만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

지수식의 사칙연산

1. $3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

㉮ $3^{(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})}$

$= 3^2$

$= \boxed{9}$

미분계수의 정의

2. 함수 $f(x)=2x^2-x$ 에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=4x-1$

㉮ $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $(\because f(1)=1)$

$= f'(1)$

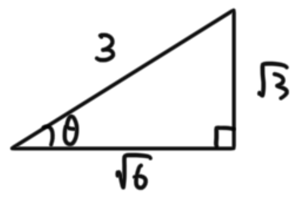
$= \boxed{3}$

범위에만 주의해서 부호 판별

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

θ를 예각으로 간주.



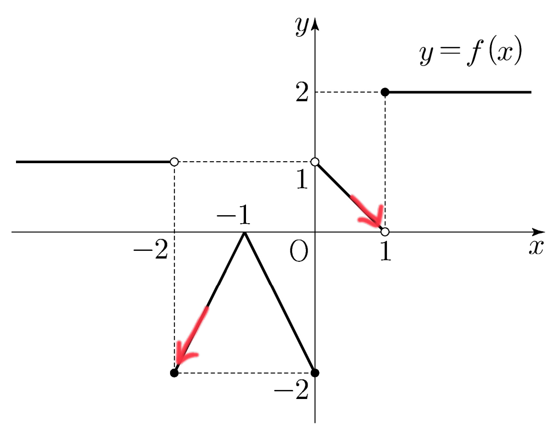
$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이므로 $\tan\theta < 0$

㉮ $\tan\theta = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

극한의 정의~

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -2+} f(x) + \lim_{x\to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

$-2 + 0 = \boxed{-2}$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

괜히 대칭성 쓰려고 하다간 더 귀찮아짐

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3 a_8}{a_6} = 12, \quad a_5 + a_7 = 36$$

일 때, a_{11}의 값은? [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96

그냥 헛짓거리 안하고 초항 a, 공비 r로 두고 계산하는게 빠르다.

$\Rightarrow \dfrac{ar^2 \cdot ar^7}{ar^5} = 12$ 이므로 $ar^4 = a_5 = 12$

$\therefore a_5 + a_7 = 36$ 에서 $a_7 = 24$이고,

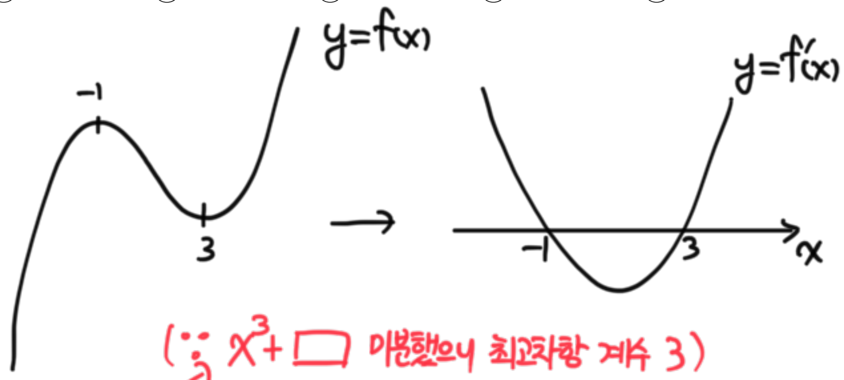
$a_5 \xrightarrow{\times 2} a_7 \xrightarrow{\times 2} a_9 \xrightarrow{\times 2} a_{11}$

$12 \quad 24 \quad 48 \quad \boxed{96}$

도함수를 적분해 원래함수를 만든다.

6. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$은 $x = -1$에서 극대이고, $x = 3$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12



$(\because x^3 + \square$ 미분했으니 최고차항 계수 3$)$

$\Rightarrow f'(x) = \boxed{3}(x+1)(x-3)$

$= 3x^2 - 6x - 9$

양변을 적분하면 $f(x)$의 상수항이 1이므로

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ 이다.

㉠ 극댓값: $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 1$

$= \boxed{6}$

로그의 계산: "밑통일" ⊕ 적절한 식 변환

7. 두 실수 a, b가

$$3a + 2b = \log_3 32, \quad ab = \log_9 2$$

를 만족시킬 때, $\dfrac{1}{3a} + \dfrac{1}{2b}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{25}{12}$

㉠ $\dfrac{1}{3a} + \dfrac{1}{2b} = \dfrac{3a+2b}{6ab} = \dfrac{\log_3 32}{6\log_9 2}$ 이다.

식을 정리하기 위해 밑통일은 필수!

$\dfrac{\log_3 32}{6\log_9 2} = \dfrac{\log_3 32}{3\log_3 2} = \dfrac{\log_3 32}{\log_3 2^3}$

밑변환 거꾸로 적용 $\left(\dfrac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a\right)$

$\Rightarrow \log_{2^3} 2^5 = \boxed{\dfrac{5}{3}}$

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

식에 자신의 상수값이 포함될 때?

8. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=6x^2-2f(1)x,\quad f(0)=4$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

어차피 $f(1)$은 상수이므로 C로 두면

$f'(x)=6x^2-2Cx$

양변을 적분하자.

$f(x)=2x^3-Cx^2+k$ (k는 적분상수)

이때 $f(0)=4$이므로 $k=4$이고

처음에 $f(1)=C$로 두었으므로 $f(1)=2-C+4=C$

$\therefore C=3$

㉠ $f(2)=16-12+4$
$=\boxed{8}$

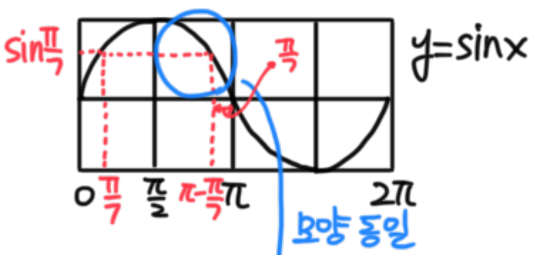
sin함수와 cos함수는 서로 모양이 동일하다.

9. $0\le x\le 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$$

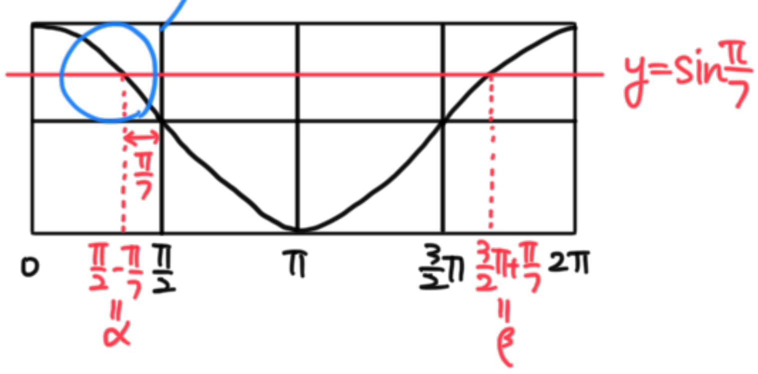
를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha\le x\le\beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$ ④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$



: $0<\sin\frac{\pi}{7}<1$

곧 $y=\cos x$ 그래프를 통해 확인하면



$y=\sin x$와 $y=\cos x$는 서로 x축 방향 평행이동한 관계라는 것 이용

㉠ $\beta-\alpha=\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{7}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)$
$=\boxed{\frac{9}{7}\pi}$

극점에서의 접선이라는 것 캐치필요!

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이 점 $(1, 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

"$y=f(x)$ 위의 점" $(2,3)$에서의 접선이 $(1,3)$에서 만난다

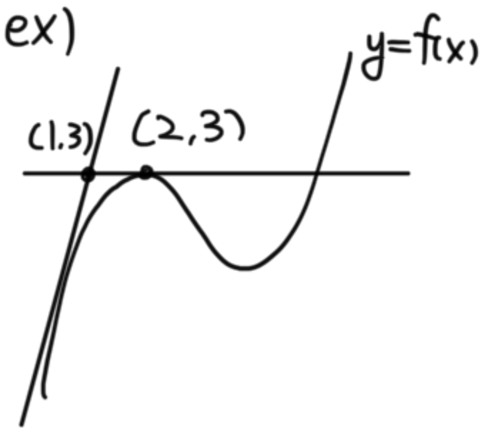
⇒ $f(2)=3$이고, 해당 접선은 $(1,3)$ 또한 "지나간다"

⇒ $(2,3)$과 $(1,3)$, y좌표가 같은 두 점을 지난다?

⇒ 해당 접선의 기울기는 0

⇒ 극점에서의 접선

ex)



곧 우리는 $f(x)$를 다음과 같이 둘 수 있다.

$f(x)=(x-2)^2(x-\alpha)+3$

이제 딱히 다른 조건이 없으니 그냥 $(-2, f(-2))$에서의 접선의 방정식을 구해보면

$f'(x)=2(x-2)(x-\alpha)+(x-2)^2$에서

$\begin{cases} f'(-2)=32+8\alpha \\ f(-2)=-16(2+\alpha)+3 \end{cases}$ 이므로

$y=8(\alpha+4)(x+2)-16(2+\alpha)+3$이고,

이 직선이 $(1,3)$을 지나므로 계산하면 $\alpha=-8$이다.

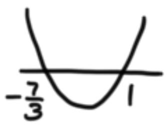
⇒ $f(x)=(x-2)^2(x+8)+3$

㉠ $f(0)=\boxed{35}$

순간 낮설수도 있음. 거리는 절댓값

11. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도는 각각

$(3t+7)(t-1)$



$$v_1(t)=3t^2+4t-7,\quad v_2(t)=2t+4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32

점 A와 B의 시작 위치가 다르다는 것에 주의!

속도를 적분하면 변위이므로 $V_1(t)$와 $V_2(t)$를 각각 부정적분해보면

A의 변위 : $t^3+2t^2-7t+C_1$ (C_1은 적분상수)
B의 변위 : t^2+4t+C_2 (C_2는 적분상수) 인데!

A와 B 각각의 $t=0$ 에서의 위치가 A(1), B(8) 이므로 이것이 적분상수.

∴ $t=0$일 때 각 점들의 위치
A(t^3+2t^2-7t+1)
B(t^2+4t+8)

여기서 원칙적으로는 두 점의 위치를 뺀 후, 절댓값을 씌워 계산해야 한다.
(∵ A와 B의 대소관계를 모르기 때문)
즉, $|(t^3+2t^2-7t+1)-(t^2+4t+8)| = 4$ 와 같이 구해야 한다.

하지만 이 문제의 경우 $t=0$일 때 B > A이고, 그 차이가 $8-1=7>4$.
곧, "처음으로" 두 점 사이의 거리가 4가 될 때는 $t=0$일 때와 마찬가지로 B > A일 것이다. (생각해보면 당연함)

∴ $t^2+4t+8 > t^3+2t^2-7t+1$

$\Rightarrow (t^2+4t+8)-(t^3+2t^2-7t+1)=4$
$\Rightarrow t^3+t^2-11t-3=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 1 & -11 & -3 \\ & & 3 & 12 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

∴ $(t-3)(t^2+4t+1)=0$

∴ $t=3$ ($t^2+4t+1=0$의 근은 모두 음수이므로 $t>0$에 모순)

⑦ $\int_0^3 |3t^2+4t-7|\,dt = \int_1^3 (3t^2+4t-7)\,dt - \int_0^1 (3t^2+4t-7)\,dt$
$= \boxed{32}$

※ 만약 절댓값을 안 씌우고 $(t^3+2t^2-7t+1)-(t^2+4t+8)=4$로 계산했다면
$(t-1)(t+\sqrt{11})(t-\sqrt{11})=0$으로 $t=\sqrt{11}$이 된다.
하지만 보다시피 $3<\sqrt{11}$이므로 "처음으로" 거리가 4가 될 때는 $t=3$이다.

역시 case 분류! 꼼꼼하게 확인하자.

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

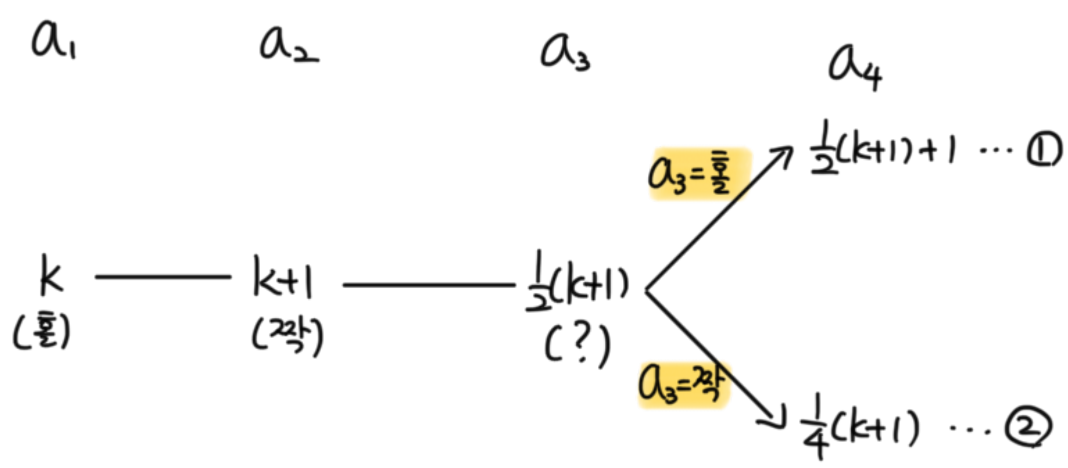
$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

결국 case 분류!

i) a_1 = 홀수
$a_1=k$로 두면
주어진 규칙에 의해 $a_2=k+1$이고, 여기서 k가 홀수이므로 $k+1$은 무조건 짝수.
$\Rightarrow a_2$가 짝수이므로 $a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}(k+1)$이고, 짝수를 반으로 나누면 홀/짝 모두 가능하므로 case 분류 필요.



①의 경우 $a_2+a_4=\frac{3}{2}k+\frac{5}{2}=40$ 이므로 $k=25$이고
$25 \to 26 \to 13 \to 14$ 이므로 주어진 조건 모두 성립.
40

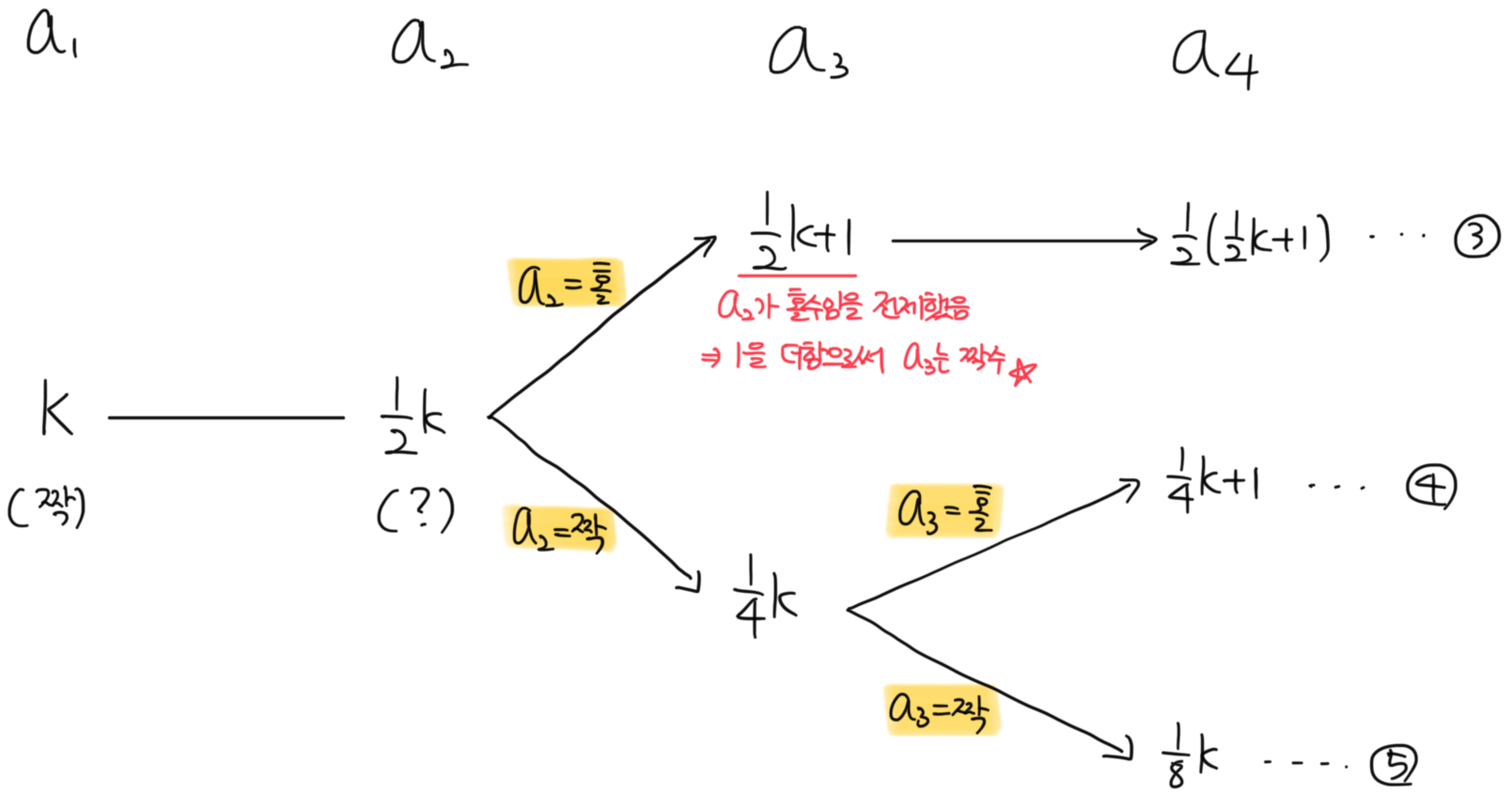
②의 경우 $a_2+a_4=\frac{5}{4}(k+1)=40$ 이므로 $k=31$이고
$31 \to 32 \to 16 \to 8$ 이므로 주어진 조건 모두 성립.
40

ii) a_1 = 짝수
마찬가지로 $a_1=k$로 두면
주어진 규칙에 의해 $a_2=\frac{1}{2}k$이고, 벌써부터 case 분류 필요.

다음 page

12번 이어서

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀



③의 경우 $a_2+a_4=\frac{3}{4}k+\frac{1}{2}=40$ 이므로 $k\neq$ 자연수. 모순!

④의 경우 $a_2+a_4=\frac{3}{4}k+1=40$ 이므로 $k=52$이고

$52\rightarrow\underbrace{26\rightarrow13\rightarrow14}_{40}$ 이므로 주어진 조건 모두 성립.

⑤의 경우 $a_2+a_4=\frac{5}{8}k=40$ 이므로 $k=64$이고

$64\rightarrow\underbrace{32\rightarrow16\rightarrow8}_{40}$ 이므로 주어진 조건 모두 성립.

∴ ㉮ k의 합 : $25+31+52+64$

$=\boxed{172}$

만든 놈 : plancoach_team
오르비 : Plan&Coach 팀

고1수학의 중요성. 축의 위치 고려 필수!!!

13. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$ ④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}+3\sqrt{2}$

결국 함수의 증가/감소에 대한 조건은 보통 도함수로 판별.

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x<0) \\ h(x) & (x\ge 0)\end{cases}$$ 으로 두자.

$(-\infty,-1]$ 에서 감소한다

⇒ $(-\infty,-1]$ 은 모두 $g(x)$가 정의된 구간이다.

⇒ $g'(x)$는 $(-\infty,-1]$에서 $g'(x)\le 0$을 만족한다.

그에 반해 $[-1,\infty)$ 에서 증가하므로 구간을 $\left\langle \begin{matrix} -1\sim 0 \\ 0\sim\infty \end{matrix}\right.$ 로 쪼개면

$$\begin{cases} [-1,0] \text{ 에서 } g'(x)\ge 0 \\ [0,\infty) \text{ 에서 } h'(x)\ge 0 \end{cases}$$ 이다.

즉, $x=-1$에서 $g'(x)$의 부호가 변화하므로 $g'(-1)=0$이다.

⇒ $g'(x)=-x^2-2ax-b$
$=-(x+a)^2+a^2-b$ 에서 $g'(-1)=-1+2a-b=0$

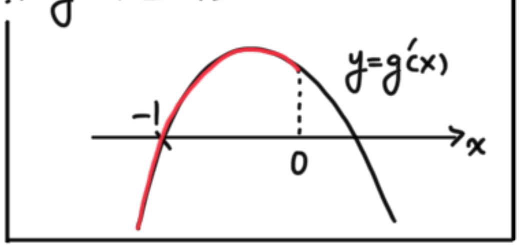
∴ $2a-b=1$

또한, $[-1,0]$에서 $g'(x)\ge 0$ 이므로 $g'(0)\ge 0$ 이다.

∴ $-b\ge 0$ 에서 $b\le 0$인데 $2a-1=b\le 0$ 이므로

$a\le \frac{1}{2}$도 알 수 있다.

※ $g'(x)$ 그래프



다음 page

조건 해석을 얼마나 잘하는지에 따라 난이도 천차만별일 듯

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

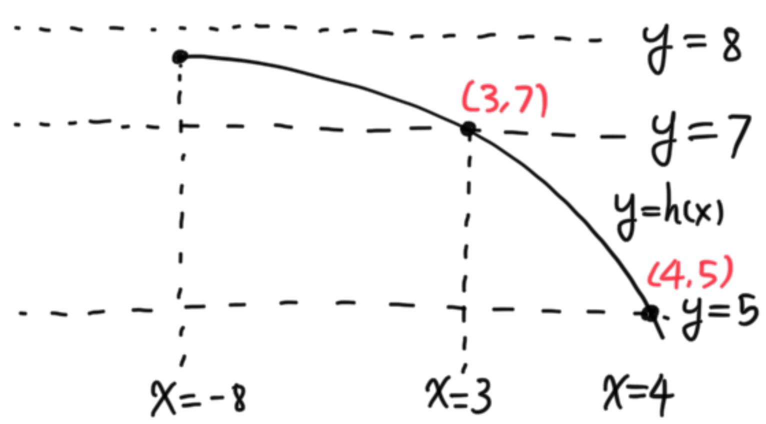
집합 $\{f(x)\,\vert\,x\le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3\le k<4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\le -8) \\ h(x) & (x>-8)\end{cases}$$ 으로 두자.

당연히 미지수 폭탄인 $g(x)$보다는 $h(x)$ 가지고 생각해보자.

$h(x)$를 관찰해보면 $g(x)$과의 경계지점 $(x=-8)$에서의 함숫값은 $8-3^{-11}<8$ 이고, $(3,7)$, $(4,5)$를 지나는 감소함수이다.



이제 조건을 해석해보자.

조건에서의 "$3\le k<4$"를 특히 잘 해석해야 하는데,

일단 이 범위는 모두 $y=h(x)$가 정의된 범위라는 것을 염두에 두자.

① $k=4$가 포함되지 않는다 : $k=4$면 안되는 이유가 존재한다!

⇒ $h(x)$가 $(4,5)$를 포함하면 안된다.

② $k=2.999\cdots$ 에서는 조건이 성립하지 않는다.

③ $k=3$이 포함된다 : $k=3$이 꼭 필요하다.

⇒ $h(x)$가 $(3,7)$을 포함해야 조건을 만족한다.

다음 page

13번 이어서

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

여기에서, 구하는 값은 $a+b$의 최댓값, 최솟값이므로 $a+(2a-1)=3a-1$

즉, a가 최대일때 M, 최소일때 m이다.

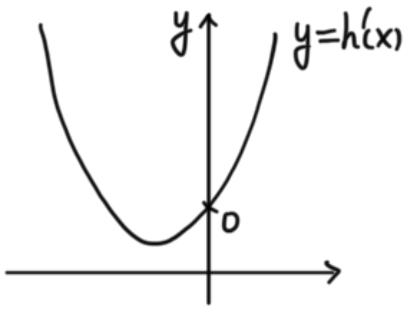
이제 $h'(x)$를 관찰해보자.

$g'(x)$의 경우에는 조건을 통해 $x=-1$ 주변에서의 함수의 개형이 비교적 잘 드러나있지만, $h'(x)$는 그렇지 않다.

⇒ 축의 위치에 대한 판별도 필요하다.

i) $h'(x)=(x+a)^2-a^2-b$ 에서 축이 $[0,\infty)$ 에 포함되지 않을 때

⇒ $-a\le 0$ 일 때 $(a\ge 0)$



과 같이 $[0,\infty)$에서의 $h'(x)$의 최솟값은 $h'(0)$이므로

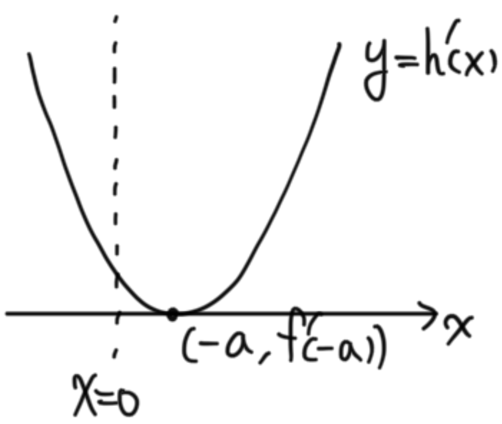
$h'(0)\ge 0$이면 충분하다.

∴ $-b\ge 0$ 이므로 앞서 구한 $b\le 0$을 그대로 얻는다. ⇒ $a\le\frac{1}{2}$

⇒ $a\ge 0$ 과의 공통범위를 구하면 $0\le a\le\frac{1}{2}$

ii) $h'(x)$의 축이 $[0,\infty)$에 포함될 때

⇒ $-a>0$ 일때 $(a<0)$



과 같이 $[0,\infty)$에서의 $h'(x)$의 최솟값은 $h'(-a)$이므로

$h'(-a)\ge 0$이면 충분하다.

∴ $-a^2-b\ge 0$ 이므로 $-a^2-(2a-1)\ge 0$ 이고, 즉 $a^2+2a-1\le 0$ 이다.

⇒ $-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$ 이므로 $a<0$ 과의 공통범위를 구하면 $-1-\sqrt{2}\le a<0$

따라서 i)과 ii)를 종합하면 $-1-\sqrt{2}\le a\le\frac{1}{2}$ 이다.

∴ $M=3\times\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}$

$m=3\times(-1-\sqrt{2})-1=-4-3\sqrt{2}$

⑦ $M-m=\boxed{\frac{9}{2}+3\sqrt{2}}$

14번 이어서 ··· ①

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

이 말을 다르게 해석해보면

① $h(x)$가 $(4,5)$를 포함하면 안 된다

만약 $g(x)=5$를 만족시키는 근이 존재한다면, 이미 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소에 $f(x)=5$가 포함되어 있던 상태이다. 즉, $h(x)=5$를 추가로 만족시킨다고 해서 근의 개수가 새롭게 증가하지 않는다.

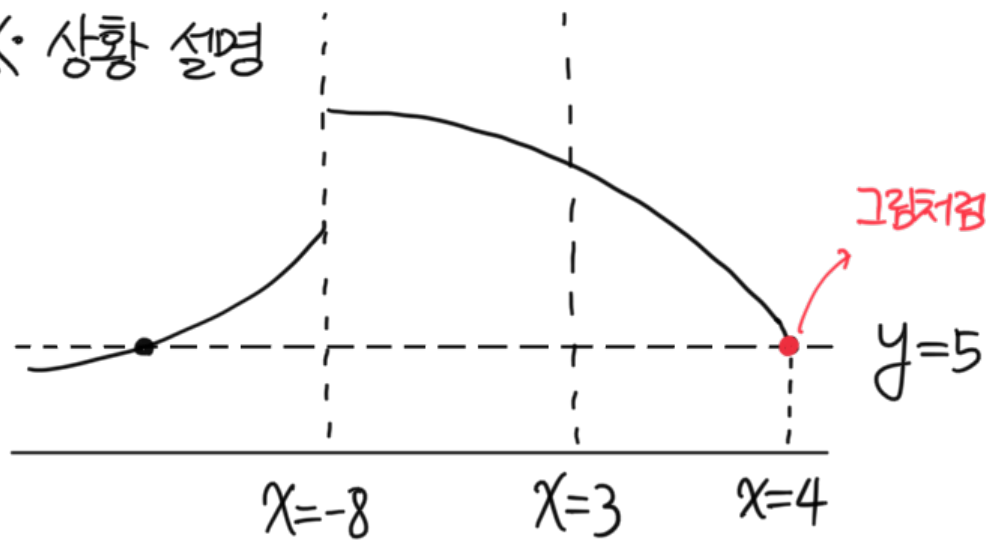
⇒ 범위에 굳이 $k=4$가 포함되면 안될 이유 X

∴ $f(x)=5$를 만족시키는 근은 $g(x)$, $h(x)$ 모두에서 존재해서는 안 된다.

따라서 $g(x)$은 증가함수이므로 점근선의 y좌표$(=b)$가 5보다 크거나 같아야 한다.

(∵ $b<5$ 이면 $g(x)=5$를 만족하는 근 한 개 존재)

※ 상황 설명



그림처럼 $g(x)=5$를 만족하는 경우가 있다면 $(4,5)$가 포함되든 말든 원소 개수 변하지 않음.

⇒ $\underset{k\to 4-}{\lim} k$ 인 경우와 $k=4$인 경우의 원소개수 동일

⇒ $3 \le k \le 4$과 같은 형태였어야...

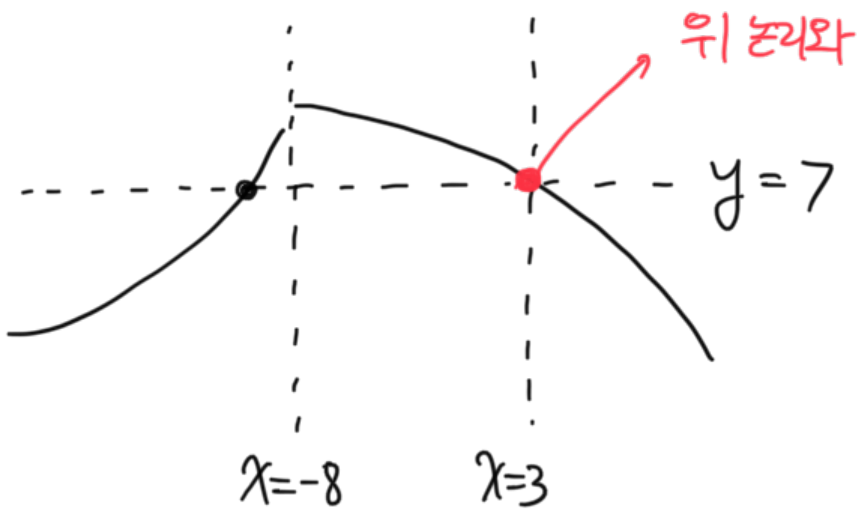
②, ③ $k=2.999\cdots$ 에서는 조건을 만족하지 않지만, $h(x)$가 $(3,7)$을 포함하는 순간 조건 만족

$f(x)=7$을 만족하는 근이 $g(x)$가 아닌 $h(x)$에서만 발생해야 한다.

만약 $g(x)=7$을 만족시키는 근이 있다고 하면 이미 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소에 $f(x)=7$이 포함되어 있던 상태이므로 $h(x)=7$을 추가로 만족한다고 해서 근의 개수가 새롭게 증가하지 않는다.

⇒ 이럴 경우 $k=2.999\cdots$ 에서도 조건을 만족하므로 $g(x)=7$을 만족하는 근은 존재 X

※ 상황 설명



위 논리와 비슷.

다음 page

∴ ①, ②, ③을 종합하면 $5<g(x)<7$ 이다.

14번 이어서 … ②

만든놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

곧, $k=3$ 일때 $\{f(x) \mid x \le 3\}$의 원소 중 $h(x)$에서 발생하는 원소는 $f(x)=7$ 하나뿐이므로 $g(x)=6$을 만족시키는 근이 존재해야 $k=3$일 때도 $f(x)=6, 7$로 두 개의 정수인 원소를 가질 수 있다.

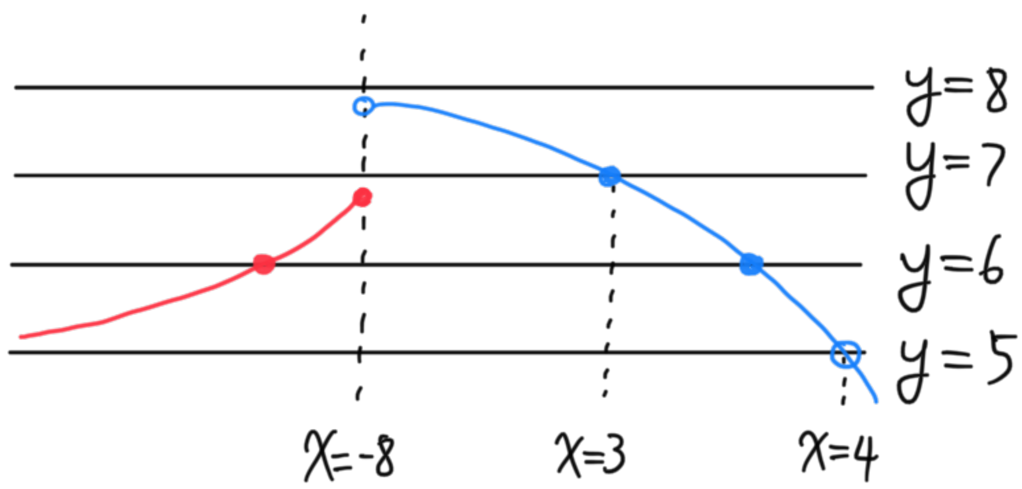
$\therefore 6 \le g(x) < 7$

즉 상황을 정리하면

① $y=g(x)$는 $y=6$하고만 교점이 발생하며

② 주어진 구간 $3 \le k < 4$에서 $h(x)$는 $y=7$과는 교점이 무조건 발생하고

③ $y=6$과는 교점이 발생할 수도 있고 안할수도 있지만 어쨌든 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 정수인 원소는 $f(x)=6, 7$



따라서 자연수 a, b에서 $b=5$이고, ($\because b=6$ 이면 $y=g(x)$는 $y=6$과 교점 발생 ×)
$g(-8)=2^{a-8}+5$ 에서 $6 \le 2^{a-8} < 7$ 이다.

$\therefore 8 \le a < 9$ 이므로 자연수 $a=8$

㉮ $a+b=8+5$
$=\boxed{13}$

만든놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

옛날에 문과 같이로 많이 나왔던 인수정리 문제. 하지만 쉽다.

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ 3 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

결국 문제 조건 $\lim_{x\to3} g(x)=g(3)-1$은 "$x=3$ 주변에서의 $g(x)$ 변화"

⇒ $g(3)$을 기준으로 보자.

⇒ $g(x)$는 $f(x)$에 의해 정의되므로 자연스레 $f(x)$에 대한 논의로 이어짐

i) $f(3)\neq 0$일 경우

$g(3)=\dfrac{f(6)\{f(3)+1\}}{f(3)}$ 이고, $f(x)$가 다항함수이고 분모 $\neq 0$ 이므로

$g(x)$ 또한 $x=3$에서 연속이다. ∴ $\lim_{x\to3} g(x)=g(3)$ 이므로 모순.

ii) $f(3)=0$일 경우

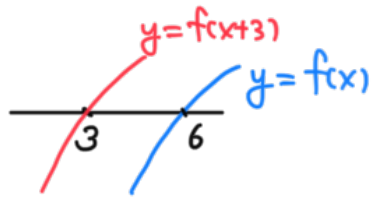
$f(x)=(x-3)(\qquad)$ 꼴이다.

이 경우 $g(3)=3$ 이므로 $\lim_{x\to3} g(3)=2$ 이다.

곧 $\lim_{x\to3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$ 인데, 분모 $=0$일 때 수렴하므로 분자 $=0$

다시 case 분류!

ii)-① $f(x+3)$이 $x-3$을 인수로 갖는 경우



∴ $f(x)$는 $x-6$을 인수로 갖는다.

⇒ $f(x)=(x-3)(x-6)(x-\alpha)$로 둘 수 있다.

곧 $\lim_{x\to3} g(x)=\lim_{x\to3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=\lim_{x\to3}\dfrac{x(x-3)(x-\alpha)\{(x-3)(x-6)(x-\alpha)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-\alpha)}$

이 식을 정리하면 $\dfrac{6-\alpha}{\alpha-3}=2$ 이므로 $\alpha=4$이다.

∴ $f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$이고, 이 경우

㉠ $g(5)=\dfrac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$ 이므로 $g(5)=\boxed{20}$

ii)-② $f(x)+1$이 $x-3$을 인수로 갖는 경우

이 경우 $f(x)+1=(x-3)(\qquad)+1$ 이므로 새로 더해진 1은 $x-3$으로 묶이지 수 없다. ⇒ $x-3$을 인수로 가질 수 없다. ∴ 모순

단답형

항상 나오는 로그방정식

16. 방정식 $\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

진수조건 check!

① $x-1>0 \to x>1$
② $13+2x>0 \to x>-\frac{13}{2}$
} 공통범위 $x>1$

밑이 다르므로 밑 통일

$\log_{2^2}(x-1)^2=\log_4(13+2x)$

⇒ $x^2-2x+1=13+2x$

⇒ $x^2-4x-12=0$

⇒ $(x-6)(x+2)=0$ 이므로

㉠ $x=\boxed{6}$ (∵ $x>1$)

Σ의 사칙연산

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=34,\quad \sum_{k=1}^{10}a_k=10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=\underbrace{2\sum_{k=1}^{10}a_k}_{20}-\underbrace{\sum_{k=1}^{10}b_k}_{-14}=34$

㉠ $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=20-(-14)$

$=\boxed{34}$

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

곱의 미분적용

18. 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에 대하여 $f'(1)=32$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$

$\Rightarrow f'(1)=2(a+4)+2(2+a)$

$=4a+12$

$=32$

$\therefore$ ㉮ $a=\boxed{5}$

지겹도록 나온 문제 유형. 확실히 공식 알면 편하긴 하다.

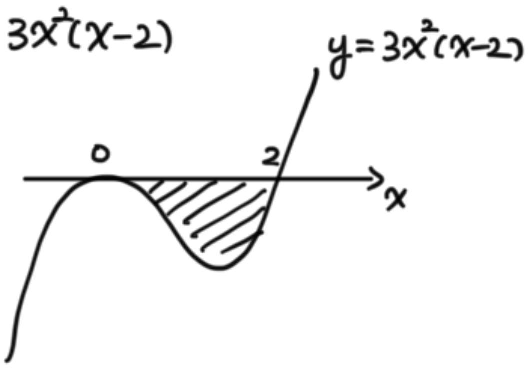
19. 두 곡선 $y=3x^3-7x^2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

차의 함수로 계산하자!

$\Rightarrow (3x^3-7x^2)-(-x^2)$

$\Rightarrow 3x^3-6x^2$

$\Rightarrow 3x^2(x-2)$



sol₁) 그냥 적분

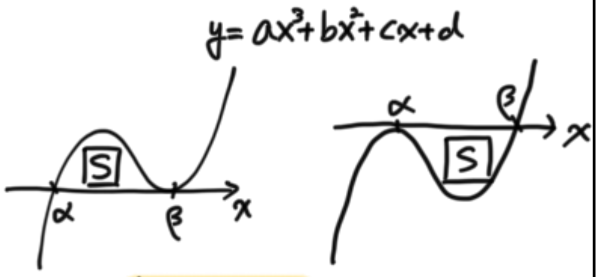
㉮ 넓이: $\left|\int_0^2 3x^2(x-2)dx\right|$

$\Rightarrow \left|\int_0^2 (3x^3-6x^2)dx\right|$

$\Rightarrow \left|\left[\frac{3}{4}x^4-2x^3\right]_0^2\right|$

$=\boxed{4}$

sol₂) 삼차함수 넓이공식



$\Rightarrow$ 넓이: $\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$

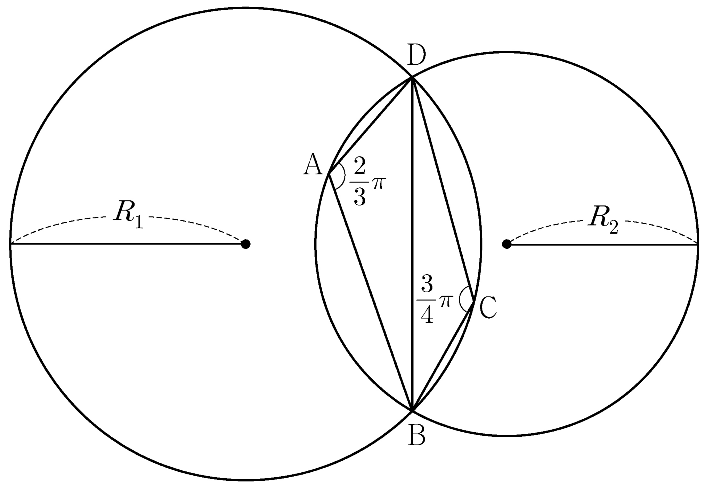
대입하면 $\frac{3}{12}(2-0)^4=\boxed{4}$

20번?????? 7번 아니고?

20. 그림과 같이

$$\overline{AB}=2,\ \overline{AD}=1,\ \angle DAB=\frac{2}{3}\pi,\ \angle BCD=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1\times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
>
> $R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$
>
> 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
>
> $R_2=\boxed{(가)}\times\overline{BD}$
>
> 이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
>
> $\overline{BD}^2=2^2+1^2-(\boxed{(나)})$
>
> 이므로
>
> $R_1\times R_2=\boxed{(다)}$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

i) △BCD에 sin Law를 적용하면

$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=2R_1 \rightarrow R_1=\frac{\overline{BD}}{2\sin\frac{3}{4}\pi}$ $\therefore$ $\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BD}$

ii) △ABD에 sin Law를 적용하면

$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2 \rightarrow R_2=\frac{\overline{BD}}{2\sin\frac{2}{3}\pi}$ $\therefore$ $\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $R_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BD}$

$\therefore p=\frac{\sqrt{3}}{3}$

문제에서 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=1$, $\angle DAB=\frac{2}{3}\pi$이므로 △ABD에 cos Law를 적용.

$\Rightarrow \overline{BD}^2=2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cos\frac{2}{3}\pi$ $\therefore q=4\cos\frac{2}{3}\pi=(-2)$

$\therefore \overline{BD}^2=7$

따라서 $R_1\times R_2=\frac{\sqrt{6}}{6}\overline{BD}^2=\frac{7\sqrt{6}}{6}$ $\therefore r=\frac{7\sqrt{6}}{6}$

㉮ $9\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-2)\times\frac{7\sqrt{6}}{6}\right)^2=\boxed{98}$

※ 등차수열의 합 공식은 $S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(\frac{2a-d}{2}\right)n$
곧 pn^2+qn 과 계수비교하면 $p=\frac{d}{2}$ 이므로 $2p=d$ 이다.

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

"등차수열의 합의 일반항"

21. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

등차수열의 합 S_n은 상수항이 0인 이차식으로 쓸 수 있다.

→ $S_n = pn^2+qn$ 으로 두면 $\begin{cases} a_1 = S_1 = p+q, \\ \{a_n\}\text{의 공차 } d=2p \end{cases}$ 이다.

곧 $\sum_{k=1}^{7} S_k = \sum_{k=1}^{7}(pk^2+qk)$
$= \frac{7\times8\times15}{6}p + \frac{7\times8}{2}q$
$= 644$

여기서 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 $a_1 = p+q > 0$, $d = 2p > 0$

∴ $5p+q=23$

이때 a_7가 13의 배수이므로
$a_7 = a_1 + 6d = (p+q)+12p = 13k$ (k는 자연수) 꼴이다.
∴ $6d = 12p$

∴ $13p+q = 13k$ (k는 자연수) 꼴에서 q도 13의 배수.

⇒ $q=13$이고, 이 경우 $5p+q=23$에서 $p=2$

㉠ $a_2 = a_1 + d$
$= (p+q)+2p$
$= 3p+q$
$= \boxed{19}$

이게 22번 ㅋㅋㅋㅋㅋ 계수비교가 너무 좋아야...

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)\,dt = xf(x) - 2x^2 - 1$
(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)$, $g(x)$는 모두 다항함수 → $F(x)$, $G(x)$도 다항함수

(가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$ 과 같은 식을 해석할 때에는

이 식이 항등식이라는 것을 염두에 두고 양변에 일정한 상수를 대입하고, 미분해도 식이 그대로 성립한다는 것을 이용해야 한다.

i) $x=1$ 대입
$0 = f(1) - 3$ ∴ $f(1) = 3$

ii) 양변 미분
$f(x) = f(x) + xf'(x) - 4x$
∴ $xf'(x) = 4x$ 이므로 $f'(x) = 4$ ($x \neq 0$)
사소해보이지만 신경쓰자!
하지만 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체에서 미분가능하고, $f'(x)$ 또한 연속이다.
∴ $f'(x) = 4$ 이므로 $f(x) = 4x + C$ (C는 적분상수)

이제 i)과 ii)를 연립하면 $f(x) = 4x - 1$ 이다.

→ $F(x) = 2x^2 - x + C_1$ (C_1은 적분상수)로 둘 수 있다.

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$
좌변이 어디서 많이 봤던 모양... 곱의 미분!
→ $(F(x)G(x))' = 8x^3 + 3x^2 + 1$
양변을 적분하면
$F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C_2$ (C_2는 적분상수)로 둘 수 있다.

곧 최고차항의 계수와 차수를 비교해보면
$F(x)$가 $2x^2 + \square$ 이고 $F(x)G(x)$가 $2x^4 + \square$ 이므로
$G(x)$는 $x^2 + \square$ 꼴임을 알 수 있다.

다음 page

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

22번 이어서

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

$G(x)$는 x^2+px+q 꼴이니 계수비교를 하면

$$F(x)G(x)=(2x^2-x+C_1)(x^2+px+q)$$
$$=2x^4+x^3+x+C_2$$

여기서 식을 싸그리 전개해서 답을 구해도 되지만 구하는 것이 $\int_1^3 g(x)dx$,

즉 $G(3)-G(1)$ 이므로 $G(x)=x^2+px+q$ 에서

$\left.\begin{aligned} G(3)&=3p+q+9 \\ G(1)&=p+q+1 \end{aligned}\right)$ $G(3)-G(1)=2p+8$ 이고, 곧 p만 구하면 된다.

⇒ 삼차항 계수비교로부터 $(2p-1)x^3=x^3$ 이므로 $p=1$이다.

㉮ $G(3)-G(1)=8+2$
$=\boxed{10}$

(※ 싹 다 전개해서 계수비교하면
$p=1$, $q=0$, $C_1=1$, $C_2=0$ 임을 알 수 있다.)

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

이항분포에서의 평균

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{5}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

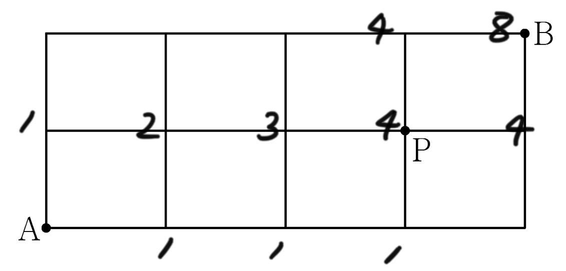
㉮ $E(X) = 30 \times \frac{1}{5}$

$= \boxed{6}$

같포순? 경우의수의 덧셈?

24. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 거쳐 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? [3점]

sol 1)



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

sol 2) 같·포·순

i) A ⟶ P 가는 경우의 수

→ → → ↑ 배열

⇒ $\frac{4!}{3!} = 4$

ii) P ⟶ Q 가는 경우의 수

→ ↑ 배열

⇒ 2가지

㉮ $4 \times 2 = \boxed{8}$

만든놈: plancoach_team
오그비: Plan&Coach 팀

꼭 벤다이어그램을 A와 B에 대해서만 그릴 필요는 X

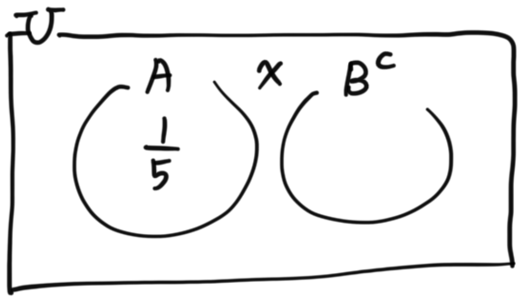
25. 두 사건 A, B에 대하여 A와 B^C은 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5},\quad \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C\cap B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

벤 다이어그램을 그려보자.



⇒ $A\subset B$임을 알 수 있다.

$P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{5}$

$P(A)+P(B)$는 $P(A^c\cap(B^c)^c)=x$로 두었을 때

$P(A)=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{1}{5}+x$ 이므로

$P(A)+P(B)=\frac{2}{5}+x=\frac{7}{10}$

$\therefore x=\frac{3}{10}$

㉠ $P(A^c\cap B)=x$
$=\boxed{\frac{3}{10}}$

통계 기초 문제. 정규화!

26. 어느 고등학교의 수학 시험에 응시한 수험생의 시험 점수는 평균이 68점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수학 시험에 응시한 수험생 중 임의로 선택한 수험생 한 명의 시험 점수가 55점 이상이고 78점 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.1	0.3643
1.2	0.3849
1.3	0.4032

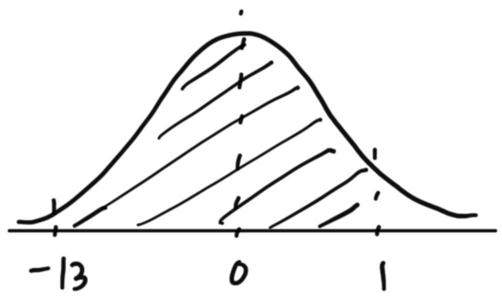
① 0.7262 ② 0.7445 ③ 0.7492 ④ 0.7675 ⑤ 0.7881

수험생의 시험 점수를 확률변수 X로 두면
X는 정규분포 $N(68, 10^2)$를 따른다.

㉠ $P(55\le X\le 78)$

⇒ $P\left(\frac{55-68}{10}\le Z\le\frac{78-68}{10}\right)$ (정규화)

⇒ $P(-1.3\le Z\le 1)$



$\therefore P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 1.3)$
$=0.3413+0.4032$
$=\boxed{0.7445}$

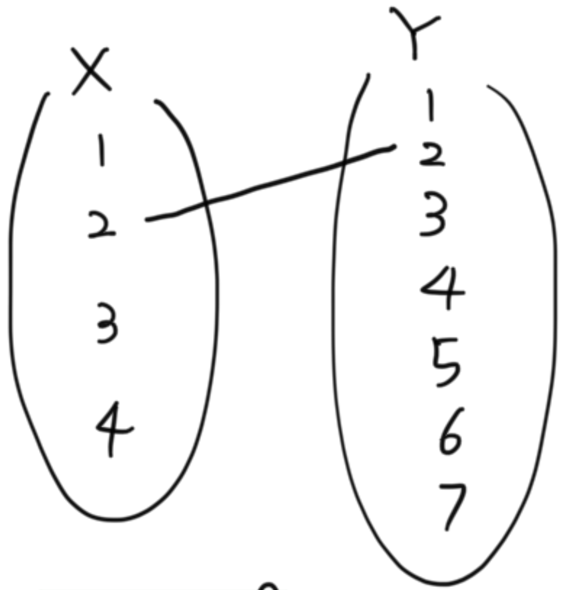
만든놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

여사건~ '적어도'라는 표현이 대놓고 안 나와도 능동히 쓸 수 있어야 함

27. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 일대일함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

> (가) $f(2)=2$
>
> (나) $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$는 4의 배수이다.

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{9}{70}$



조건부확률!

$$\frac{\text{조건만족 } f \text{ 개수}}{\text{일대일함수 } f \text{ 개수}}$$

i) 일대일함수 f의 개수

⇒ 치역의 원소 7개 중 4개를 순서를 고려해 정의역에 배치하는 것이므로 ${}_7P_4$

ii) 조건 만족 f의 개수

$f(2)=2$로 고정.

$f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$가 4의 배수? 경우의 수 많음

그렇다면? 여사건!

곱이 4의 배수라는 것은 4가 2^2이므로 소인수 2가 2개 존재하는데, 이미 $f(2)=2$이므로 $f(1), f(3), f(4)$ 중 적어도 1개에 소인수 2가 1개만 있으면 된다.

하지만 여사건이라면? $f(1), f(3), f(4)$ 모두가 홀수면 된다.

전체: $f(1), f(3), f(4)$를 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 배열하는 경우

⇒ ${}_6P_3$

여사건: $f(1), f(3), f(4)$를 $\{1, 3, 5, 7\}$에 배열 ⇒ ${}_4P_3$

곧 ㉠ $\frac{{}_6P_3-{}_4P_3}{{}_7P_4} = \frac{120-24}{7\times6\times5\times4} = \boxed{\frac{4}{35}}$

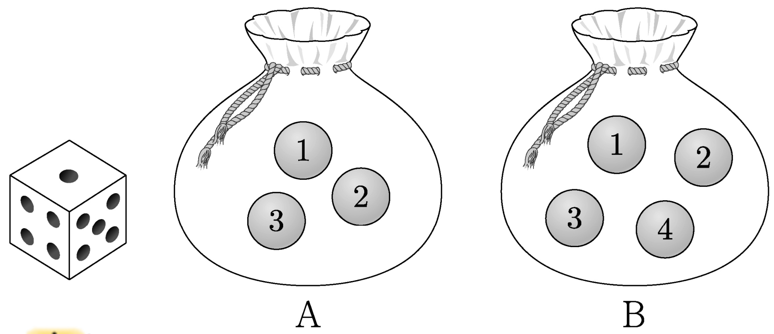
30번과 바뀐듯 ㅋㅋ

28. 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 3의 배수이면 $\frac{1}{3}$ 확률
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
> 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면 $\frac{2}{3}$ 확률
> 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.
> 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 차를 기록한 후,
> 공을 꺼낸 주머니에 이 2개의 공을 다시 넣는다.

이 시행을 2번 반복하여 기록한 두 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{81}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{17}{81}$ ⑤ $\frac{19}{81}$



결국 $\begin{cases} \frac{1}{3} \text{ 확률로 A에서 공 2개 꺼내고} \\ \frac{2}{3} \text{ 〃 B 〃} \end{cases}$ 인 것일뿐

구하는 것이 $P(\overline{X}=2)$ 이므로 case 분류가능.

A와 B 각각에서 발생하는 두 수의 차의 확률을 미리 계산하고 풀면 더 편하긴 한데 그냥 손풀이니까 일일이 계산할게요

i)

	1st 시행	2nd 시행
두수 차이	1	3

이 경우, A에서 공 2개를 꺼냈을 때 나올수 있는 차이는 1, 2 뿐이고
B에서 공 2개를 꺼냈을 때 나올수 있는 차이는 1, 2, 3 이므로

1st 시행에서 발생한 두 수의 차이 "1"은 A와 B 모두에서 발생가능
But, 2nd 〃 "3"은 B에서만 발생가능

i)-① A→B 뽑은 경우

(A에서 (1,2) OR (2,3)을 뽑을 확률) × (B에서 (1,4)를 뽑을 확률)

⇒ $\boxed{\frac{1}{3}} \times \frac{2}{{}_3C_2} \times \boxed{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{{}_4C_2} = \boxed{\frac{2}{81}}$

A를 뽑을 확률 B를 뽑을 확률

i)-② B→B 뽑은 경우

(B에서 (1,2) OR (2,3) OR (3,4) 뽑을 확률) × (B에서 (1,4) 〃)

⇒ $\boxed{\frac{2}{3}} \times \frac{3}{{}_4C_2} \times \boxed{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{{}_4C_2} = \frac{1}{27}$

B 뽑 확

다음 page

28번 이어서

만든놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

ii)

	1^{st} 시행	2^{nd} 시행
두수차이	2	2

이 경우, A와 B 모두에서 두 수의 차로 2가 가능하다.

ii) - ① A→A 뽑은 경우

(A에서 (1,3)뽑은 확률) × (〃)

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{{}_3C_2}\right)^2 = \frac{1}{81}$

ii) - ② A→B 뽑은 경우

(A에서 (1,3) 〃) × (B에서 (1,3), (2,4) 〃)

$\Rightarrow \frac{1}{3}\times\frac{1}{{}_3C_2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{{}_4C_2} = \frac{2}{81}$

ii) - ③ B→A 뽑은 경우

ii)-② 와 동일 $= \frac{2}{81}$

ii) - ④ B→B 뽑은 경우

(B에서 (1,3), (2,4) 〃) × (〃)

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{{}_4C_2}\right)^2 = \frac{4}{81}$

iii)

	1^{st} 시행	2^{nd} 시행
두수차이	3	1

i) 의 경우와 순서만 다르지 완벽히 동일.

$\Rightarrow \frac{2}{81}+\frac{1}{27}$

$\therefore$ ㉠ $2\times\left(\frac{2}{81}+\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{1}{81}+2\times\frac{2}{81}+\frac{4}{81}\right) = \boxed{\frac{19}{81}}$

만든놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

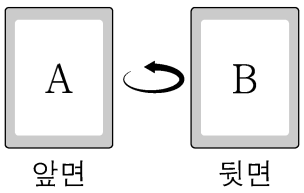
단답형

ㅋㅋㅋㅋ 웃음만 나오는 난이도

29. 앞면에는 문자 A, 뒷면에는 문자 B가 적힌 한 장의 카드가 있다. 이 카드와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 두 번 던져
> 앞면이 나온 횟수가 2이면 카드를 한 번 뒤집고, ($\frac{1}{4}$ 확률)
> 앞면이 나온 횟수가 0 또는 1이면 카드를 그대로 둔다. ($\frac{3}{4}$ 확률)

처음에 문자 A가 보이도록 카드가 놓여 있을 때, 이 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓일 확률은 p이다. $128\times p$의 값을 구하시오. [4점]



$A \xrightarrow{5번\ 반복} B$

이는 카드를 "홀수"번 뒤집어야 함

i) 1번 뒤집은 경우

$${}_5C_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{5\times3^4}{4^5}$$

ii) 3번 뒤집은 경우

$${}_5C_3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{10\times3^2}{4^5}$$

iii) 5번 뒤집은 경우

$${}_5C_5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{4^5}$$

㉠ $128p = 128\times\left(\frac{5\times3^4}{4^5} + \frac{10\times3^2}{4^5} + \frac{1}{4^5}\right)$

$= \frac{5\times3^4+10\times3^2+1}{2^3}$

$= \boxed{62}$

실수만 안하면 뭐 ㅋㅋ 30번 수준 가슴이 웅장해진다

30. 다음 조건을 만족시키는 13 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a\le b\le c\le d$
> (나) $a\times d$는 홀수이고, $b+c$는 짝수이다.

(가) 야 많이 봤던 조건이고...

(나)

$a\times d =$ 홀수 ⇒ a, d는 모두 홀수

$b+c =$ 짝수 ⇒ (b, c) ⟨ (짝, 짝) / (홀, 홀)

sol,)

열심히 $(a,d) =$ (홀, 홀)을 이용해 case 분류하자

i)

a	b	c	d
1			13

⇒ $(b,c)=$(짝, 짝) : 2, 4, 6, 8, 10, 12 중 택 2
⇒ ${}_6H_2 = {}_7C_2$

$(b,c)=$(홀, 홀) : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 중 택 2
⇒ ${}_7H_2 = {}_8C_2$

∴ ${}_7C_2 + {}_8C_2$

ii)

a	b	c	d
3			13
1			11

: $(a,d) = (1, 13), (3, 11)$ 모두 두 수 사이의 홀수/짝수의 개수는 같다.
⇒ 경우의 수는 같다.

$(a,d)=(3,13)$

⇒ $(b,c) =$ (짝, 짝) : 4, 6, 8, 10, 12 중 택 2
⇒ ${}_5H_2 = {}_6C_2$

$(b,c) =$ (홀, 홀) : 3, 5, 7, 9, 11, 13 중 택 2
⇒ ${}_6H_2 = {}_7C_2$

∴ $2\times({}_6C_2 + {}_7C_2)$

다음 page

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

30번 이어서

규칙이 슬슬 보이시나요?

만든 놈: ⓘ plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

아마 다음 경우의 수는

a	b	c	d
1			9
3			11
5			13

$3\times({}_5C_2+{}_6C_2)$ 일 것입니다.
궁금하면 직접 해보시길

$\therefore$ ⑦ $({}_7C_2+{}_8C_2)+2\times({}_6C_2+{}_7C_2)+3\times({}_5C_2+{}_6C_2)+4\times({}_4C_2+{}_5C_2)$
$+5\times({}_3C_2+{}_4C_2)+6\times({}_2C_2+{}_3C_2)+7\times({}_1C_2+{}_2C_2)$

? 이게 뭐임

$\to {}_0H_2$, 즉 예를 들어 $(a,d)=(13,13)$ 일때
조건을 만족하는 $(b,c)=$(짝, 짝)은 존재하지 않지만
$(b,c)=$(홀, 홀)은 $(13,13)$으로 존재한다.

$$=\sum_{k=1}^{6}k({}_{8-k}C_2+{}_{9-k}C_2)+7\times{}_2C_2$$

$$=\sum_{k=1}^{6}k\left(\frac{(8-k)(7-k)}{2}+\frac{(9-k)(8-k)}{2}\right)+7$$

$$=\sum_{k=1}^{6}k\left(\frac{(8-k)(16-2k)}{2}\right)+7$$

$$=\sum_{k=1}^{6}(k(k-8)^2)+7$$

$$=\sum_{k=1}^{6}(k^3-16k^2+64k)+7$$

$$=\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2-16\times\left(\frac{6\times7\times13}{6}\right)+64\times\frac{6\times7}{2}+7$$

$$=\boxed{336}$$

※ 물론 Σ 안 쓰고 걍 계산해서 더하셔도 무방.

sol₂) $(b,c)=$(홀, 홀) 과 (짝, 짝)일 경우 case 분류도 가능.

i) $(b,c)=$(홀, 홀)
$\Rightarrow$ a, b, c, d 모두 홀수이므로 $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ 배열 $\Rightarrow {}_7H_4$

ii) $(b,c)=$(짝, 짝)
$\Rightarrow$ sol₁) 중 $(b,c)=$(짝, 짝)인 부분만 그대로 계산

만든놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

보자마자 안 나오면 좀...

23. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{7x}-1}{x}}{\frac{e^{2x}-1}{x}} = \boxed{\frac{7}{2}}$$

한 문제는 무조건 나오는 듯

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=t+\cos 2t,\quad y=\sin^2 t$$

에서 $t=\frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$$\frac{dx}{dt}=1-2\sin 2t,\quad \frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin 2t}$$

$t=\frac{\pi}{4}$ 대입

㉠ $\frac{dy}{dx}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-2\times 1}=\boxed{-1}$

만든 놈: ⓘ plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

설마 아무 특수성 없이 단순계산만 하라고 했을까?

25. 함수 $f(x)=x+\ln x$에 대하여 $\displaystyle\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e^2}{2}+\frac{e}{2}$　② $\frac{e^2}{2}+e$　③ $\frac{e^2}{2}+2e$
④ e^2+e　⑤ e^2+2e

무턱대고 적분부터 하는 것이 아니다.

꼴파악부터!

$\Rightarrow f(x)=x+\ln x$
$f'(x)=1+\frac{1}{x}$

$$\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)\,dx$$
$$=\int_1^e f'(x)f(x)\,dx$$

부분적분!

$$\int_1^e f'(x)f(x)\,dx=\left[\{f(x)\}^2\right]_1^e-\int_1^e f(x)f'(x)\,dx$$
$$\Rightarrow 2\int_1^e f'(x)f(x)\,dx=\left[\{f(x)\}^2\right]_1^e$$

$\therefore$ ㉠ $\displaystyle\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)\,dx=\int_1^e f'(x)f(x)\,dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\{f(x)\}^2\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}\left(\{f(e)\}^2-\{f(1)\}^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}(f(e)+f(1))(f(e)-f(1))$$

$f(e)=e+\ln e=e+1$
$f(1)=1+\ln 1=1$
이므로 대입해서 계산하면 $\boxed{\frac{1}{2}e^2+e}$

26번치고 난이도가 상당한데? 맨날 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ = 수렴이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 만 물어봤는데, 특이하게도 그렇게 풀라고 하지 않았음.

26. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$a_1=b_1=1$, $a_2b_2=1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$　② $\frac{6}{5}$　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

$\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$, $\{b_n\}$의 공비를 r로 두면
$a_2=1+d$, $b_2=r$에서 $a_2b_2=(1+d)r=1$이고,
$1+d>1$이므로 $0<r<1$이다. ⇒ ①

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_ka_{k+1}}\right)$$ 부분분수 변환
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\boxed{a_{k+1}-a_k}}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\right\}$$
$\Downarrow d$

$\Rightarrow \frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$ 이고, $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$은

$\frac{1}{a_1}-\cancel{\frac{1}{a_2}}$
$\cancel{\frac{1}{a_2}}-\cancel{\frac{1}{a_3}}$
$\vdots$
$+)\ \cancel{\frac{1}{a_n}}-\frac{1}{a_{n+1}}$
$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$ 이므로 $\frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$을 계산하면 된다.

이때 $a_1=1$이고, 공차가 자연수이므로 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\infty$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=0$이므로 $\frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}$

곧 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}$로 수렴하므로 $(d\neq 0)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2-\frac{1}{d}$로 수렴한다.

또한, 우리는 $\{b_n\}$가 등비수열임을 알고 있으므로 $b_1=1$, $0<r<1$에서
$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-r}$임을 안다. $\therefore \frac{1}{1-r}=2-\frac{1}{d}$

이제 앞서 구한 ①을 이용해 $r=\frac{1}{1+d}$을 얻고, 대입하면

$\frac{1}{1-\frac{1}{1+d}}=2-\frac{1}{d}$이다. $\therefore$ 계산하면 $d=2$

㉠ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2-\frac{1}{d}=\boxed{\frac{3}{2}}$

수학 영역(미적분)

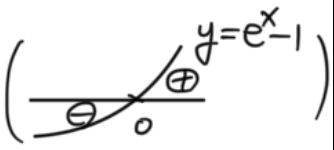
매력오답: $\frac{15}{8}$

27. $x=-\ln 4$에서 $x=1$까지의 곡선 $y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$의 길이는? [3점]

① $\frac{23}{8}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{29}{8}$ ④ 4 ⑤ $\frac{35}{8}$

결국 절댓값은 0이 될 때가 경계!

① $|e^x-1|$은 $x=0$일 때 0이 되고



② $|x|$도 $x=0$일 때 0이 된다.

∴ 구간을 $[-\ln 4, 0]$과 $[0, 1]$로 쪼개자.

i) $[-\ln 4, 0]$에서의 함수

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(1-e^x-e^{-x}+1)$

$\Rightarrow y=-\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1$: $f(x)$으로 두자.

곧 $[-\ln 4, 0]$에서의 함수의 길이는 $\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

$f'(x)=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 이므로

$$\Rightarrow \int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx=\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$

$$=\int_{-\ln 4}^{0}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx$$

계산하면 $\left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]_{-\ln 4}^{0}=\frac{15}{8}$

ii) $[0, 1]$에서의 함수

$y=\frac{1}{2}(e^x-1-e^x+1)$

$=0$

주의! "함숫값"이 0인 거지 "함수의 길이"는 0이 아니다.

구간의 길이가 1인 구간에서 $y=0$의 직선의 길이는 1이다.

∴ ㉠ $\frac{15}{8}+1=\boxed{\frac{23}{8}}$

실질적 30번. 28⇔30 혼동하신듯

28. 실수 $a\,(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}2|\sin 4x| & (x<0)\\ -\sin ax & (x\ge 0)\end{cases}$$

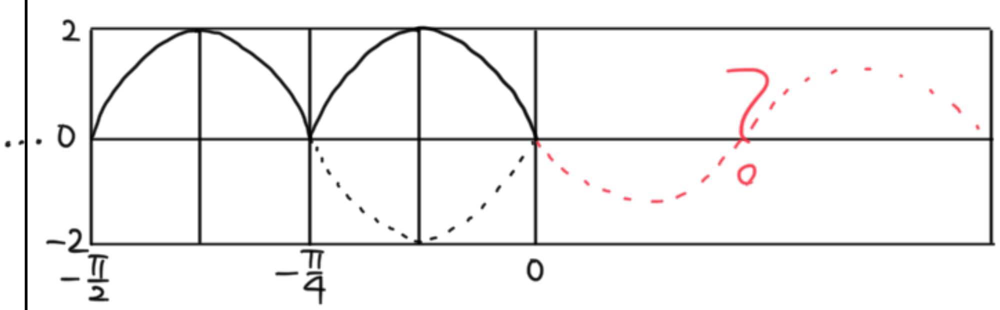
이라 하자. 함수

$$g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x}f(t)\,dt\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

그래프를 그려보면



$g(x)$가 미분가능하므로 결국 또 미분불가능의심점을 보면

① $\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt$ 자체에서 미분불가능한 지점

② 절댓값에서 문제가 생길 경우 : $\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt=0$ 인 지점

그런데, 다행히도 $y=\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt$ 를 $h(x)$로 두면

$h'(x)=f(x)$에서 $h(x)$의 도함수가 $f(x)$임을 알 수 있는데, $f(x)$는 연속함수이므로
$y=h(x)$의 도함수가 연속 : 미분가능!

따라서 ①에서 미분불가능 의심점은 없다. 야호!

②의 경우를 보자.

$\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt$ 이 0이 되는 지점이 미분불가능의심점이다.

i) $x<0$ 에서 $f(x)\ge 0$ 이므로 정적분값이 0이 되는 경우는 $x=-a\pi$ 뿐이고
해당 지점에서 $\left|\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt\right|$ 이 미분가능하려면 $x=-a\pi$ 에서 $y=\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt$ 의 미분계수가 0이어야 한다.

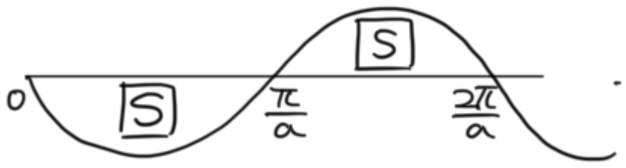
∴ $y=\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt$ 를 x에 대해 미분하면 $f(x)$이고, 즉 $f(-a\pi)=0$이다.

$\Rightarrow a=\frac{k}{4}$ ($0<a<2$ 이므로 k는 8 미만의 자연수) 꼴이다.

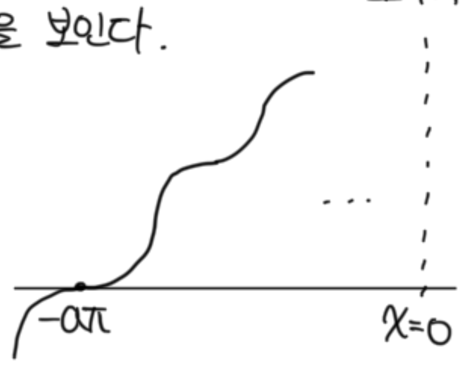
다음 page

28번 이어서

만든놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

$x\ge 0$ 에서 $y=-\sin ax$ 는  ... 의 개형을 보인다.

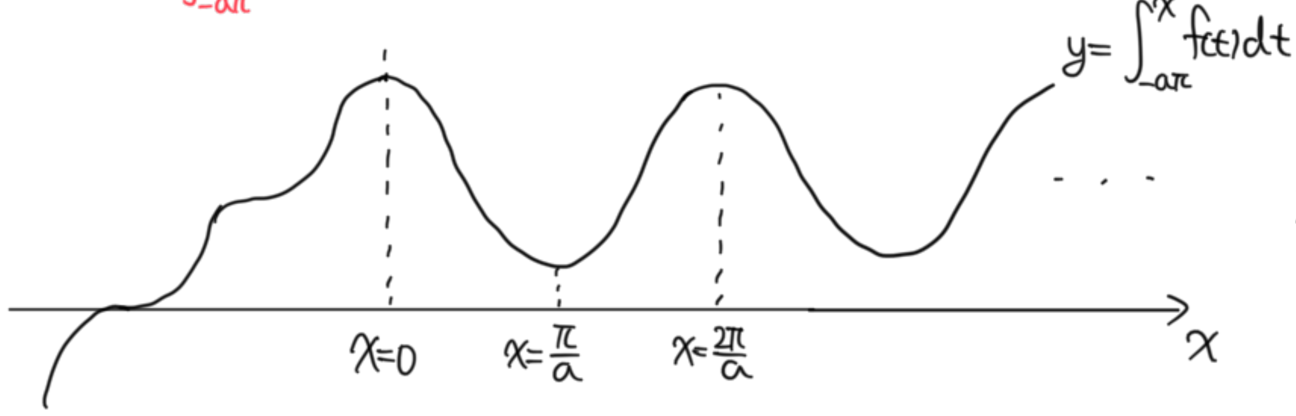
$y=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$ 의 양상을 관찰해보면 $-a\pi<x<0$ 에서는 함숫값이 계속 양수.



꼴 정도?

⇒ $x\ge 0$ 에서는 구간 $[0,\frac{\pi}{a}]$ 까지는 적분값이 음수이고, 그 이후로는 또 양/음이 반복된다.

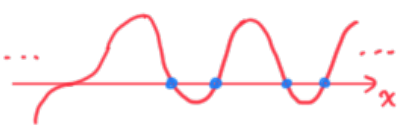
⇒ $\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$ 가 0이 되는 지점이 $x\ge 0$ 에서 존재하려면 $-a\pi<x<0$ 에서 축적해놓은(?) 양의 적분값을 $[0,\frac{\pi}{a}]$ 에서의 음의 적분값으로 "상쇄" 해야 한다는 뜻. 만약 상쇄 못하면? $[0,\frac{\pi}{a}]$ 에서의 적분값과 $[\frac{\pi}{a},\frac{2\pi}{a}]$ 의 적분값, $[\frac{2\pi}{a},\frac{3\pi}{a}]$ 의 적분값은 모두 부호만 반대이고 절댓값이 같으므로 영영 $\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt=0$ 이 되는 점은 존재X



정도?

그런데 아까와 동일한 논리로 $\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|=0$ 인 지점에서 미분가능하려면 $y=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$ 의 도함수인 $y=f(x)$ 가 그 지점에서 0이 되어야 하는데 $y=-\sin ax$ 이 0이 되는 지점 $x=\frac{\pi}{a}$ 는 $\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$ 의 극점이다.

∴ $y=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|$ 가 미분가능하려면 $x=\frac{\pi}{a}$ (n은 자연수) 에서 $y=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|$ 의 함숫값 ≥ 0 이어야 한다.

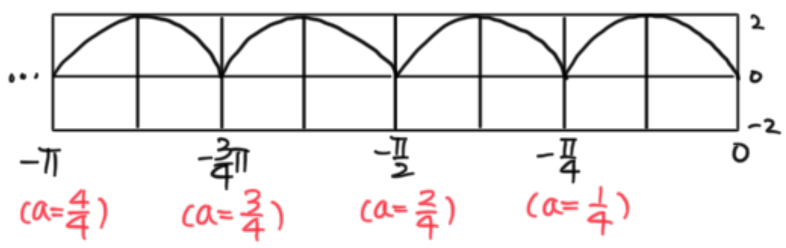
if) $\int_{-a\pi}^{\frac{\pi}{a}} f(t)dt<0$ 이면  미분불가능.

말이 어렵지만, 결국 정리하면 $\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt \ge \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{a}} -\sin ax\,dx\right| = \int_{0}^{\frac{\pi}{a}} \sin ax\,dx$ 이라는 뜻이다.

↳ 아까의 표현을 빌리자면 $-a\pi\le x<0$ 에서 축적한 양의 적분값을 $x\ge 0$ 에서 상쇄못했다는 뜻.

∴ $\int_{0}^{\frac{\pi}{a}} \sin ax\,dx=\left[-\frac{1}{a}\cos ax\right]_{0}^{\frac{\pi}{a}}$

$=\frac{2}{a}$ 이므로 $\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt\ge\frac{2}{a}$ 이다.

이때, a는 $\frac{k}{4}$ 꼴이므로 $\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt$ 는 

꼴에 대한 적분값이므로 

넓이를 S로 두면 $\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt=4aS$ 임을 알 수 있다.

곧 S를 구해보면

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} -2\sin 4x\,dx=\left[\frac{1}{2}\cos 4x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$

$=1$ 이므로 $\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt=4aS=4a\ge\frac{2}{a}$

∴ $a^2\ge\frac{1}{2}$ 이므로 $a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{4}$ (∵ $a>0$)

마지막으로, $a=\frac{k}{4}$ (k는 8 미만의 자연수) 꼴이므로 $2<2\sqrt{2}<3$ 에서 ㉠ a의 최솟값 $=\boxed{\frac{3}{4}}$

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

단답형

? 이게 29번? 이정도면 기본서에도 있을만한 문젠데 ㅋㅋ...

29. 두 실수 a, $b(a>1,\ b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

결국 경계 설정.

① $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}$ 해석 : $a=3$을 기준으로 case 분류.

i) $1<a<3$ 일때

3이 a보다 영향력이 강하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}$

$=\frac{1}{3}=a$

이때 $a>1$이므로 모순이다.

ii) $a=3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}=1=a$ ∴ 마찬가지로 $a=3\neq1$ 이므로 모순

iii) $a>3$일 때

a가 3보다 영향력이 강하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n}$

$=a$ (모순 X)

② $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$ 해석: $a=b$를 기준으로 case 분류

i) $b<a$ 일 때

a가 b보다 영향력이 강하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^{n+1}}=\frac{1}{a}\neq\frac{9}{a}$ 이므로 모순

ii) $b=a$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n}=1=\frac{9}{a}$ 이므로 $a=b=9$

iii) $b>a$일 때

b가 a보다 영향력이 강하므로

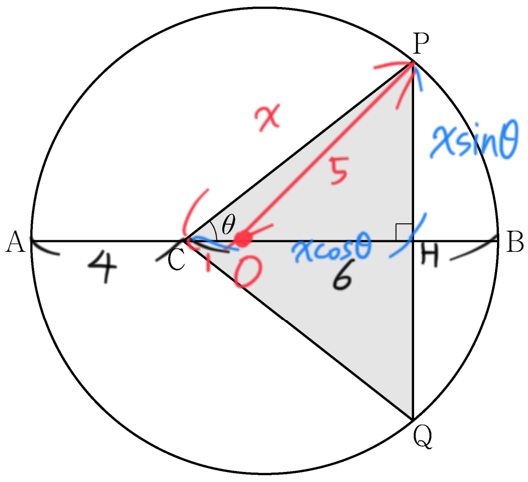
$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b^{n+1}}{b^n}=b=\frac{9}{a}$

이 때, $a>3$이므로 $b=\frac{9}{a}<3$ 이고, 이는 $b>a$에 모순.

∴ ㉠ $a+b=\boxed{18}$

계산 좀 귀찮은 것만 넘기면 개쉬움

30. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{AC}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle PCB=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



원의 중심을 O로 두면 $\overline{AC}=4$이므로 $\overline{CO}=1$이고, $\overline{OP}=5$이다. (∵ 반지름)

△OCP를 이용할 생각하자. ⇒ $\overline{CP}=x$로 둬!

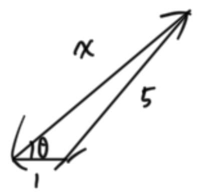
⇒ 이를 바탕으로 $\overline{AB}$와 $\overline{PQ}$의 교점을 H로 두면 $\overline{CH}=x\cos\theta$, $\overline{PH}=x\sin\theta$

곧 $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CH}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times\overline{CH}\times2\overline{PH}$

$=x^2\cos\theta\sin\theta$ 이다.

△OCP에서 x와 θ 사이의 관계식을 뽑아내야 한다.

⇒ Cos Law!



∵ $25=x^2+1^2-2x\cos\theta$

⇒ $x^2-2\cos\theta\cdot x-24=0$의 양의 실근 x

⇒ $x=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+24}$ (∵ $x>0$)

∴ $S(\theta)=(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+24})^2\cos\theta\sin\theta$ 이므로 실수 안하고 미분 열심히 하면

$S'(\theta)=2(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+24})(-\sin\theta+\frac{-2\cos\theta\sin\theta}{2\sqrt{\cos^2\theta+24}})\cos\theta\sin\theta$

$+(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+24})^2(-\sin^2\theta)+(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+24})^2\cos^2\theta$

⇒ $S'(\frac{\pi}{4})=2(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{7\sqrt2}{2})(-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{-2\times\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}}{7\sqrt2})\times\frac{1}{2}+\cancel{(4\sqrt2)^2(-\frac{1}{2})}+\cancel{(4\sqrt2)^2(\frac{1}{2})}$

$=8\sqrt2\times(-\frac{2\sqrt2}{7})$ ㉠ $-7\times S'(\frac{\pi}{4})=\boxed{32}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

그냥... 뭐...

23. 좌표공간의 점 A$(8, 6, 2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

B$(8, 6, -2)$ 이므로

㉠ $\overline{AB}$의 길이 : $\boxed{4}$

이제 이 정도면 바로 공식 쓸 수 있죠?

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(7, 6)$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

접점이 주어진 접선의 방정식

$\Rightarrow \frac{7x}{7}-\frac{6y}{6}=1$

$\Rightarrow x-y=1$

㉠ x절편 : $y=0$ 대입

$\Rightarrow x$절편 $=\boxed{1}$

만든 놈: ⓘ plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

자취의 방정식 문제 중 가장 기본적이면서도 대표적

25. 좌표평면 위의 점 A$(4, 3)$에 대하여

$$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}|$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 2π ② 4π ③ 6π ④ 8π ⑤ 10π

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}$
$= 5$

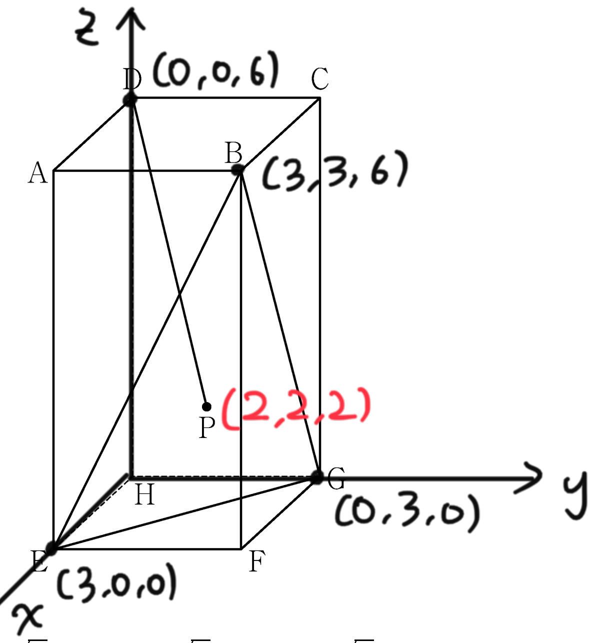
즉, $|\overrightarrow{OP}| = 5$로 일정한 점 P의 자취는

중심이 원점이고, 반지름의 길이가 5인 원

⇒ ⑦ $5 \times 2\pi = \boxed{10\pi}$

직육면체? 좌표화 편한경우 많음

26. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=3$, $\overline{AE}=6$인 직육면체 ABCD-EFGH가 있다. 삼각형 BEG의 무게중심을 P라 할 때, 선분 DP의 길이는? [3점]



① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

직육면체가 등장
⇒ 좌표화 쉽다.
⇒ 좌표공간 도입!

계산이 편하도록 점 H를 원점으로 두면

B(3,3,6)
D(0,0,6)
E(3,0,0)
G(0,3,0)

이고, 곧 △BEG의 무게중심인 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{3+0+3}{3}, \frac{6+0+0}{3}\right)$

⇒ $P(2, 2, 2)$

곧 ⑦ $\overline{DP}$의 길이: $\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(2-6)^2}$
$= \boxed{2\sqrt{6}}$

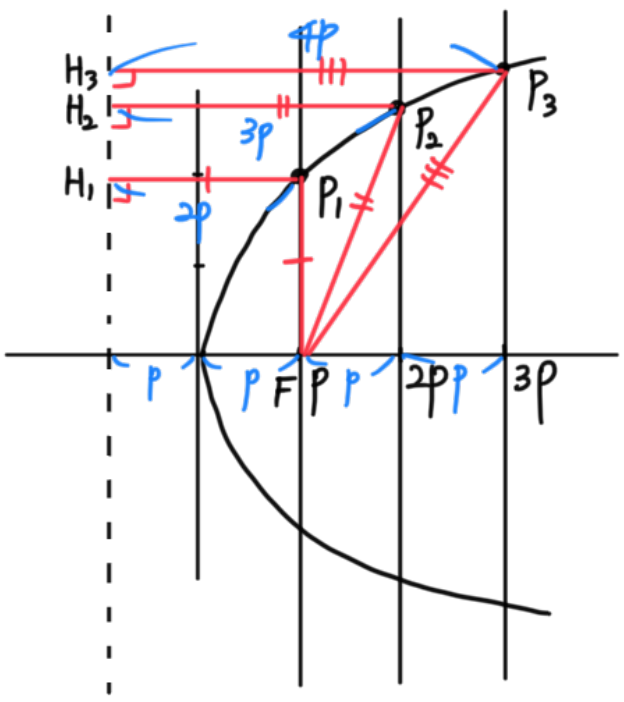
수학 영역(기하)

먼저 정의 이용할 준비부터! 계산은 그 다음이다.

27. 양수 p에 대하여 좌표평면 위에 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$가 있다. 이 포물선이 세 직선 $x=p$, $x=2p$, $x=3p$와 만나는 제1사분면 위의 점을 각각 P_1, P_2, P_3이라 하자. $\overline{\mathrm{FP}_1}+\overline{\mathrm{FP}_2}+\overline{\mathrm{FP}_3}=27$일 때, p의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

결국 포물선의 정의!



$x=-p$

포물선의 정의에 의해

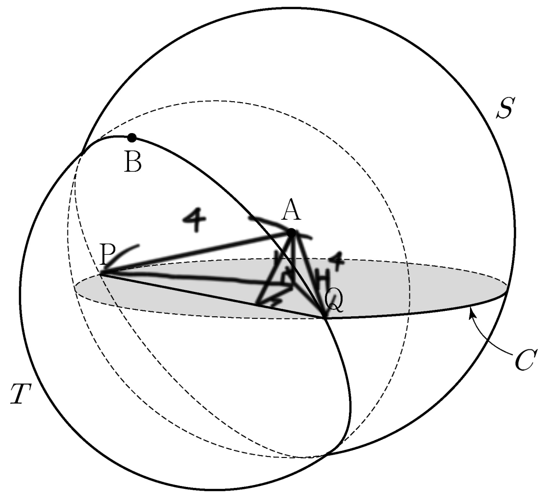
$$\left.\begin{aligned}\overline{\mathrm{FP}_1}&=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{H}_1}=2p\\ \overline{\mathrm{FP}_2}&=\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{H}_2}=3p\\ \overline{\mathrm{FP}_3}&=\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{H}_3}=4p\end{aligned}\right\}\ 9p=27$$

㉮ $p=\boxed{3}$

실질적 30번. 삼수선의 정리 ⊕ 수직관계 잘 파악해야 함. 이번 9평은 선택과목 모두가 28번과 30번이 바뀐듯...

28. 좌표공간에 중심이 A$(0, 0, 1)$이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 있다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하고, 점 A에서 선분 PQ까지의 거리가 2가 되도록 원 C 위에 두 점 P, Q를 잡는다. 구 S가 선분 PQ를 지름으로 하는 구 T와 만나서 생기는 원 위에서 점 B가 움직일 때, 삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? (단, 점 B의 z좌표는 양수이다.) [4점]

① 6 ② $3\sqrt{6}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $6\sqrt{3}$



A(0,0,1) 에서 xy평면에 내린 수선의 발 $\mathrm{H}_1(0,0,0)$을 알 수 있다.

⇒ $\overline{\mathrm{AH}_1}=1$

구 S의 반지름이 4이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=4$이고, $\triangle \mathrm{APH}_1$와 $\triangle \mathrm{AQH}_1$에서

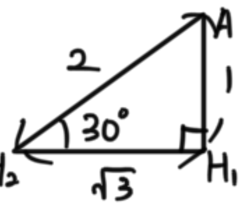
⇒ $\overline{\mathrm{PH}_1}=\overline{\mathrm{QH}_1}=\sqrt{15}$

이때 점 A ~ $\overline{\mathrm{PQ}}$의 거리가 2이므로 점 A에서 $\overline{\mathrm{PQ}}$에 내린 수선의 발을 H_2로 두면 $\overline{\mathrm{AH}_2}=2$

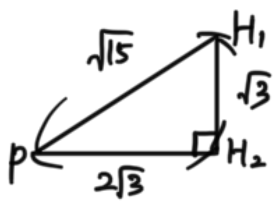
⇒ $\triangle \mathrm{PH}_1\mathrm{Q}$는 이등변$\triangle$ 이므로 H_1에서 $\overline{\mathrm{PQ}}$에 내린 수선의 발은 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점이다. (이하 M)

⇒ 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{MH}_1}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{AH}_2}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$ 이므로 $\mathrm{M}=\mathrm{H}_2$

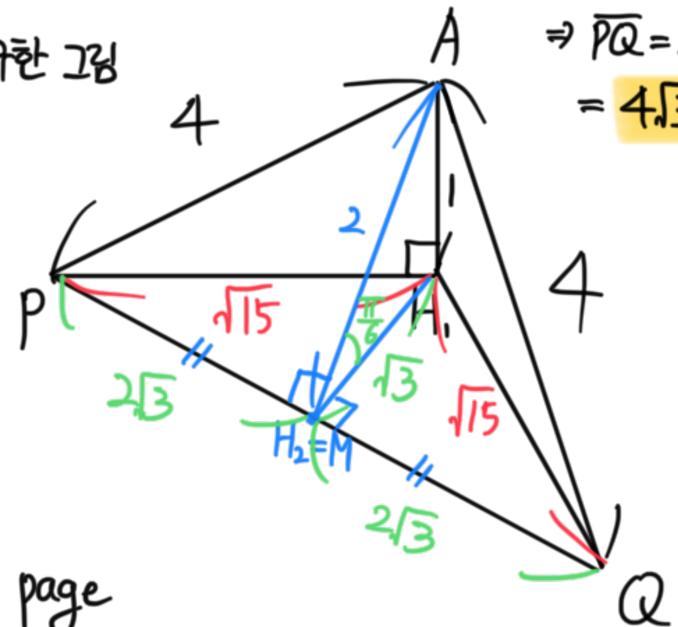
∴ $\triangle \mathrm{AH}_1\mathrm{H}_2$는



이다. ⇒



※ 현재까지 구한 그림



⇒ $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}_2}$
$=4\sqrt{3}$

다음 page

28번 이어서

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

구하는 것이 정사영의 넓이이므로 두 가지 방법 정도가 떠오른다.

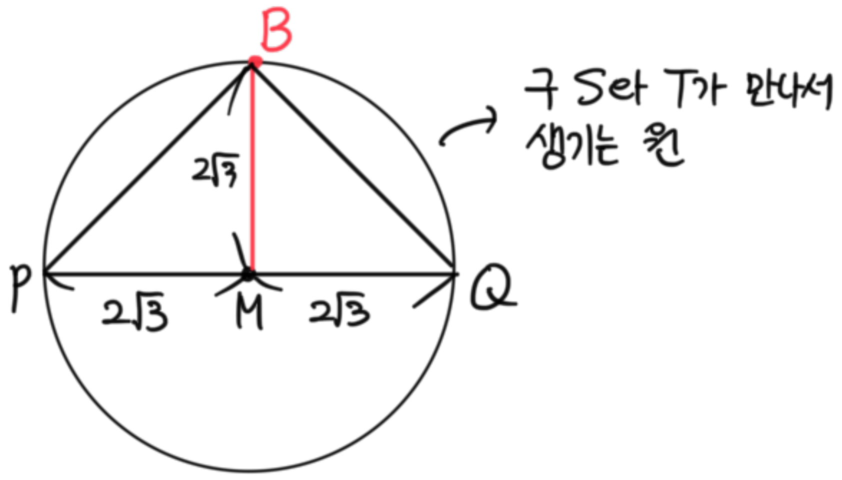
① △BPQ를 xy평면에 정사영한 도형을 직접 추론

② △BPQ의 넓이와 평면 사이의 이면각을 직접 구해 $S' = S\cos\theta$를 이용

이때, 점 B가 이동하는 자취가 기울어진 원의 형태이므로 B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 특정하기 쉬워보이지는 않는다.
이에 반해 △BPQ이 포함된 평면은 구 S와 T가 만나서 생기는 원으로 고정되어 있으므로 xy평면과의 이면각도 고정.
⇒ $\cos\theta$이 고정이므로 △BPQ 넓이 최댓값을 구하면 된다.

∴ ① 보다는 ② 로 풀어보자.

(1) △BPQ의 넓이의 최댓값



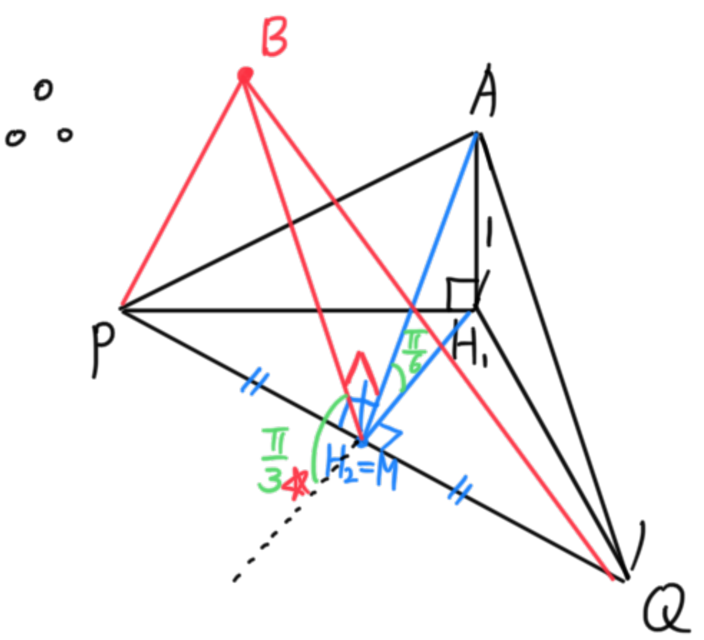
$\overline{PQ}$를 밑변으로 두면 위의 그림처럼 $\overline{BM}$가 △BPQ의 높이일 때가 높이 최대
⇒ 넓이도 최대
⇒ $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$
$= 12$

(2) △BPQ (를 포함하는 평면)와 xy평면 사이의 이면각

이면각은 항상!! 두 평면 사이의 교선을 찾자! : $\overline{PQ}$가 교선

$\overline{PQ} \perp \overline{AM}$ 이고, (1) 에서의 점 B에서 $\overline{BM} \perp \overline{PQ}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{AM} \perp \overline{BM}$

∴



그림에서, △BPQ를 포함하는 평면과 xy 평면 사이의 이면각은
$\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$ 이다.

㉠ $12\cos\frac{\pi}{3} = \boxed{6}$

만든놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

단답형

결국 또 점이 이동⊕ 길이의 합의 최소? 원이 등장하면 그 원의 중심과 연결짓자!

29. 한 초점이 $F(c, 0)\ (c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$과 중심의 좌표가 $(2, 3)$이고 반지름의 길이가 r인 원이 있다. 타원 위의 점 P와 원 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}-\overline{PF}$의 최솟값이 6일 때, r의 값을 구하시오. [4점]

초점: $(\pm\sqrt{9-5},\ 0)$에서 $F(2,0),\ F'(-2,0)$

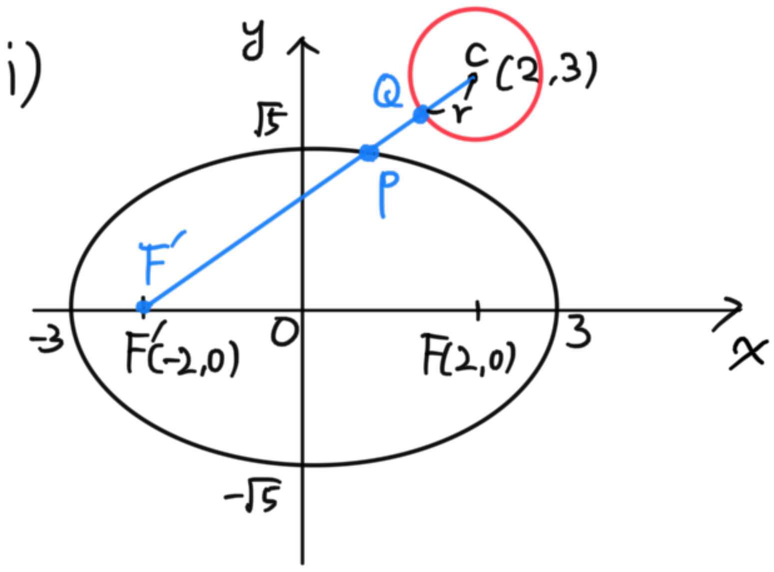
이때 타원의 성질에 의해 $\overline{PF}+\overline{PF'}=6$으로 일정

$\Rightarrow \overline{PF}=6-\overline{PF'}$

$\therefore\ \overline{PQ}-\overline{PF}=\overline{PQ}-(6-\overline{PF'})$
$=\overline{PQ}+\overline{PF'}-6\geq 6$ 이고,

곧 $\overline{PQ}+\overline{PF'}\geq 12$ 이다.

i)



다음과 같은 경우가 $\overline{PQ}+\overline{PF'}$이 최소가 되는 경우이고
(이거 이해안되시면 수학(상) 뒷부분 공부 더 ㄱㄱ)

이 경우 $\overline{PQ}+\overline{PF'}$는 $(-2,0)\sim(2,3)$ 거리 $-\ r$ 이므로

$5-r\geq 12$ 이다.

$\therefore\ r=-7<0$ 이므로 모순

나머지는 다음 page

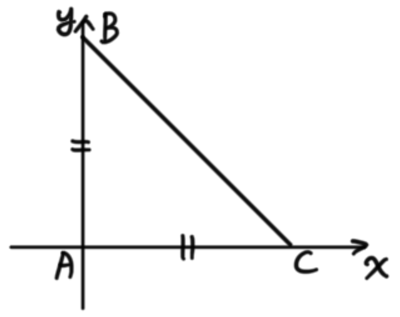
그냥 조건 하나하나 해석하다보면 답이 나오는 너무나도 정직한 문제.

30. 좌표평면에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 APQ는 정삼각형이고,
> $9|\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ}=4|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB}$이다.
>
> (나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}<0$
>
> (다) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CB}=24$

선분 AQ 위의 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]

직각이등변 △이므로 그림을 그려보면



이다.

이제 조건을 하나하나 해석해보자.

(가) $9|\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ}=4|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB}$

⇒ 좌변과 우변 vector의 방향이 같다.

⇒ 좌변 vector의 방향은 (0, 1) 방향과 같음.

벡터의 크기 부분과 방향 부분을 나누기 위해 식을 변형하면

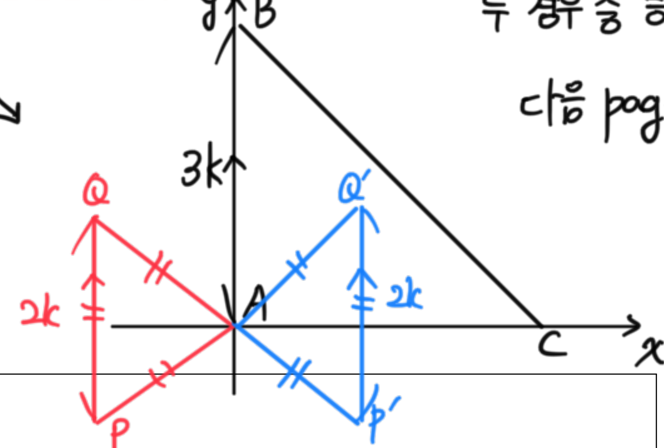
$9|\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ}=9|\overrightarrow{PQ}|^2\cdot\boxed{\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}}$

단위벡터

$4|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB}=4|\overrightarrow{AB}|^2\cdot\boxed{\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}}$

방향은 동일하니 $9|\overrightarrow{PQ}|^2=4|\overrightarrow{AB}|^2$

$\therefore\ |\overrightarrow{PQ}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|$



두 경우 중 하나다.

다음 page

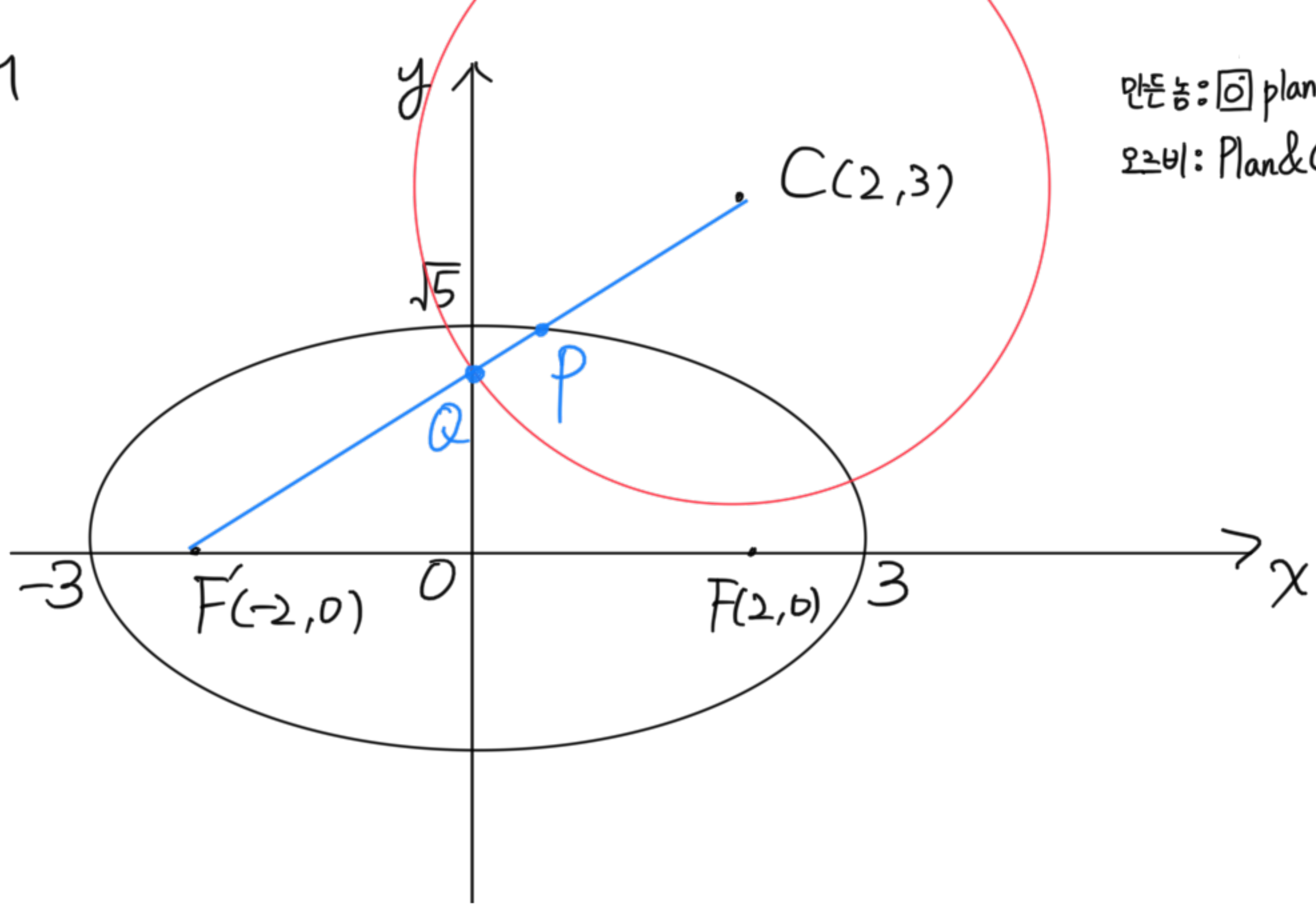
* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

29번 이어서

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀

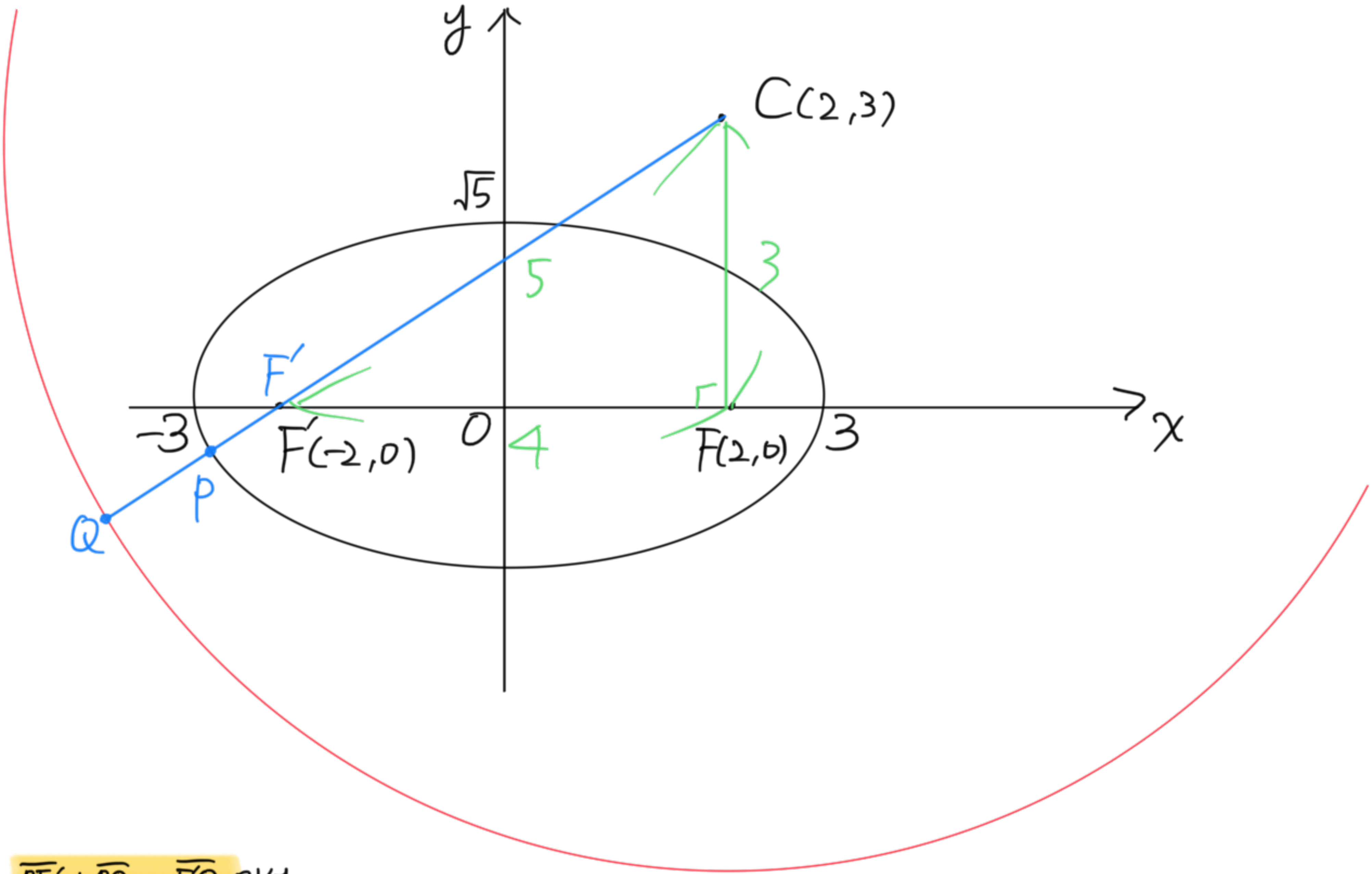
ii)



$\overline{PF}+\overline{PF'}=6$ 에서 $\overline{PF'}<6$ 이고, $\overline{PQ}<\overline{PF'}<6$ 에서 $\overline{PQ}+\overline{PF'}<12$ 이다.

⇒ 마찬가지로 모순. ($\overline{PF'}+\overline{PQ}\geq 12$ 불가능)

iii)



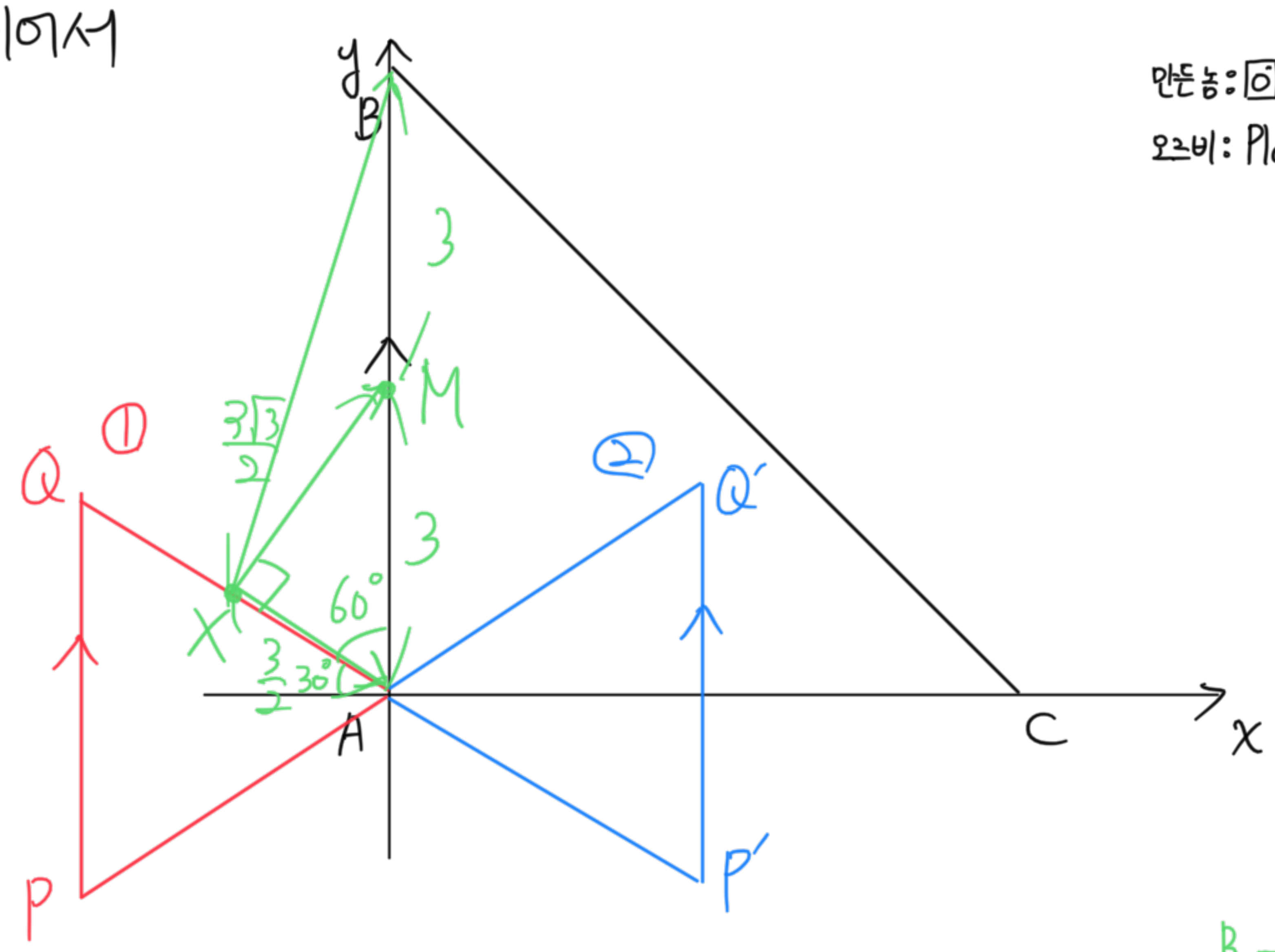
이 경우 $\overline{PF'}+\overline{PQ}=\overline{F'Q}$ 에서

$\overline{F'Q}=\overline{QC}-\overline{F'C}$
$=r-5=12$

$\therefore r=\boxed{17}$

30번 이어서

만든 놈: plancoach_team
오르비: Plan&Coach 팀



(나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}<0$

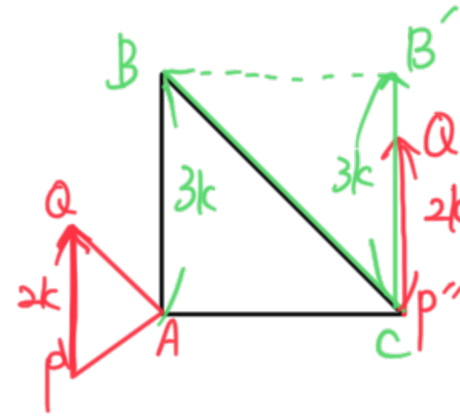
⇒ $\overrightarrow{AC}$와 $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각 둔각.

⇒ ②는 모순.

∴ ①이 올바른 개형

(다) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CB}=24$

$\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AB}$ 이므로 벡터를 평행이동하면

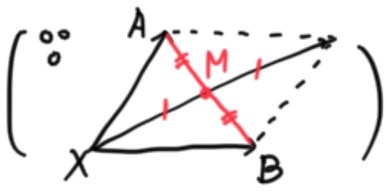


⇒ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{P''Q''}||\overrightarrow{CB'}|$

$= 3k\times 2k = 24$

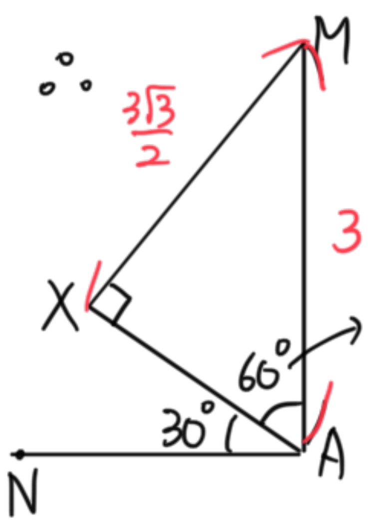
∴ $k=2$

곧 $|\overrightarrow{AB}| = 3k = 6$ 이다.

(∵ )

문제에서 $|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|$를 구하도록 했으므로 벡터의 덧셈의 성질에 의해 $\overline{AB}$의 중점을 M으로 두면 $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB} = 2\overrightarrow{XM}$

따라서 $\overline{AB}$의 중점 M을 잡으면 $|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|$이 최소가 되는 경우는 $|\overrightarrow{XM}|$이 최소인 경우이고, X가 $\overline{AQ}$ 위의 점이므로 $\overline{AQ}$와 점 M 사이의 거리, 즉 점M에서 $\overline{AQ}$에 내린 수선의 발이 X이다.

∴ 

(∵ △APQ가 정△이므로 $\angle XAN = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$)

따라서 $|\overrightarrow{XM}|$의 최솟값이 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로

$|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}| = 2|\overrightarrow{XM}| \geq 3\sqrt{3} = m$

㉠ $m^2 = \boxed{27}$

※ 마지막 계산에서

$\overline{AQ}$의 직선의 방정식이

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 임을 이용해

$X(\alpha, -\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha)$ $(-2\sqrt{2}\leq\alpha\leq 0)$

으로 두고

좌표화해서 풀어도 ㄱㅊ