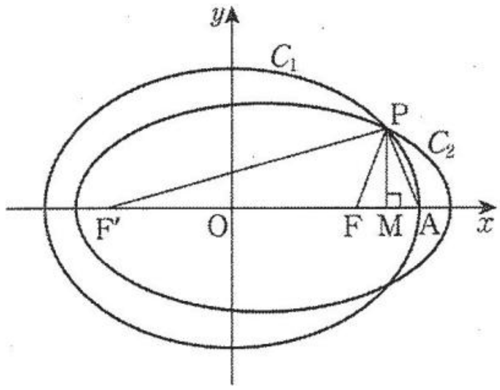
[2023년 3월 (기하) 28번]

4. 장축의 길이가 6이고 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원을 C_1이라 하자. 장축의 길이가 6이고 두 초점이 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$인 타원을 C_2라 하자. 두 타원 C_1과 C_2가 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\cos(\angle \mathrm{AFP})=\frac{3}{8}$일 때, 삼각형 PFA의 둘레의 길이는? [4점]

① $\frac{11}{6}$ ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{11}{4}$
④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{11}{2}$



[정답] ④



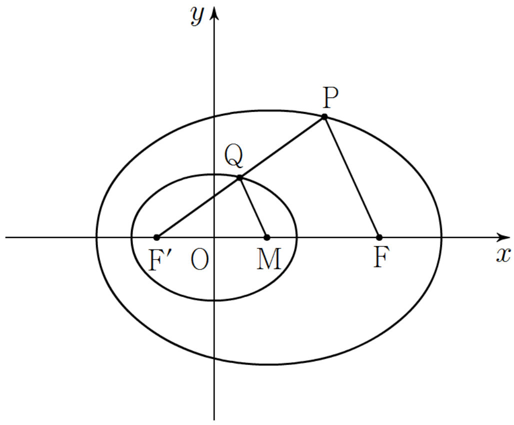
두 타원 C_1, C_2의 장축의 길이가 같으므로
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PF}'}$
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PA}}$
삼각형 PFA가 이등변삼각형이므로
선분 FA의 중점을 M이라 하면
$\angle \mathrm{PMF}=90^\circ$
$\cos(\angle \mathrm{AFP})=\frac{\overline{\mathrm{FM}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=\frac{3}{8}$에서
$\overline{\mathrm{FM}}=3k$ $(k>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=8k$
타원 C_1의 장축의 길이가 6이므로
$\overline{\mathrm{PF}'}=6-8k$
$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{OA}}-2\overline{\mathrm{FM}}=3-6k$이므로
$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{M}}=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{F}}+\overline{\mathrm{FM}}=2\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{FM}}$
$=2(3-6k)+3k=6-9k$
직각삼각형 $\mathrm{PF}'\mathrm{M}$에서 $\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{PF}'}^2-\overline{\mathrm{F}'\mathrm{M}}^2$이고
직각삼각형 PFM에서 $\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{FM}}^2$이므로
$(6-8k)^2-(6-9k)^2=(8k)^2-(3k)^2$
$k(12-17k)=55k^2$, $12k(6k-1)=0$
$k>0$이므로 $k=\frac{1}{6}$
따라서 삼각형 PFA의 둘레의 길이는
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{FA}}=8k+8k+6k=22k=\frac{11}{3}$

[2023년 6월 (기하) 26번]

5. 두 초점이 $\mathrm{F}(12, 0)$, $\mathrm{F}'(-4, 0)$이고, 장축의 길이가 24인 타원 C가 있다. $\overline{\mathrm{F'F}}=\overline{\mathrm{F'P}}$인 타원 C 위의 점 P에 대하여 선분 F′P의 중점을 Q라 하자. 한 초점이 F′인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 Q를 지날 때, $\overline{\mathrm{PF}}+a^2+b^2$의 값은? [3점]
(단, a와 b는 양수이다.)

① 46　② 52　③ 58
④ 64　⑤ 70

[정답] ④



선분 FF′의 중점을 점 M이라 하면
$\overline{\mathrm{FF'}}=16$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=16$, $\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{QP}}=8$

타원의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=24$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=24-16=8$

또, 선분 FF′의 중점이 점 M이므로

$$\overline{\mathrm{MF}}=\overline{\mathrm{MF'}}=\frac{12-(-4)}{2}=8$$

$\therefore$ M$(4, 0)$

또, 삼각형 PFF′에서 중점연결정리에 의해

$$\overline{\mathrm{QM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PF}}=4$$

이제 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$은 중심이 원점이고 장축의 길이가 $2a$다.
한 초점이 점 F′이므로 다른 초점은 $(4, 0)$인 점 M이다.
점 Q가 타원 위의 한 점이고,
$\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{QM}}=8+4=12$이므로 장축의 길이가 12이다.
따라서 $2a=12$에서　$a=6$
초점이 F′이므로　$\sqrt{6^2-b^2}=4$,　$b^2=20$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PF}}+a^2+b^2=8+36+20=64$

[2023년 9월 (기하) 29번]

6. 한 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$과 중심의 좌표가 $(2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 r인 원이 있다. 타원 위의 점 P와 원 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF}}$의 최솟값이 6일 때, r의 값을 구하시오. [4점]

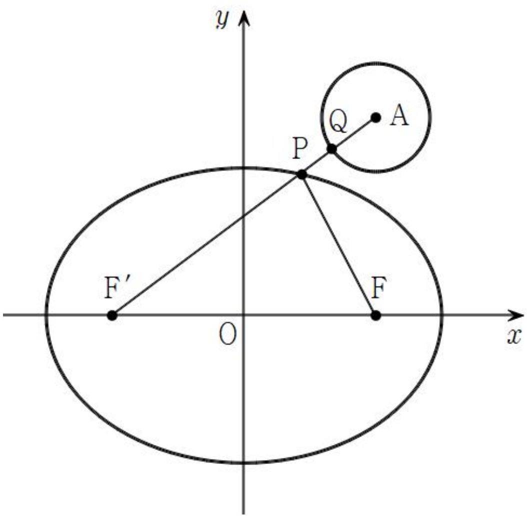
[정답] 17

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$에서 $\quad c=\sqrt{9-5}=2$

따라서 점 F는 $(2,\ 0)$이고 다른 하나의 초점을 점 F′라 하면 $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$이다.

점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$라 하면 반지름 r의 범위에 따라 아래 세 경우로 나뉜다.

(ⅰ) 타원과 원이 서로 외부에 있을 때,



타원의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\sqrt{9}=6$이므로

$$\overline{\mathrm{PF}}=6-\overline{\mathrm{PF'}}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}-6$$

$\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF}}$이 최솟값을 가지면 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$이 최솟값을 가진다.

이때, 점 P, Q는 직선 AF′ 위에 존재한다.

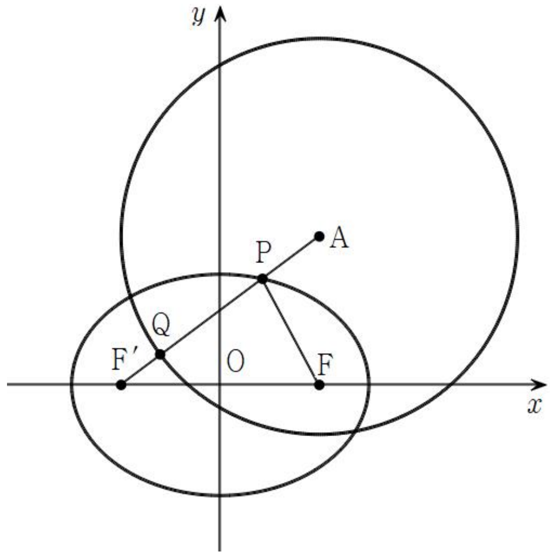
그러므로 $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF'}}$의 최솟값은

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}-6&=\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AQ}}-6\\&=\sqrt{4^2+3^2}-r-6\\&=5-r-6=6\end{aligned}$$

$$\therefore\ r=-7$$

$r>0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(ⅱ) 원과 타원이 교점을 가질 때,

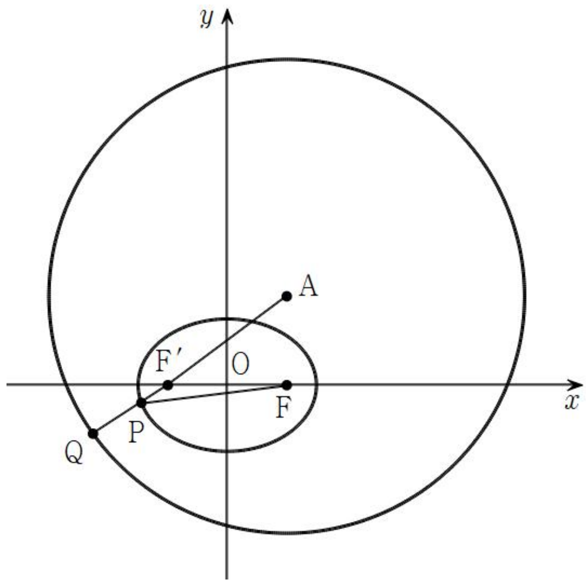


(ⅰ)과 마찬가지로 $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF'}}$의 최솟값은

$$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}-6=6,\qquad \overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}=12$$

이때 타원의 장축의 길이가 6이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}<6$이고 $\overline{\mathrm{PF'}}<6$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(ⅲ) 원이 타원을 포함할 때,



$\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF'}}$의 최솟값은 $\quad \overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}-6$

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$가 최소이려면 점 A, F′, P, Q가 이 순서대로 일직선을 이루어야 한다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}-6&=(\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{AF'}})-6\\&=r-\sqrt{4^2+3^2}-6\\&=r-5-6=6\end{aligned}$$

$$\therefore\ r=17$$

이상에서 $r=17$이다.

쌍곡선의 정의 활용

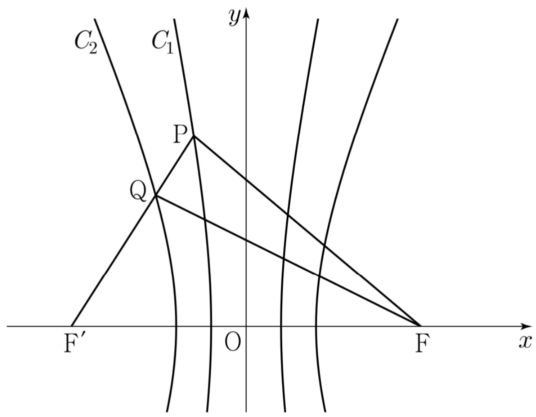
[2023년 6월 (기하) 29번]

7. 두 점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 두 쌍곡선

$$C_1 : x^2 - \frac{y^2}{24} = 1,\ C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$$

이 있다. 쌍곡선 C_1 위에 있는 제2사분면 위의 점 P에 대하여 선분 PF'이 쌍곡선 C_2와 만나는 점을 Q라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}$, $2\overline{\mathrm{PF}'}$, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 PQ의 기울기는 m이다. $60m$의 값을 구하시오. [4점]



[정답] 80

$\overline{\mathrm{PQ}}=\alpha$, $\overline{\mathrm{QF}'}=\beta$라 하면 쌍곡선의 정의에 의해

$$\overline{\mathrm{PF}}=\alpha+\beta+2,\ \overline{\mathrm{QF}}=\beta+4$$

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}$, $2\overline{\mathrm{PF}'}$, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\alpha+\beta+4$, $2(\alpha+\beta)$, $2\alpha+2\beta+2$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

등차중항의 성질에 의해

$$4(\alpha+\beta)=\alpha+\beta+4+2(\alpha+\beta)+2$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=6$$

즉, $\overline{\mathrm{PF}'}=6$이고 $\overline{\mathrm{PF}}=\alpha+\beta+2=8$이다.

$\sqrt{1+24}=5$이므로 $\overline{\mathrm{FF}'}=10$

따라서 삼각형 PFF'는 직각삼각형이다.

$$\tan\angle\mathrm{PF}'\mathrm{F}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ 60m=60\times\frac{4}{3}=80$$

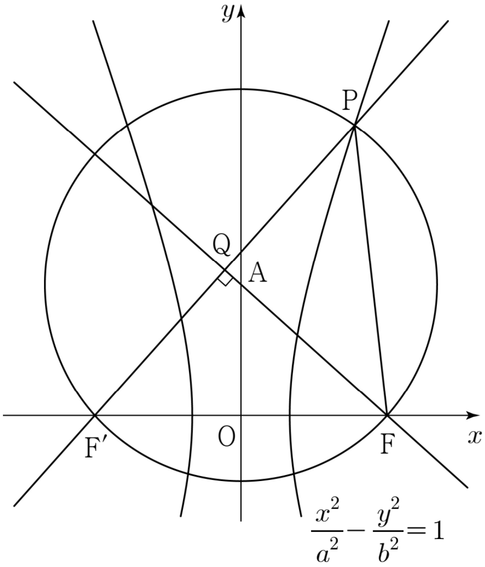
[2023년 7월 (기하) 28번]

8. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 점 $A(0, 6)$을 중심으로 하고 두 초점을 지나는 원이 있다. 원과 쌍곡선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점 P와 두 직선 PF', AF가 만나는 점 Q가

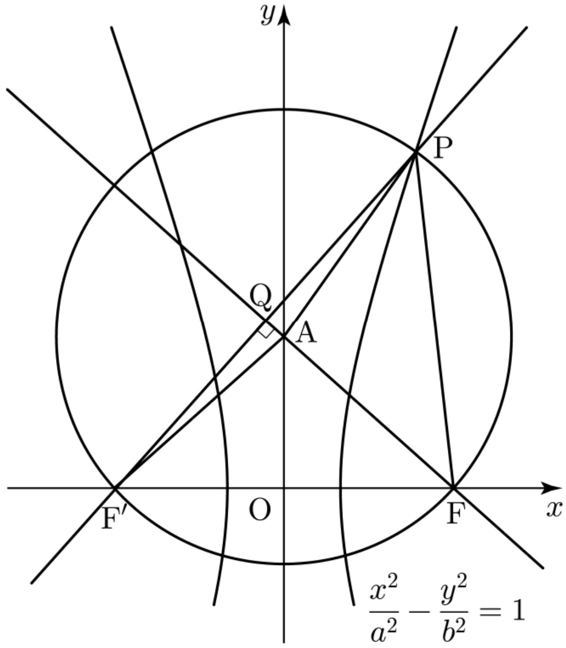
$$\overline{PF} : \overline{PF'}=3:4,\ \angle F'QF=\frac{\pi}{2}$$

를 만족시킬 때, b^2-a^2의 값은? [4점]
(단, a, b는 양수이고, 점 Q는 제2사분면에 있다.)

① 30 ② 35 ③ 40
④ 45 ⑤ 50



[정답] ②



$\overline{PF}=3k$, $\overline{PF'}=4k$ $(k>0)$이라 하자.
쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=k=2a$
$\overline{AF}=\overline{AF'}$이므로
삼각형 APF'은 $\overline{AP}=\overline{AF'}$인 이등변삼각형이고
$\overline{QP}=\overline{QF'}=4a$
$\overline{QF}=\sqrt{\overline{PF}^2-\overline{QP}^2}=\sqrt{(6a)^2-(4a)^2}=2\sqrt{5}a$
삼각형 FPF'에서 선분 FQ가 선분 PF'을 수직이등분하므로 삼각형 FPF'은 이등변삼각형이고 $\overline{FF'}=\overline{PF}=6a$
$\overline{OF}=c=3a$ (단, O는 원점)
$\angle AFF'=\theta$라 하면 직각삼각형 QFF'에서

$$\tan\theta=\frac{\overline{QF'}}{\overline{QF}}=\frac{4a}{2\sqrt{5}a}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

직각삼각형 OFA에서

$$\tan\theta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OF}}=\frac{6}{c}=\frac{2}{a}$$

$$\frac{2}{5}\sqrt{5}=\frac{2}{a},\ a=\sqrt{5}$$

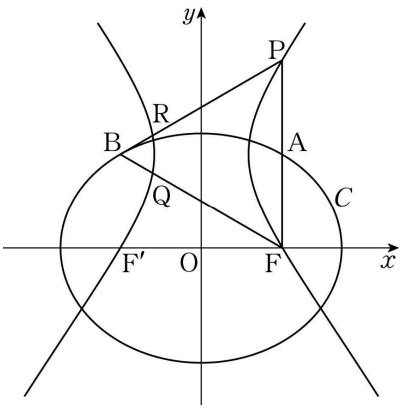
$c^2=a^2+b^2=9a^2$, $b^2=8a^2$
따라서 $b^2-a^2=7a^2=35$

[2023년 3월 (기하) 30번]

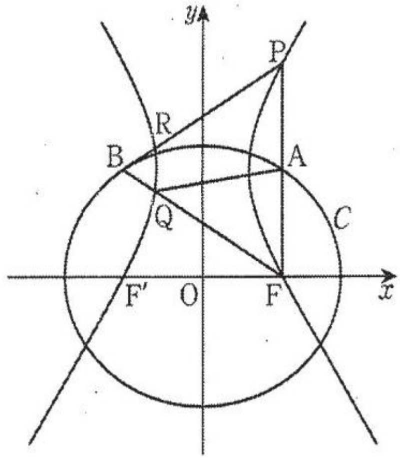
9. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 C가 있다. 타원 C가 두 직선 $x=c$, $x=-c$와 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 각각 A, B라 하자. 두 초점이 A, B이고 점 F를 지나는 쌍곡선이 직선 $x=c$와 만나는 점 중 F가 아닌 점을 P라 하고, 이 쌍곡선이 두 직선 BF, BP와 만나는 점 중 x좌표가 음수인 점을 각각 Q, R라 하자. 세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 BFP는 정삼각형이다.
(나) 타원 C의 장축의 길이와 삼각형 BQR의 둘레의 길이의 차는 3이다.

$60\times\overline{\mathrm{AF}}$의 값을 구하시오. [4점]



[정답] 100

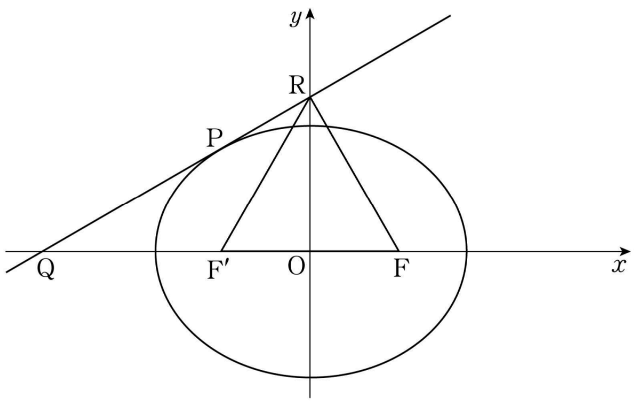


$\overline{\mathrm{AF}}=a$, $\overline{\mathrm{BQ}}=b$라 하자.
점 A는 선분 PF의 중점이고 조건 (가)에 의하여
$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{PF}}=2a$
타원 C의 장축의 길이는
$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{AF}}=2a+a=3a$
조건 (나)에서
$(\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}})-3\overline{\mathrm{BQ}}=3$
$3a-3b=3$, $b=a-1$
두 점 F, Q는 모두 쌍곡선 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BF}}-\overline{\mathrm{AF}}$
$\overline{\mathrm{AQ}}=(2a-a)+b=2a-1$
삼각형 AQF에서
$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{BF}}-\overline{\mathrm{BQ}}=2a-b=a+1$
이므로 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AF}}^2+\overline{\mathrm{QF}}^2-2\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{QF}}\times\cos 60^\circ$
$(2a-1)^2=a^2+(a+1)^2-a(a+1)$
$3a^2-5a=0$
$a(3a-5)=0$
$a>0$이므로 $a=\dfrac{5}{3}$
따라서 $60\times\overline{\mathrm{AF}}=60a=100$

이차곡선의 접선

[2023년 10월 (기하) 28번]

10. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{18}=1$이 있다. 타원 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R이라 하자. 삼각형 $\mathrm{RF'F}$가 정삼각형이고 점 F'은 선분 QF의 중점일 때, c^2의 값은? [4점]
(단, a는 양수이다.)



① 7　② 8　③ 9
④ 10　⑤ 11

[정답] ③

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{18}=1$의 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$이므로 $a^2-18=c^2$, $a^2=c^2+18$ …… ㉠

삼각형 $\mathrm{RF'F}$가 한 변의 길이가 $2c$인 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{3}c$

점 F'이 선분 QF의 중점이므로 $\overline{\mathrm{QO}}=3c$

직선 QR의 기울기가 $\dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{\overline{\mathrm{QO}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 타원 위의
점 P에서의 접선 QR의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2a^2+18}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{\frac{1}{3}a^2+18}$$

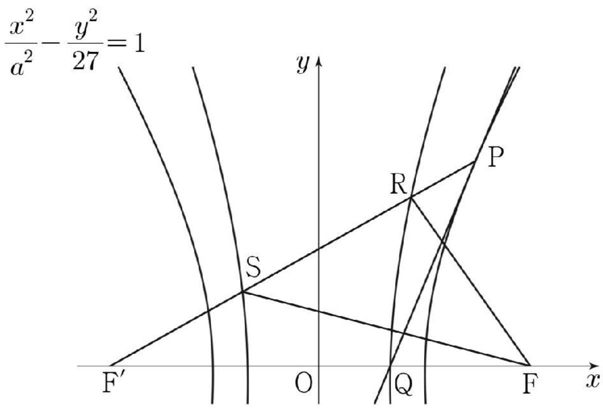
직선 QR의 y절편이 $\sqrt{3}c$이므로
$\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2+18}=\sqrt{3}c$, $\dfrac{1}{3}a^2+18=3c^2$

㉠에 의하여 $\dfrac{1}{3}(c^2+18)+18=3c^2$, $\dfrac{8}{3}c^2=24$

따라서 $c^2=9$

[2023년 4월 (기하) 29번]

11. 다음 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{9}{2},\ k\right)$ $(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 두 점 F, F′을 초점으로 하고 점 Q를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선이 선분 PF′과 만나는 두 점을 R, S라 하자. $\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SF}}=\overline{\mathrm{RF}}+8$일 때, $4\times(a^2+k^2)$의 값을 구하시오. [4점]
(단, a는 양수이고, 점 R의 x좌표는 점 S의 x좌표보다 크다.)



[정답] 171

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{9}{2},\ k\right)$에서의

접선의 방정식은 $\dfrac{9}{2a^2}x-\dfrac{k}{27}y=1$이므로

점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{2}{9}a^2,\ 0\right)$

두 점 R, S는 두 초점이 F, F′이고
점 Q를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선 위의 점이므로

$$\overline{\mathrm{RF'}}-\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{SF'}}=\frac{4}{9}a^2$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{RF}}&=(\overline{\mathrm{RF'}}-\overline{\mathrm{SF'}})+\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{RF}}\\&=(\overline{\mathrm{RF'}}-\overline{\mathrm{RF}})+(\overline{\mathrm{SF}}-\overline{\mathrm{SF'}})\\&=\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2\\&=\frac{8}{9}a^2=8\text{에서}\end{aligned}$$

$a^2=9$

점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{9}{2},\ k\right)$는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 위의 점이므로

$k^2=\dfrac{135}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}4\times(a^2+k^2)&=4\times\left(9+\frac{135}{4}\right)\\&=171\end{aligned}$$

기하

2. 평면벡터

PART B

※ 4점 ※

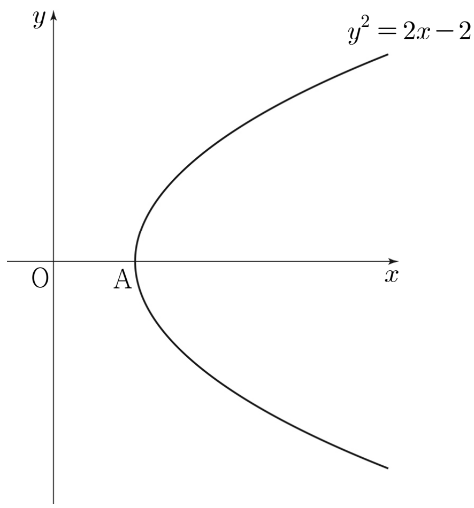
평면벡터

[2023년 4월 (기하) 30번]

12. 좌표평면에서 포물선 $y^2 = 2x - 2$의 꼭짓점을 A라 하자. 이 포물선 위를 움직이는 점 P와 양의 실수 k에 대하여

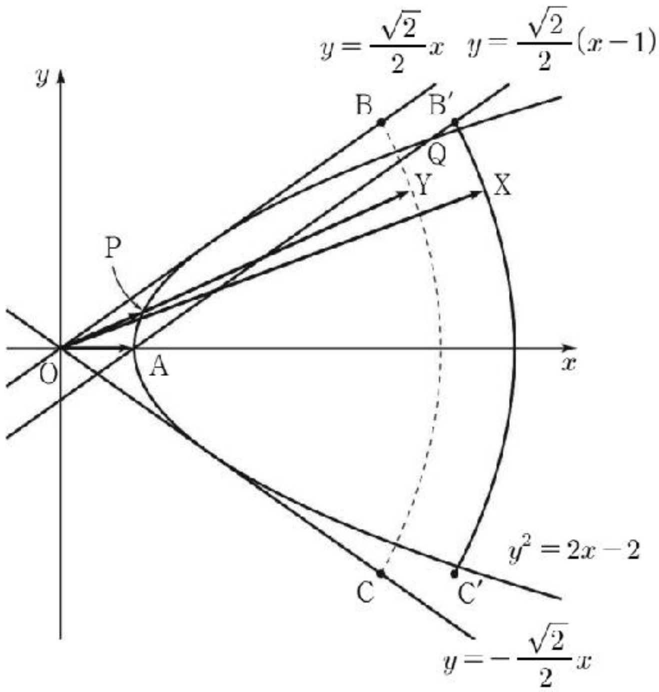
$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{k}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형을 C라 하자. 도형 C가 포물선 $y^2 = 2x - 2$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]
(단, O는 원점이다.)



[정답] 24

점 O에서 포물선 $y^2=2x-2$에 그은
접선의 방정식을 $y=ax$라 하자.
$(ax)^2=2x-2$에서 $a^2x^2-2x+2=0$
이차방정식 $a^2x^2-2x+2=0$의 판별식을 D라
하면
$\frac{D}{4}=1-2a^2=0$에서 $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
중심이 점 O이고
반지름의 길이가 k인 원이
직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$와 제1사분면에서 만나는 점을 B,
직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$와 제4사분면에서 만나는 점을
C라 하자.
$\overrightarrow{OY}=\frac{k}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}$를 만족시키는 점 Y에 대하여
$|\overrightarrow{OY}|=\left|\frac{k}{|\overrightarrow{OP}|}\overrightarrow{OP}\right|=\frac{|k|}{|\overrightarrow{OP}|}\times|\overrightarrow{OP}|=k$
이므로
점 Y가 나타내는 도형은 부채꼴 OCB의 호
CB이다.
또한
$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OY}$에서 점 X는 점 Y를 x축의
방향으로 1만큼 평행이동시킨 점이므로
두 점 B, C를 x축의 방향으로 1만큼
평행이동시킨 점을
각각 B$'$, C$'$이라 하면
도형 C는 부채꼴 AC$'$B$'$의 호 C$'$B$'$이다.



점 A$(1, 0)$을 지나고
직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$와 평행한 직선이
포물선 $y^2=2x-2$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을
Q라 하면 도형 C가 포물선 $y^2=2x-2$와
서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
$k=\overline{AB'}\geq\overline{AQ}$를 만족시켜야 하므로
구하는 실수 k의 최솟값은 $\overline{AQ}$이다.
직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$와 평행하고 점 A$(1, 0)$을 지나는
직선의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$이므로
$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)\right\}^2=2x-2$에서
$x^2-6x+5=0$, $x=1$ 또는 $x=5$
점 Q는 점 A가 아니므로 Q$(5, 2\sqrt{2})$
$\overline{AQ}=\sqrt{(5-1)^2+(2\sqrt{2})^2}$
$=2\sqrt{6}$
따라서
$m=2\sqrt{6}$이며 $m^2=24$

[2023년 7월 (기하) 29번]

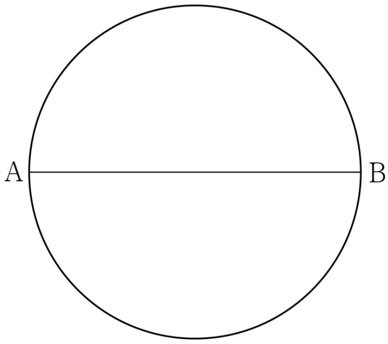
13. 좌표평면 위에 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위의 서로 다른 두 점 C, D가

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=27,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=9,\ \overline{CD}>3$$

을 만족시킨다. 선분 AC 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$
>
> (나) $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QD}=3$

$k\times(\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DP})$의 값을 구하시오. [4점]



[정답] 15

두 점 C, D는 원 위의 점이므로

$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$, $\angle ADB=\frac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2=27$에서 $\overline{AC}=3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AD}|^2=9$에서 $\overline{AD}=3$

그러므로 $\overline{BC}=3$, $\overline{BD}=3\sqrt{3}$

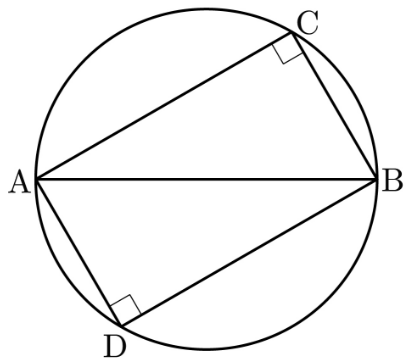
$\overline{CD}>3$이므로 $\overline{CD}=6$

$\overline{AC}=\overline{DB}=3\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\overline{CB}=3$,

$\angle ACB=\angle ADB=\frac{\pi}{2}$이므로

사각형 ADBC는 직사각형이다.

그러므로 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}$



조건 (가)에 의하여

$\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$에서

$\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})=k\overrightarrow{BC}$

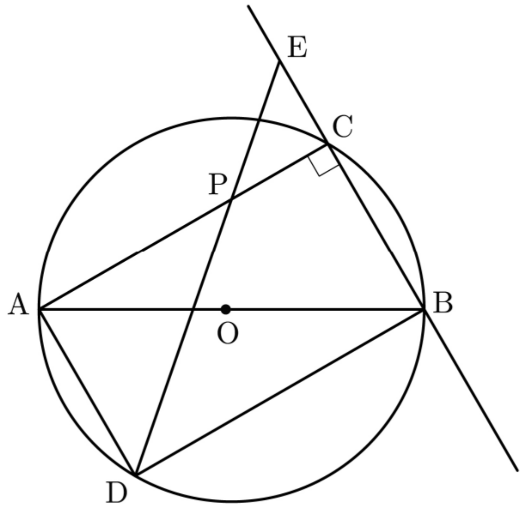
$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DB}&=k\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DA}\\&=k\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}\\&=(k-1)\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}$를 만족시키는 점을 E라 하면

$\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DB}=(k-1)\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BE}=(k-1)\overrightarrow{BC}$

그러므로 점 E는 직선 BC 위에 있다.



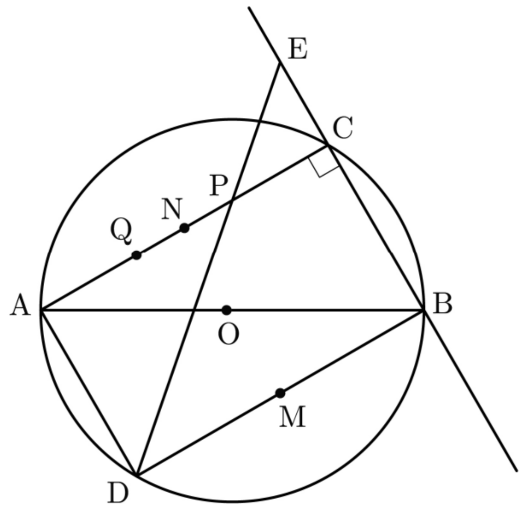
두 삼각형 EPC, EDB는 서로 닮음이고 닮음비가 $1:3$이므로 $\overline{BE}=\frac{3}{2}\overline{BC}$이므로 $k-1=\frac{3}{2}$에서

$k=\frac{5}{2}$

$\overline{PC}=\frac{1}{3}\overline{DB}=\sqrt{3}$

그러므로 $\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{PC}=2\sqrt{3}$

…… ㉠



선분 BD의 중점을 M이라 하면

조건 (나)에 의하여 $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QD}=3$

$\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QD}$

$=(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MD})$

$=|\overrightarrow{QM}|^2+\overrightarrow{QM}\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$

$=|\overrightarrow{QM}|^2+\overrightarrow{QM}\cdot\vec{0}-|\overrightarrow{MB}|^2$

$=|\overrightarrow{QM}|^2-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=|\overrightarrow{QM}|^2-\frac{27}{4}$

이므로 $|\overrightarrow{QM}|^2=\frac{39}{4}$

선분 AC의 중점을 N이라 하면

$\overline{MN}=\overline{BC}=3$

$|\overrightarrow{QM}|^2=|\overrightarrow{QN}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2$

$=|\overrightarrow{QN}|^2+9$

$|\overrightarrow{QN}|^2=|\overrightarrow{QM}|^2-9=\frac{3}{4}$

$|\overrightarrow{QN}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AQ}=\overline{AC}-\overline{QC}$이므로

$|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{3}$ 또는 $|\overrightarrow{AQ}|=2\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{AQ}|=2\sqrt{3}$이면 ㉠에 의하여

점 P는 점 Q와 같으므로 주어진 조건을

만족시키지 않는다.

그러므로 $|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DP}=|\overrightarrow{AQ}|\times|\overrightarrow{DP}|\times\cos(\angle DPA)$

$=|\overrightarrow{AQ}|\times|\overrightarrow{AP}|$

$=\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6$

따라서 $k\times(\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DP})=\frac{5}{2}\times6=15$

[2023년 6월 (기하) 28번]

14. 좌표평면의 네 점 A$(2,6)$, B$(6,2)$, C$(4,4)$, D$(8,6)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 X의 집합을 S라 하자.

> (가) $\{(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{OC}\}\times\{|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC}|-3\}=0$
> (나) 두 벡터 $\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OC}$가 서로 평행하도록 하는 선분 AB 위의 점 P가 존재한다.

집합 S에 속하는 점 중에서 y좌표가 최대인 점을 Q, y좌표가 최소인 점을 R이라 할 때, $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}$의 값은? [4점]
(단, O는 원점이다.)

① 25 ② 26 ③ 27
④ 28 ⑤ 29

[정답] ⑤

조건 (가)에서 $(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{OC}=0$ 또는 $|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC}|=3$이므로

$$\overrightarrow{DX}\perp\overrightarrow{OC} \text{ 또는 } |\overrightarrow{CX}|=3$$

(i) $\overrightarrow{DX}\perp\overrightarrow{OC}$일 때,
직선 OC가 기울기가 1인 직선이므로 점 X의 자취는 점 D를 지나고 기울기가 -1인 직선이다.

$$\therefore\ y=-(x-8)+6,\ \text{즉 } y=-x+14$$

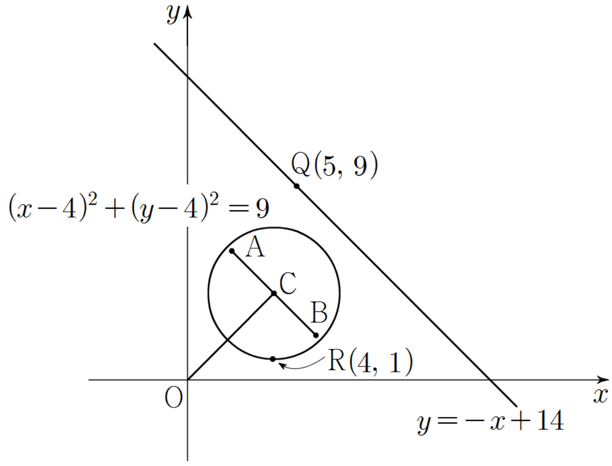
(ii) $|\overrightarrow{CX}|=3$일 때,
점 X의 자취는 점 C를 중심으로 하고 반지름이 3인 원이다.

$$\therefore\ (x-4)^2+(y-4)^2=9$$

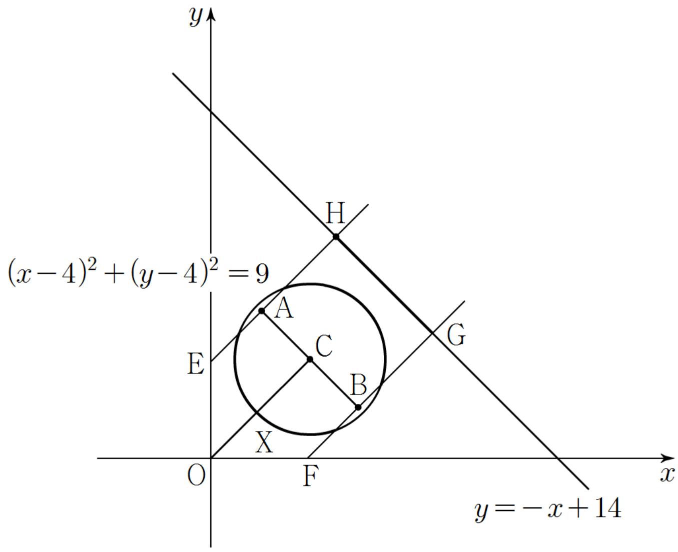
(i), (ii)에서 집합 S는

$$S=\{(x,y)\,|\,y=-x+14 \text{ 또는 } (x-4)^2+(y-4)^2=9\}$$

…… ㉠



조건 (나)에서 $\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PX}$이고 점 P는 선분 AB 위의 점이므로 점 X는 점 P를 지나고 기울기가 1인 선분 위의 점이다.
㉠에서 점 X가 될 수 있는 점들은 아래 그림에서 직선 EH와 직선 FG의 사이 부분에 존재한다.



그림에서 y좌표가 최대인 점 X는 점 H다.
점 Q는 $y=(x-2)+6=x+4$와 $y=-x+14$의 교점이므로

$$x+4=-x+14$$
$$x=5,\ y=9$$
$$\therefore\ \text{Q}(5,9)$$

원 $(x-4)^2+(y-4)^2=3^2$의 가장 y좌표가 작은 점인 $(4,1)$이 직선 FG보다 위에 존재하므로 이 점에서 y좌표가 최소다.

$$\therefore\ \text{R}(4,1)$$
$$\therefore\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=(5,9)\cdot(4,1)=20+9=29$$

[2023년 10월 (기하) 29번]

15. 좌표평면 위의 점 A(5, 0)에 대하여 제1사분면 위의
점 P가

$$|\overrightarrow{OP}|=2,\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

을 만족시키고, 제1사분면 위의 점 Q가

$$|\overrightarrow{AQ}|=1,\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 값을 구하시오.
[4점]
(단, O는 원점이다.)

[정답] 20

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$에서 $\overline{OP}\perp\overline{AP}$

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$에서 $\overline{OQ}\perp\overline{AQ}$

직각삼각형 OAP에서 $\overline{OA}=5$, $\overline{OP}=2$이므로

$\cos(\angle AOP)=\dfrac{2}{5}$

직각삼각형 OAQ에서 $\overline{OA}=5$, $\overline{AQ}=1$이므로

$\cos(\angle QAO)=\dfrac{1}{5}$

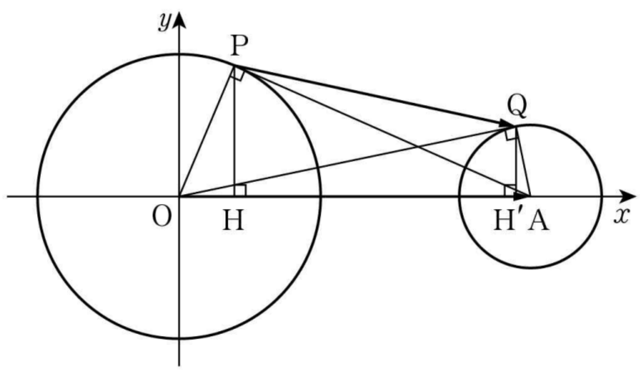
두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면

$\overline{OH}=\overline{OP}\times\cos(\angle AOP)=2\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{5}$

$\overline{H'A}=\overline{QA}\times\cos(\angle QAO)=1\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$

이므로 $\overline{HH'}=\overline{OH'}-\overline{OH}=\left(5-\dfrac{1}{5}\right)-\dfrac{4}{5}=4$

따라서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OA'}\times\overrightarrow{HH'}=5\times4=20$



기하

3. 공간도형

PART B

❄ 4점 ❄

공간좌표

[2023년 10월 (기하) 30번]

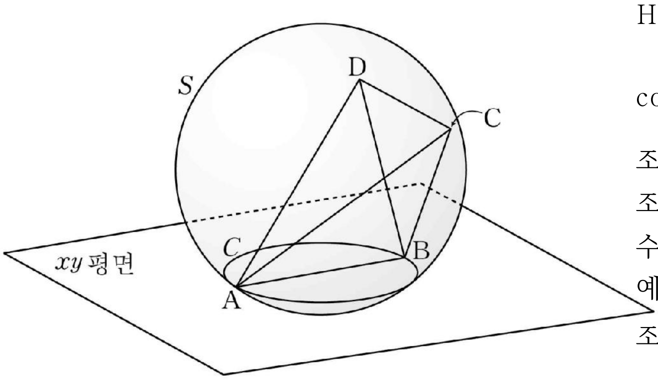
16. 좌표공간에 구

$$S : x^2 + y^2 + (z - \sqrt{5})^2 = 9$$

가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하자. 구 S 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 AB는 원 C의 지름이다.
(나) 직선 AB는 평면 BCD에 수직이다.
(다) $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{15}$

삼각형 ABC의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이를 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]



[정답] 15

구 S의 중심을 $\mathrm{E}(0, 0, \sqrt{5})$라 하면 점 E에서 xy평면에 내린 수선의 발은 원점 O이다.
점 O는 원 C의 중심이므로
$\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{\overline{\mathrm{EB}}^2 - \overline{\mathrm{OE}}^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$
따라서 원 C의 반지름의 길이는 2이다.
삼각형 BCD의 외접원을 C'이라 하고, 구의 중심 E에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 원 C'의 중심이다.
조건 (나)에 의하여 $\overline{\mathrm{EH}} = \overline{\mathrm{OB}} = 2$
직각삼각형 EBH에서
$\overline{\mathrm{HB}} = \sqrt{\overline{\mathrm{EB}}^2 - \overline{\mathrm{EH}}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$
이므로 원 C'의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.
선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{HM}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$이고
$\overline{\mathrm{HB}} = \sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BM}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$
$\cos(\angle \mathrm{HBM}) = \dfrac{\overline{\mathrm{BM}}}{\overline{\mathrm{HB}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\angle \mathrm{HBM} = 30^\circ$
조건 (다)에 의하여 $\angle \mathrm{CBD} = 2 \times \angle \mathrm{HBM} = 60^\circ$
조건 (나)에서 직선 AB가 평면 BCD에 수직이므로 평면 ABC와 평면 ABD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\theta = \angle \mathrm{CBD} = 60^\circ$
조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BC}} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$
삼각형 ABC의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는 $2\sqrt{15} \times \cos 60^\circ = \sqrt{15}$
따라서 $k^2 = 15$

기하

2. 평면벡터

PART C

❄ 4점 ❄

고난도

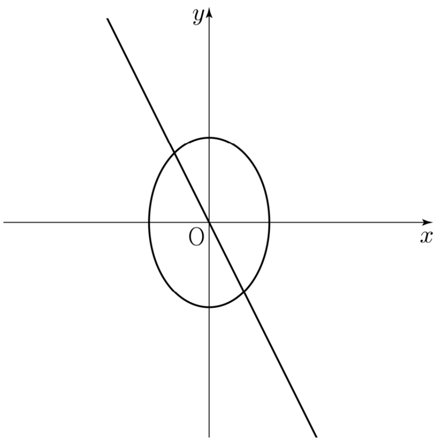
벡터와 이차곡선

[2023년 6월 (기하) 30번]

17. 직선 $2x+y=0$ 위를 움직이는 점 P와 타원 $2x^2+y^2=3$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여

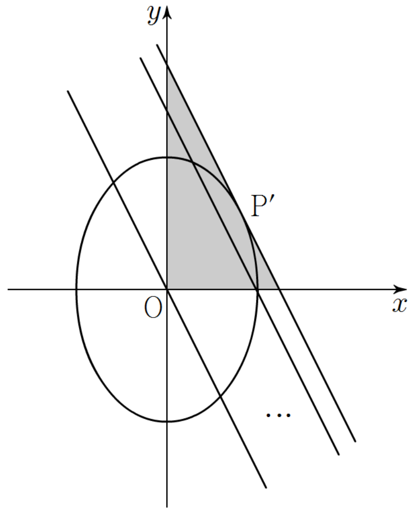
$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$

를 만족시키고, x좌표와 y좌표가 모두 0 이상인 모든 점 X가 나타내는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[정답] 13

점 P는 직선 $2x+y=0$ 위를 움직이고 점 Q는 원점을 중심으로 한 타원 $2x^2+y^2=3$ 위를 움직인다.
$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$는 점 P를 $2x+y=0$ 위를 움직이며 점 Q는 점 P를 타원의 중심 O를 점 P로 평행이동시키는 이동에 의해 타원 $2x^2+y^2=3$를 평행이동시킨 도형 위의 점이다
즉, 타원이 직선 $y=-2x$ 위의 점을 중심으로 평행이동한 도형을 모두 연결하면 점 X가 움직이는 영역이 된다.



이때 타원 $2x^2+y^2=3$의 접선 중 기울기가 -2이고 접점의 x좌표와 y좌표가 모두 0이상인 접선을 l, 그 때의 접점을 P′라 하면 구하는 영역의 넓이는 직선 l 및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.
접선 l의 방정식은

$$y=-2x\pm\sqrt{\frac{3}{2}\times 2^2+3}=-2x\pm 3$$

$x>0$, $y>0$인 부분에서 접선이 존재하므로

$$y=-2x+3$$

이때, x절편이 $\frac{3}{2}$이고 y절편이 3이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 3=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ p+q=4+9=13$$

내적의 활용

[2023년 9월 (기하) 30번]

18. 좌표평면에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 APQ는 정삼각형이고,
$9|\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ}=4|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB}$이다.
(나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}<0$
(다) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CB}=24$

선분 AQ 위의 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.
[4점]

[정답] 27

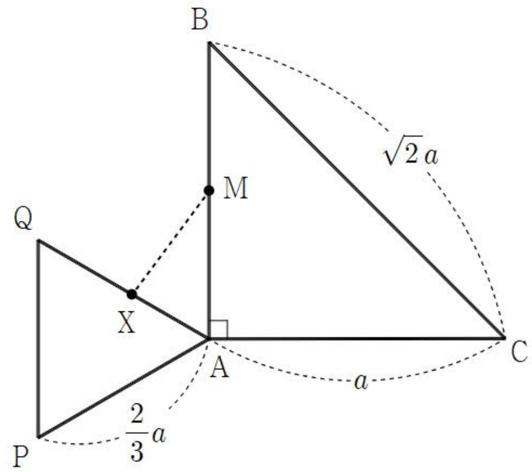
$\overline{AB}=\overline{AC}=a$라 하면 $\overline{BC}=\sqrt{2}a$가 된다.
조건 (가)에서 정삼각형 APQ의 한 변의 길이를 b라 하면

$$9b\overrightarrow{PQ}=4a\overrightarrow{AB} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$a>0$, $b>0$이므로 ㉠에서

$$9b|\overrightarrow{PQ}|=4a|\overrightarrow{AB}|,\qquad 9b^2=4a^2$$
$$3b=2a$$

그러므로 정삼각형 APQ의 한 변의 길이는 $\frac{2}{3}a$다.
또 ㉠에서 $\overrightarrow{PQ}$는 $\overrightarrow{AB}$와 방향이 같고 크기만 $\frac{2}{3}$배인 벡터이고, 조건 (나)에서 점 P, Q는 점 C와 반대쪽에 있으므로 아래와 같이 그릴 수 있다.



벡터 PQ와 벡터 CB의 사잇각은 벡터 AB와 벡터 CB의 사잇각과 같으므로 $\frac{\pi}{4}$다.
조건 (다)의 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CB}=24$에서

$$\frac{2}{3}a\times\sqrt{2}a\times\cos\frac{\pi}{4}=24,\qquad a^2=36$$

$\therefore\ a=6 \quad \cdots\cdots ㉡$

$|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|$에서 선분 AB의 중점을 점 M이라 하면

$$|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|=2|\overrightarrow{XM}|$$

그러므로 $|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|$의 최솟값은 $2|\overrightarrow{XM}|$의 최솟값과 같다.
점 X가 선분 AQ 위의 점이므로 위 그림에서

$$\angle QAB=\angle AQP=\frac{\pi}{3}\ (\because\ 엇각)$$

$$\therefore\ m=2|\overrightarrow{MX}|$$
$$=2\times\frac{1}{2}a\times\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{3}\ (\because\ ㉡)$$

$$\therefore\ m^2=(3\sqrt{3})^2=27$$

기하

3. 공간도형

PART C

※ 4점 ※

고난도

정사영

[2023년 7월 (기하) 30번]

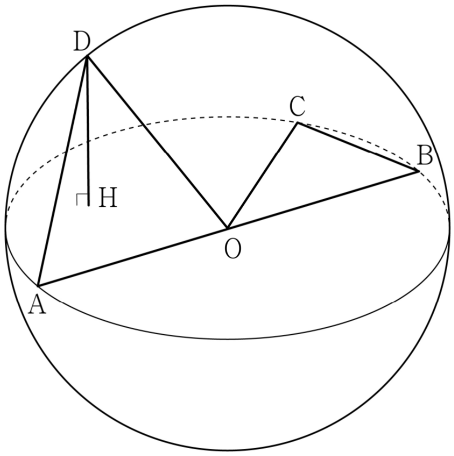
19. 공간에 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구가 있다. 구 위의 서로 다른 세 점 A, B, C가

$$\overline{AB}=8,\ \overline{BC}=2\sqrt{2}$$

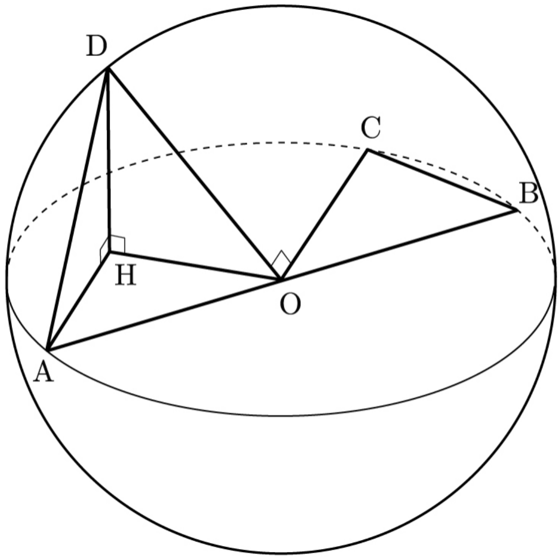
를 만족시킨다. 평면 ABC 위에 있지 않은 구 위의 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 OC, OD가 서로 수직이다. (나) 두 직선 AD, OH가 서로 수직이다.

삼각형 DAH의 평면 DOC 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, $8S$의 값을 구하시오. [4점] (단, 점 H는 점 O가 아니다.)



[정답] 27



조건 (가)에 의하여

$\overline{OC}\perp\overline{OD}$, $\overline{DH}\perp$ (평면 COH) 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OH}\perp\overline{OC}$

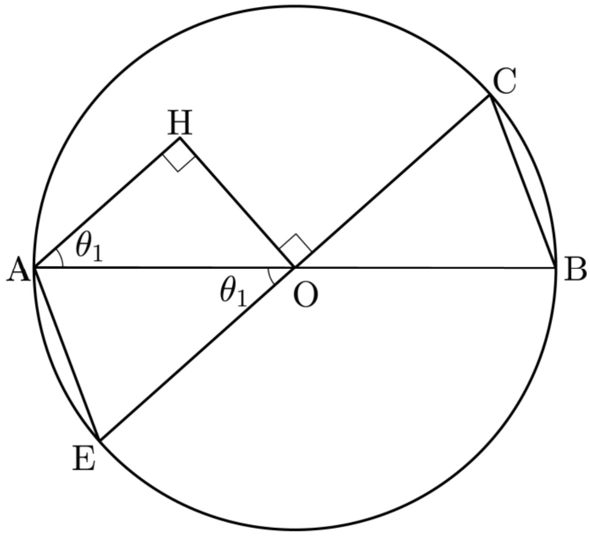
$\overline{DH}\perp$(평면 ABC) 이므로 $\overline{DH}\perp\overline{OH}$

조건 (나)에 의하여

$\overline{AD}\perp\overline{OH}$, $\overline{OH}\perp\overline{DH}$이므로

$\overline{OH}\perp$(평면 DAH)

그러므로 $\overline{OH}\perp\overline{AH}$



직선 OC와 구가 만나는 점 중 점 C가 아닌 점을 E라 하면 $\overline{AE}=\overline{BC}=2\sqrt{2}\angle AOE=\theta_1$이라 하면 $\angle OAH=\angle AOE=\theta_1$삼각형 OAE에서

$$\cos\theta_1=\frac{4^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times4\times4}=\frac{3}{4}$$

그러므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OA}}cos\,\theta_1=4\times\frac{3}{4}=3$

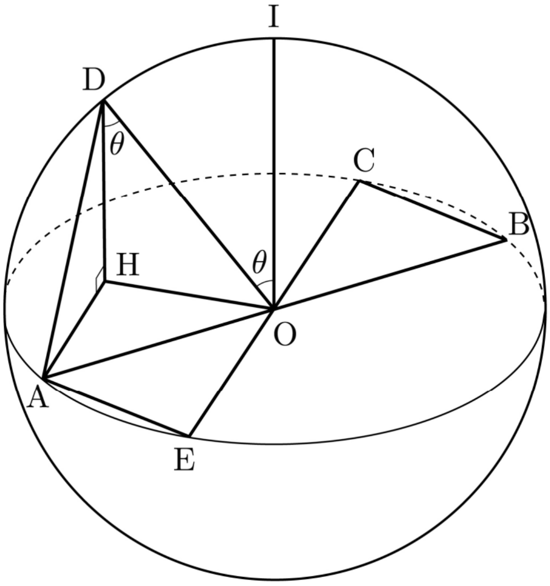
$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

삼각형 DHO에서

$\overline{\mathrm{DH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{16-7}=3$

삼각형 DAH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{DH}}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$



점 O를 지나고 평면 ABC에 수직인 직선과 구가 만나는 점 중 점 D에 가까운 점을 I라 하자.

$\overline{\mathrm{DH}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{OI}}$이므로 $\overline{\mathrm{DH}}\,/\!/$평면 IEC)

$\overline{\mathrm{AH}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{EC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}\,/\!/$(평면 IEC)

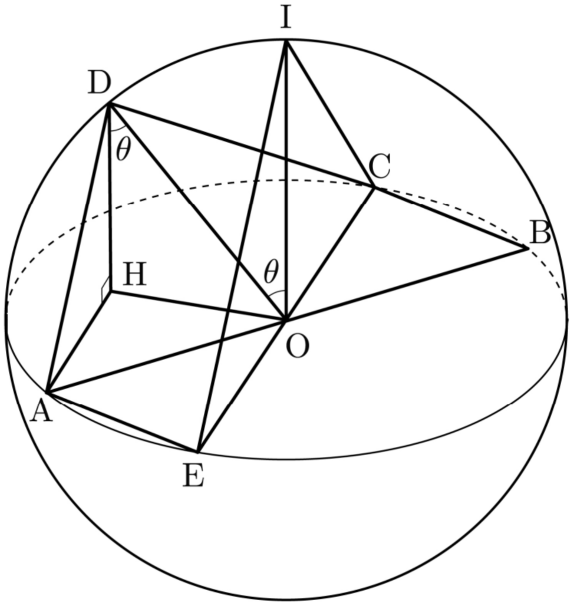
그러므로 두 직선 DH, AH를 포함하는

평면 DAH는 평면 IEC와 평행하다.

직선 CE는 두 평면 IEC, DOC의 교선이고

$\overline{\mathrm{CE}}\perp\overline{\mathrm{OI}}$, $\overline{\mathrm{CE}}\perp\overline{\mathrm{OD}}$이므로

두 평면 IEC, DOC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\angle\mathrm{DOI}=\theta$



$\angle\mathrm{ODH}=\angle\mathrm{DOI}=\theta$이므로

$\cos\theta=\cos(\angle\mathrm{ODH})=\frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{OD}}}=\frac{3}{4}$

삼각형 DAH의 넓이를 S_1이라 하면

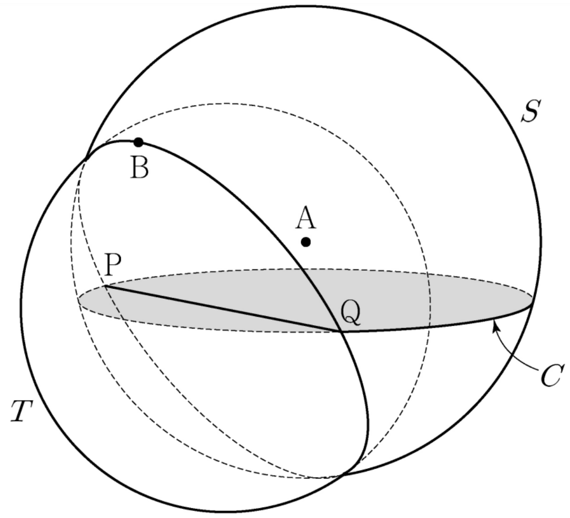
$S=S_1\times\cos\theta=\frac{9}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{8}$

따라서 $8S=27$

[2023년 9월 (기하) 28번]

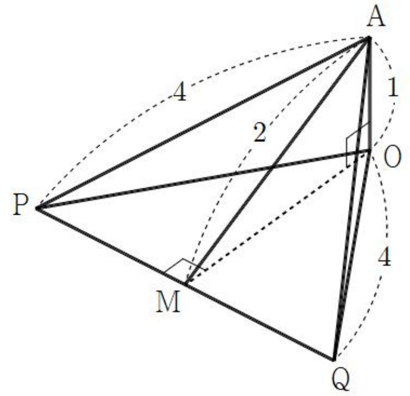
20. 좌표공간에 중심이 A$(0, 0, 1)$이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 있다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하고, 점 A에서 선분 PQ까지의 거리가 2가 되도록 원 C 위에 두 점 P, Q를 잡는다. 구 S가 선분 PQ를 지름으로 하는 구 T와 만나서 생기는 원 위에서 점 B가 움직일 때, 삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? [4점]
(단, 점 B의 z좌표는 양수이다.)

① 6　② $3\sqrt{6}$　③ $6\sqrt{2}$
④ $3\sqrt{10}$　⑤ $6\sqrt{3}$

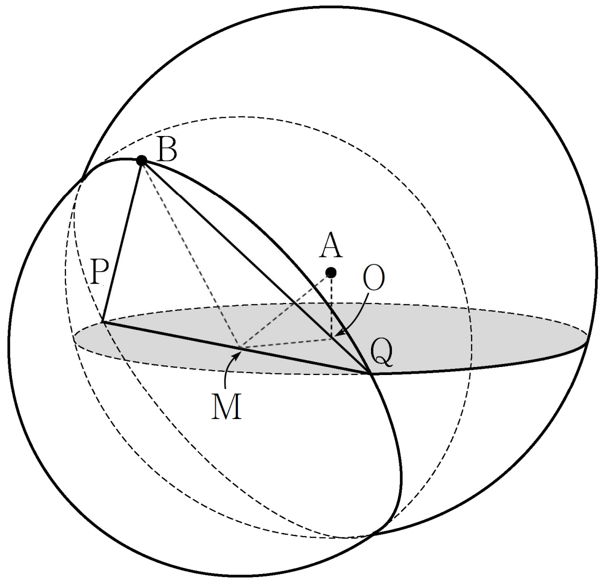


[정답] ①

구 S의 방정식은　$S: x^2+y^2+(z-1)^2=4^2$
구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원 C의 방정식은
$C: x^2+y^2=15$
A와의 관계를 그려 보면 아래와 같다.



선분 PQ의 중점을 점 M, 원 C의 중심을 O라 하면 위의 그림에서
$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$,
$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ …… ㉠
구 S와 구 T의 교선은 원을 이루고 그 지름이 선분 PQ이므로 점 M이 교원의 중심이다.



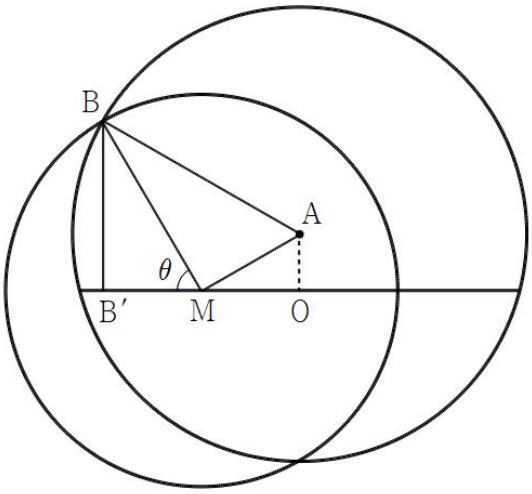
이때 삼각형 BPQ는 한 평면을 이루고 xy평면과 이루는 각을 θ라 하면, 삼각형 BPQ의 넓이가 최대일 때 그 정사영의 넓이가 최대가 된다.
삼각형 BPQ의 넓이가 최대이려면 점 B에서 직선 PQ에 이르는 거리가 최대여야 하므로 점 B는 선분 PQ의 수직이등분선 위에 있다. 즉, 밑변의 길이가 선분 PQ라면 삼각형의 높이는 선분 BM이 된다.

즉, 삼각형 BPQ의 밑변은 ㉠에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=4\sqrt{3}$이고

높이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{3}$이므로

$\triangle\mathrm{BPQ}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=12$ …… ㉡

세 점 A, O, B를 지나는 평면은 다음 그림과 같다.



그림에서 $\overline{\mathrm{BM}}=2\sqrt{3}$이고 $\overline{\mathrm{AM}}=2$, $\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로

삼각형 ABM은 $\angle\mathrm{AMB}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

그러므로 $\theta=\angle\mathrm{BMB}'=\angle\mathrm{MAO}$이고

$$\cos\theta=\cos\angle\mathrm{MAO}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 정사영의 최댓값은

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BPQ}\times\cos\theta&=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\\&=6\ (\because\ ㉡)\end{aligned}$$