18. <보기>의 함수 $f(x)$ 중에서 방정식 $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x\cdot f(x)}$의 실근의 개수가 오직 1개 존재하도록 하는 함수는 모두 몇 개인가? [3점−1009−종로]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=2^x$　　ㄴ. $f(x)=x^2-2x+1$

ㄷ. $f(x)=1-x^2$　　ㄹ. $f(x)=\sqrt{1-x}$

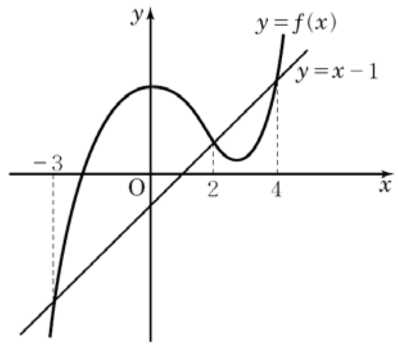
① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 없다.

19. 최고차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(7)=f(8)=1$일 때, 분수방정식 $\frac{1}{f(x)-1}-\frac{2}{\{f(x)\}^2-1}=\frac{1}{3}$을 만족시키는 모든 실수 x의 곱을 구하시오.[4점−1004−교육청]

20. 집합 $A=\left\{x \,\middle|\, \frac{a}{x}+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{x(x-1)},\ x\text{는 실수}\right\}$라 할 때, $n(A)=0$이 되도록 하는 실수 a의 개수는?[4점−1003−중앙]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

21. 그림과 같이 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$은 세 점에서 만나고 그 교점의 x좌표는 각각 $-3, 2, 4$이다. 분수방정식 $\frac{x^2+x-6}{f(x)+4}=\frac{x^3-x^2-7x+10}{f(x)-3}$을 만족시키는 실근의 개수는?[4점−1007−대성]



① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

22. 함수 $f(x)=x^2-(2a+2)x+a^2+2a$에 대하여 분수방정식

$$\frac{f(x)}{x-b}=\frac{f(x)}{x-c}$$

의 해가 모두 무연근이라고 한다. 이 때, b^2+c^2의 최솟값은? (단, a, b, c는 실수이다.)[4점−1004−종로]

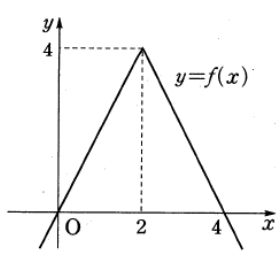
① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

23. 그림은 함수 $f(x)=-|2x-4|+4$의 그래프이다. 이때, 분수방정식

$$\frac{4-x}{(f\circ f)(x)}-\frac{(f\circ f)(x)}{x}=0$$

의 서로 다른 실근의 개수는?

[4점−1005−메가]



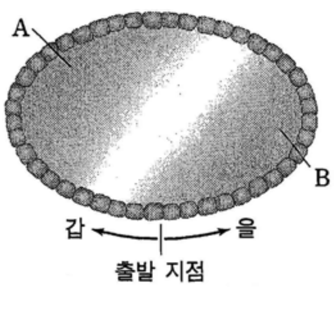
① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

24. A, B 두 사람이 하는 일이 있다. 만일 A가 혼자서 하면 두 사람이 함께 일하는 것보다 8시간이 더 걸리고, B가 혼자서 하면 두 사람이 함께 일하는 것보다 2시간이 더 걸린다고 한다. 이 일을 a혼자 할 때 걸리는 시간은?[4점–1003–비상]

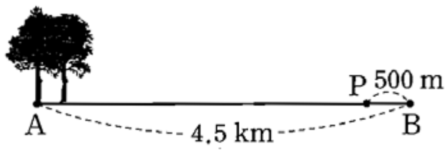
① 20시간 ② 18시간 ③ 15시간
④ 12시간 ⑤ 10시간

25. 하루에 400대 이상의 자동차를 각각 생산하는 두 공장 A, B가 있다. A공장에서는 B공장보다 한 시간 동안 4대의 자동차를 더 생산한다. 또, A공장에서 960대의 자동차를 생산하는데 걸리는 시간은 B공장에서 600대의 자동차를 생산하는데 걸리는 시간보다 10시간이 더 걸린다. B공장에서 한 시간 동안 생산하는 자동차가 x대 일 때, x의 값을 구하시오. (단, 두 공장 모두 하루에 24시간씩 가동된다.)[4점–1005–중앙]

26. 그림과 같이 둘레의 길이가 420m인 호수 주위를 갑과 을 두 학생이 일정한 속력으로 움직이고 있다. 갑의 속력은 a(m/초)($a>1$) 이고 을의 속력은 $2a+2$(m/초)이다. 두 사람이 출발 지점에서 동시에 서로 반대의 방향으로 출발하여 A 지점에서 처음으로 만났고, 이 순간 을은 방향을 바꾸어 갑과 같은 방향으로 움직여 B 지점에서 처음으로 만났다. 두 사람이 A 지점에서 만난 후부터 B 지점에서 다시 만날 때까지 걸린 시간이 출발 후 A 지점에서 처음으로 만날 때까지 걸린 시간보다 40초가 더 걸렸다고 한다. 갑이 호수 주위를 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간은 몇 초인지 구하시오.[4점–1005–비상]



27. 어떤 유원지에 그림과 같이 두 지점 A와 B를 잇는 길이가 4.5km인 산책로가 있다.



순이와 철수는 동시에 A지점을 출발하여 각각 일정한 속력으로 걷기 시작하였다. 철수는 순이보다 매시 2km 빠른 속력으로 걸어서 B지점에 도착하자마자 바로 되돌아 걷기 시작하여 B지점으로부터 500m 떨어진 P지점에 도착하였고, 철수가 P지점에 도착한지 20분이 지난 후 순이가 처음으로 P지점에 도착하였다. 순이와 철수의 속력이 각각 매시 $a$km, $b$km일 때, $a+b$의 값은?[4점–1007–메가]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

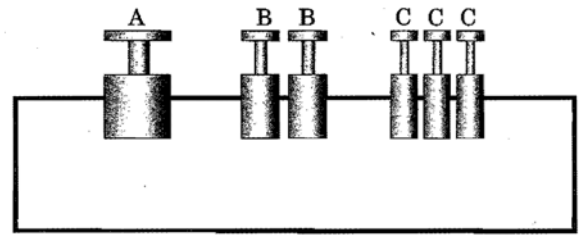
28. 다음은 두 사람 A, B가 어떤 일정한 양의 일을 완성하는 데 걸리는 시간을 조사한 결과이다.

(가) A, B가 함께 완성하는 데 걸리는 시간은 A 혼자 완성하는 데 걸리는 시간보다 16시간 적게 걸린다.
(나) A, B가 함께 완성하는 데 걸리는 시간은 B 혼자 완성하는 데 걸리는 시간보다 9시간 적게 걸린다.

A, B가 시간당 하는 일의 양이 각각 일정하다고 할 때, 이 일을 A, B가 함께 완성하면 k시간 걸린다. k의 값을 구하시오.
[4점–1004–종로]

29. 두 종류의 컴퓨터 A, B를 이용하여 어떤 데이터 처리 작업을 하려고 한다. 이때, A컴퓨터 1대와 B컴퓨터 1대를 동시에 이용하여 작업하면 A컴퓨터 1대만 이용할 때보다 4시간이 덜 걸리고, B컴퓨터 1대만 이용할 때보다 16시간이 덜 걸린다고 한다.
이 데이터 처리 작업을 A컴퓨터 1대와 B컴퓨터 2대를 동시에 이용하여 작업하면 a시간이 걸린다고 할 때, a의 값을 구하시오. (단, 같은 종류의 컴퓨터는 처리 속도가 모두 같다.)[4점 –1010–메가]

30. 그림과 같이 세 종류의 수도꼭지 A, B, C가 각각 1개, 2개, 3개 있고 이들은 같은 물탱크에 연결되어 있다.



A수도꼭지 1개로 이 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간은 B수도꼭지를 2개 사용하여 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간보다 1시간 더 걸리고, C수도꼭지를 3개 사용하여 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간보다 2시간 더 걸린다고 한다. 또, A수도꼭지 1개와 B수도꼭지 2개를 동시에 사용하여 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간은 B수도꼭지 1개, C수도꼭지 3개를 동시에 사용하여 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간과 같다고 한다. A수도꼭지 1개로 이 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간은? (단, $\sqrt{5}=2.24$로 계산하고, 각각의 수도꼭지는 시간 당 나오는 물의 양이 일정하며, 같은 종류의 수도꼭지는 시간 당 나오는 물의 양이 동일하다.)[4점 –1011–대성]

① 2.24시간 ② 3.36시간 ③ 4.24시간
④ 4.48시간 ⑤ 5.24시간

무리방정식

1. 무리방정식 $\sqrt{x+4}+2=x$의 해를 α라 할 때, 다음 중 α가 속하는 집합은?[2점–1003–중앙]

① $\{x|-1<x<2\}$ ② $\{x|1<x<4\}$
③ $\{x|3<x<6\}$ ④ $\{x|5<x<8\}$
⑤ $\{x|6<x<9\}$

2. 무리방정식 $x-\sqrt{10-3x}=2$를 만족시키는 x의 값을 구하시오.[3점–1005–대성]

3. 함수 $f(x)=\log_3\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 $f^{-1}(1)$의 값은?[3점–1003–대성]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

4. x에 대한 방정식 $\sqrt{4-2a(2+x)}=x$의 실근이 존재하기 위한 실수 a의 최댓값은?[3점–1005–메가]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

5. 무리방정식 $x^2-x-8=\sqrt{(x+2)(x-3)}$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값들의 곱은?[3점–1006–종로]

① -10 ② -8 ③ -6
④ 2 ⑤ 5

6. 무리방정식 $2x-1=\sqrt{x+7}$ 의 실근을 $x=\alpha$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [2점–1010–비상]

① $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{2}$ ② $1<\alpha<2$ ③ $\frac{3}{2}<\alpha<\frac{5}{2}$
④ $2<\alpha<3$ ⑤ $\frac{5}{2}<\alpha<\frac{7}{2}$

7. 무리방정식 $\sqrt{x^2-x}=-2x^2+2x+1$의 모든 실근의 합은? [3점–1010–중앙]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

8. x에 대한 방정식 $x^2-4x+\sqrt{2x^2-8x}=4$의 모든 실근의 합

은?[3점–1005–중앙]

① 1　　② 2　　③ 4
④ 8　　⑤ 10

9. 무리방정식

$$\sqrt{4x^2-5x+7}-4x^2+5x=1$$

의 모든 실근의 곱은?[3점–2010–대수능]

① $-\frac{1}{2}$　　② $-\frac{3}{2}$　　③ $-\frac{5}{2}$
④ $-\frac{7}{2}$　　⑤ $-\frac{9}{2}$

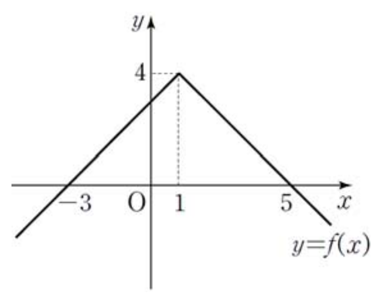
10. 무리방정식 $6x-1=\sqrt{5-12x}$ 의 실근을 α라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?[3점–1011–중앙]

① $-\frac{1}{2}<\alpha<-\frac{1}{4}$　　② $-\frac{1}{4}<\alpha<0$
③ $0<\alpha<\frac{1}{4}$　　④ $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{4}$

11. 무리방정식 $(\sqrt{x-1})^3-6\sqrt{x-1}=x-1$의 모든 실근의 합을 구하시오.[3점–1006–평가원]

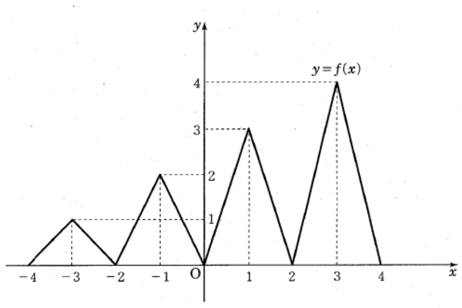
12. 무리방정식 $\sqrt{1-x^2}=2x+a$가 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위가 $m\le a\le M$일 때, m^2+M^2의 값을 구하시오.
[3점–1009–종로]

13. 그림과 같이 함수 $f(x)=a|x-b|+c$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고 두 점 $(-3,0)$, $(5,0)$을 지난다. $f(1)=4$일 때, 방정식 $2f(x)+1=\sqrt{13-4f(x)}$의 모든 실근의 곱은?[3점–1008–비상]



① -15　　② -8　　③ 0
④ 5　　⑤ 8

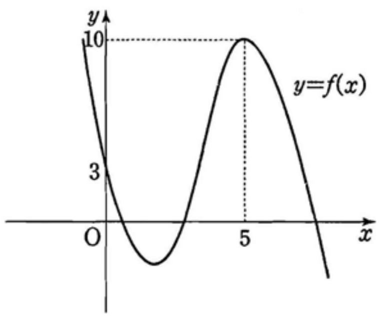
14. 구간 $[-4,\ 4]$에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x)-x+3\sqrt{f(x)-x-1}=5$의 서로 다른 실근의 개수는?[3점–1003–대성]

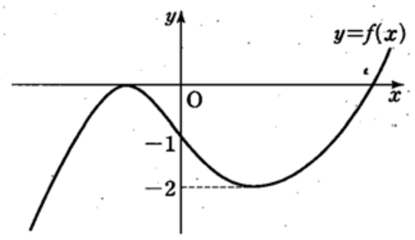
① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

15. 두 점 $(0,\ 3)$, $(5,\ 10)$을 지나고 x축과 서로 다른 세 점에서 만나는 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 무리방정식 $f(x)=3+\sqrt{f(x)-1}$ 의 서로 다른 실근의 개수는?[3점 –1005–비상]



① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

16. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)+3=\sqrt{f(x)+5}$ 의 서로 다른 실근의 개수는?
[3점–1003–종로]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 0

17. 무리방정식 $x^2-5x+\sqrt{x^2-5x+3}=3$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.[3점–1011–대전교]

18. 무리방정식 $\sqrt{(2a-11)x+2a-10}=x$가 실근을 갖기 위한 실수 a의 최솟값을 구하시오.[3점–1004–대성]

19. 무리방정식 $\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}=x$ 의 해를 α 라고 할 때, 16α 의 값을 구하시오.[3점–1007–교육청]

20. $x,\ y$에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{x^2+y^2}=-2 \\ x+y+2xy=-3 \end{cases}$$

을 만족시키는 실근을 $x=\alpha,\ y=\beta$라 할 때, $-30\alpha\beta$의 값을 구하시오.[3점–1003–종로]

21. 연립방정식

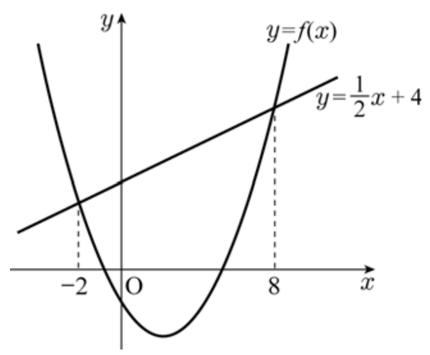
$$\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \\ x^2-y^2=64 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.
[3점–1004–메가]

22. 연립방정식 $\begin{cases} y=2\sqrt{x} \\ y=1+\sqrt{2x-k} \end{cases}$ 가 서로 다른 두 실근을 가지기 위한 상수 k의 값의 범위를 구하면 $a \le k < b$이다. $12(a+b)$의 값을 구하시오.[4점−1007−종로]

23. $f(x)=-|x-1|+4$일 때, 방정식 $2f(x)+1=\sqrt{13-4f(x)}$의 모든 실근의 합을 구하시오.
[3점−1003−비상]

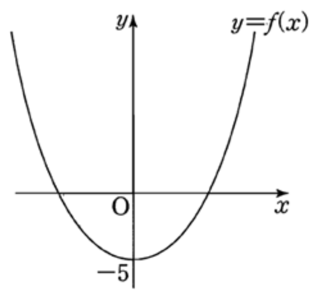
24. 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+4$는 두 점에서 만나고 그 교점의 x 좌표는 -2, 8이다.



무리방정식 $f(2x)-x-2=\sqrt{f(2x)-x}$ 의 모든 실근의 합을 구하시오.[3점−1010−교육청]

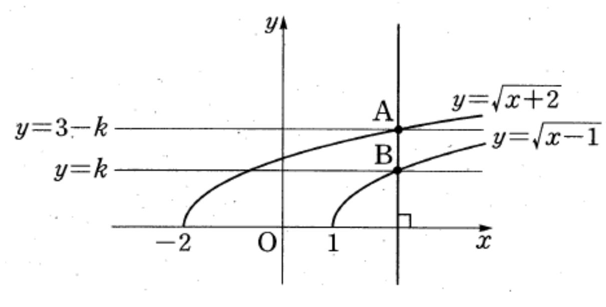
25. 방정식 $\sqrt{|x-2|}=x-k$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 k는 2개 존재한다. 그 두 수를 $a, b(a<b)$라 할 때, $4a+b$의 값을 구하시오.[3점−1005−종로]

26. 꼭짓점의 좌표가 $(0,-5)$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 방정식 $|f(x)|-2=\sqrt{4-f(x)}$의 서로 다른 실근의 개수는?
[3점−1009−평가원]



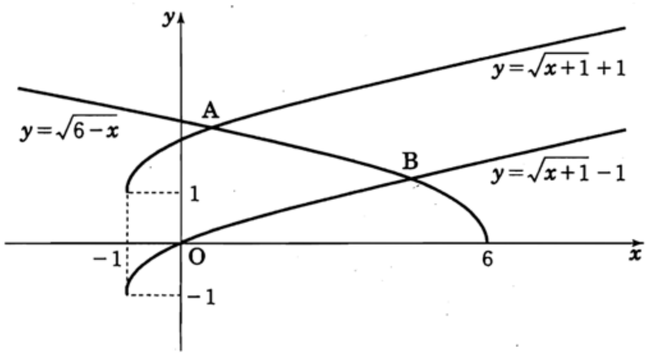
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

27. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 직선 $y=3-k$의 교점을 A라 하고, 곡선 $y=\sqrt{x-1}$과 직선 $y=k$의 교점을 B라 하자. 직선 AB가 x축에 수직일 때, 상수 k의 값은? $\left(단,\ 0<k<\frac{3}{2}\right)$
[3점−1004−메가]



① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

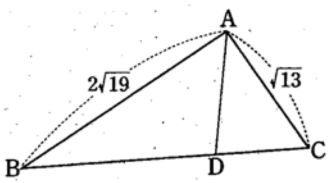
28. 그림과 같이 무리함수 $y=\sqrt{6-x}$ 의 그래프와 두 무리함수 $y=\sqrt{x+1}+1$, $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프의 교점을 각각 A, B라 하자.



두 점 A, B 의 x좌표의 합은?[3점–1006–대성]

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$
④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6

29. 그림의 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2\sqrt{19}$, $\overline{AC}=\sqrt{13}$이고, $\overline{BD}=\overline{AD}+2=\overline{CD}+3$일 때, 선분 BC의 길이는? (단, D는 변 $\overline{BC}$ 위의 점이다.) [3점–1003–비상]

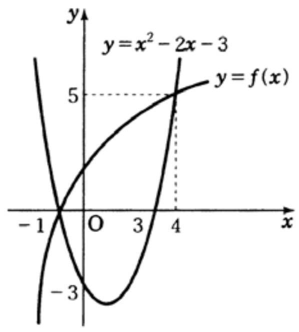


① 4 ② 5 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

30. 무리방정식 $x^2+1=2\sqrt{x^2+1-a}$가 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위는?[4점–1003–중앙]

① $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{4}$ ② $\frac{1}{2}<a<1$
③ $\frac{1}{2}<a<2$ ④ $\frac{3}{4}<a<1$
⑤ $1<a<2$

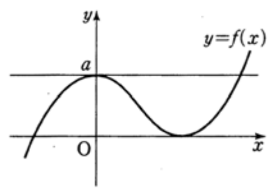
31. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=x^2-2x-3$이 그림과 같이 두 점 $(-1, 0)$, $(4, 5)$에서 만날 때, 방정식 $\sqrt{f(x^2+5x)+4}=x^2+5x-1$의 모든 근의 합은?[4점–1004–대성]



① -5 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 5

32. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 x축 및 직선 $y=a(a>0)$에 접하고 있다. 방정식

$f(x)=\sqrt{f(x)}+2$



의 서로 다른 실근의 개수를 $N(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1004–종로]

<보 기>

ㄱ. $N(4)=2$이다.
ㄴ. $N(a)$의 최솟값은 1이다.
ㄷ. $N(a)$의 최댓값은 5이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33. 무리방정식 $x+\sqrt{x+2}=a$의 한 근이 2이고, 분수방정식 $\frac{(x-b)(x-c)}{x+2}=0$을 만족시키는 x의 값이 모두 무리방정식 $a+\sqrt{x+2}=x$를 만족시킬 때, 세 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은? (단, $b<c$)[4점–1008–대성]

① -2 ② 2 ③ 4
④ 9 ⑤ 13

고차부등식

1. x에 대한 부등식 $x^3+ax+b<0$의 해가 $x<-1$이 되도록 하는 상수 a의 최솟값은?[3점-1003-대성]

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{3}{4}$　⑤ $-\frac{4}{5}$

2. x에 대한 부등식 $x(x-a)(x-1)^2<0$을 만족시키는 자연수의 개수가 4일 때, 실수 a의 최댓값은?[3점][2010년6월 평가원]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

3. 연립부등식 $\begin{cases} x^3-2x^2-5x+6>0 \\ (x-a)(x-a-2)\le 0 \end{cases}$의 정수해가 1개뿐이기 위한 정수 a의 개수는?[3점-1003-비상]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

4. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} (x-1)(x-12)(x-a)>0 \\ (x-2)(x-10)<0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x가 4개 뿐일 때, 상수 a값의 범위는 $p<a\le q$이다. $p+q$의 값을 구하시오.[3점-1003-대성]

5. 두 집합

$A=\{x \mid (x+1)^2(x-2)(x-7)\le 0\}$
$B=\{x \mid (x+2)(x-a)<0,\ a$는 $a>-2$인 상수$\}$

에 대하여 $A\cap B$에 속하는 정수 x의 개수가 6이 되도록 하는 실수 a의 범위가 $\alpha<a\le\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.
[3점-1004-종로]

6. 두 집합

$A=\{x \mid (x+1)(x-a)(x-a-2)\le 0,\ 1<a<3,\ x$는 정수$\}$
$B=\{x \mid (x^2+x+1)(x^2-3bx+2b^2)\le 0,\ b>0,\ x$는 정수$\}$

에 대하여 집합 C는
$C=\{(a,\ b) \mid n(A\cap B)=2\}$
일 때, 집합 C를 만족하는 $(a,\ b)$가 좌표평면에서 나타내는 영역의 넓이는? (단, $n(S)$는 집합 S의 원소의 개수이다.)[4점-1003-종로]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$
④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

분수부등식

1. 부등식 $\frac{4x}{x-1} \le 3$ 을 만족시키는 모든 정수 x 값의 합을 k 라 할 때, k^2 의 값을 구하시오.[3점-1005-비상]

2. 분수부등식 $x-4 \le \frac{20}{x-3}$ 을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오.[3점][2010년 9월 평가원]

3. 분수부등식 $\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-2} \le 0$ 을 만족하는 정수 x의 개수는?

[3점-1007-교육청]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

4. 분수부등식 $\frac{x-6}{x-5} < \frac{x-7}{x-6}$ 의 해가 $a<x<b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.[3점-1003-대성]

5. 부등식 $\log\frac{x(x-5)}{(x-3)^2} \le 0$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값들의 합은?[3점-1011-중앙]

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

6. 분수부등식 $\frac{(x-20)(x-10)}{x-12} \le 0$ 을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오.[3점-1008-비상]

7. 부등식 $\frac{2}{x+1}+x \ge 2$를 만족시키는 정수 x의 최솟값은?

[3점-1008-중앙]

① -3 ② -2 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

8. 상수 a에 대하여 집합

$$A=\left\{x \;\middle|\; \frac{(x-1)(x-a)}{(x-5)} \le 0,\ x\text{는 자연수}\right\}$$

의 원소의 개수가 5일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하시오.

[3점-1010-대성]

9. 실수 a에 대하여 연립부등식

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3} \geq 0 \\ (x-a)(x^2-x+1)<0 \end{cases}$$

을 만족시키는 자연수 x가 3개일 때, a의 최댓값은?

[3점-1011-대전교]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

10. x에 대한 부등식 $\dfrac{(x-10)^2(x-a)^3}{x-1}<0$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 20일 때, 자연수 a의 값을 구하시오.[3점-1009-중앙]

11. 집합 $\{x\,|\,|x| \leq 10,\ x\text{는 정수}\}$의 원소 중에서 분수부등식 $\dfrac{(x^3+1)(x^2-1)}{(x^3-1)(x+2)}>0$을 만족시키는 것의 개수를 구하시오.

[3점-1005-중앙]

12. 두 집합 $A=\{x\,|\,x^3-7x-6>0\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x+2}{x-5} \leq 0\right\}$에 대하여 집합 $A\cap B$에 속하는 정수의 개수는?[3점-1005-대성]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

13. 두 집합$A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+4}>0\right\}$, $B=\{x\,|\,x^2+px+q \leq 0\}$에 대하여 $A\cup B=\{x\,|\,x>-4\}$, $A\cap B=\{x\,|\,-1<x \leq 6\}$일 때, 두 상수 p, q의 곱 pq의 값을 구하시오.[3점-1007-대성]

14. 부등식 $\log_2 x-4\log_x 2<3$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수를 구하시오.[3점-1006-대성]

15. 부등식 $\dfrac{(x^2-4x+3)\,(x^2-x+2)}{|x-1|\,(x^2-11x+28)} \leq 0$ 을 만족시키는 모든 정수 x 값의 합을 구하시오.[3점-1009-대성]

16. 연립부등식 $\begin{cases} x^4-50x^2+49 \le 0 \\ \dfrac{(x-5)(x+1)}{x-3} \ge 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 모든 정수 x의 합을 구하시오.[3점-1004-교육청]

17. 두 부등식 $\begin{cases} x^3-2x^2-5x+6 \ge 0 \\ \dfrac{x-2}{|x+1|} \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$ 을 동시에 만족시키는 실수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은? [3점-1008-종로]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

18. 두 집합

$$A=\{x\,|\,x^3-3x^2-4x+12 \le 0\}$$
$$B=\left\{x\,\middle|\,x-6 \ge \frac{kx-4k-12}{x+2}\right\}$$

에 대하여 집합 $A\cap B$의 원소가 한 개뿐일 때, 상수 k의 값을 구하시오.[3점-1007-메가]

19. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-2x+2} \ge 0 \\ \dfrac{x^2-4}{|x|-5} \le 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 값의 합은?[3점-1003-종로]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

20. 분수부등식 $\dfrac{x-6}{(x-1)(x-4)} \ge 0$과 무리방정식 $x=\sqrt{a(3x-2a)}$ 를 동시에 만족시키는 실수 x의 값이 단 한 개가 되도록 하는 자연수 a의 값의 합은? [3점-1010-종로]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

21. 두 자연수 a, b에 대하여 분수부등식 $\dfrac{x-b}{x(x-a)^2} \le 0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 $N(a,\ b)$로 나타낼 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1005-메가]

<보 기>

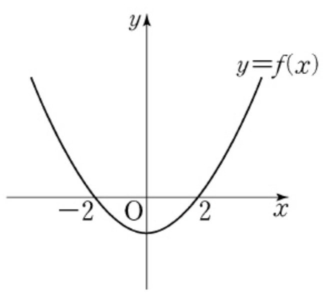
ㄱ. $N(2,\ 1)=1$
ㄴ. $N(a,\ a)=a-1$
ㄷ. $N(a,\ b)=N(b,\ a)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 네 상수 α, β, γ, δ에 대하여 부등식 $\dfrac{(x-\gamma)(x-\delta)}{(x-\alpha)(x-\beta)} \le 0$의 해가 $[x]^3-[x]^2-2[x]=0$의 해와 같을 때, $\alpha+\beta-\gamma-\delta$의 값은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않는 최대의 정수이다.)[3점-1003-비상]

① -3　② -1　③ 1
④ 3　⑤ 5

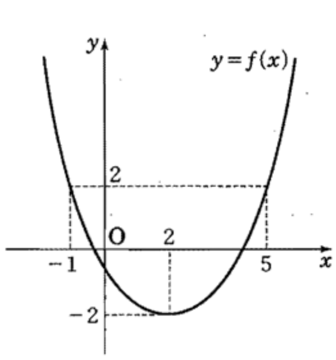
23. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 두 집합



$A=\left\{x \mid \dfrac{f(x+1)}{f(x-1)} \le 1\right\}$,
$B=\{x \mid -5<x<5\}$
에 대하여 집합 $A\cap B$에 속하는 정수의 개수는?
(단, $f(2)=f(-2)=0$)[3점-1006-평가원]

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

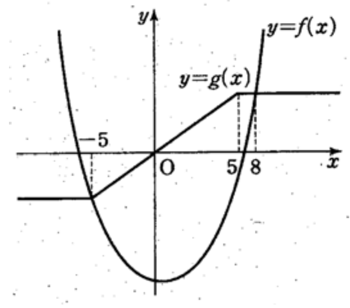
24. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식



$\dfrac{1}{f(x)+2}-\dfrac{1}{f(x)-2} \ge 0$을 만족시키는 모든 정수 x값의 합은?
[3점-1011-대성]

① 14　② 12
③ 10　④ 8　⑤ 6

25. 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\left|\dfrac{x+5}{2}\right|-\left|\dfrac{x-5}{2}\right|$가 주어져 있고, $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 두 그래프의 교점의 x좌표는 -5와 8이다.



이때 집합
$A=\{x \mid (x+20)(x-20)\le 0,\ x\text{는 정수}\}$
$B=\left\{x \;\middle|\; \dfrac{f(x+3)}{g(x)} \le 1\right\}$
에 대하여 집합 $A\cap B$의 원소의 개수를 구하시오.[3점-1003-종로]

26. 집합 $A=\left\{x \;\middle|\; \left|\dfrac{x-a}{x}\right| > 2\right\}$의 원소 중 정수가 4개가 되도록 하는 양수 a의 값의 범위는?[4점-1004-메가]

① $1<a\le 2$　② $2<a\le 3$　③ $3<a\le 4$
④ $4<a\le 5$　⑤ $5<a\le 6$

27. 부등식 $\dfrac{1}{x-6}-\dfrac{1}{x-3}<0$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 곱을 구하시오.[4점-1003-중앙]

28. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{15}{x-4}+2x>-5 \\ x^3-ax^2+2x-2a<0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x가 3개가 존재하도록 하는 정수 a의 값들의 합을 구하시오.
[4점–1003–중앙]

29. 부등식 $\dfrac{x}{(x+1)(x-a)} \leq 0$ 과 $x^2+(a+1)x+a \leq 0$ 을 동시에 만족시키는 정수 x 가 단 한 개가 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?[3점–1006–종로]

① $2 \leq a < 3$ ② $1 < a \leq 3$ ③ $1 < a < 2$
④ $a \geq 2$ ⑤ $a > 1$

30. x에 대한 분수부등식

$$1+\frac{k}{x-k} \leq \frac{1}{x-1}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이 되도록 자연수 k의 값을 구하시오.[3점–2010–대수능]

31. 정수 k에 대하여 부등식

$$\frac{(x-20)(x-10)}{x-k} \leq 0$$

을 만족시키는 자연수 x의 개수를 $f(k)$라 하자. 이때, $f(k)=15$를 만족시키는 모든 k의 값의 합은?[4점–1010–비상]

① 45 ② 47 ③ 49
④ 51 ⑤ 53

32. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k=\left\{x \,\middle|\, \frac{(x-1)(x-2k)}{(x-k)^k} \leq 0,\ x \text{ 는 자연수}\right\}$$

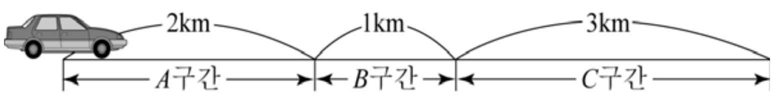
라고 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)[4점–1005–비상]

<보 기>

ㄱ. $n(A_1 \cup A_2)=4$
ㄴ. k가 짝수일 때 $n(A_k \cup A_{k+1})=2k+1$이다.
ㄷ. k가 1보다 큰 홀수일 때 $n(A_k \cup A_{k+1})=2(k+1)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33. 자동차의 성능 실험을 위해 그림과 같이 거리가 2km, 1km, 3km인 구간 A, B, C를 주행하였다. A 구간에서의 평균 속력이 C 구간에서의 평균 속력보다 20 km/시 빠르고, B 구간에서의 주행시간은 36초이다. 전체 6km인 구간에서의 평균 속력이 100 km/시 이상이 되기 위한 A 구간에서의 평균 속력의 최솟값은 $a+20\sqrt{b}$ (km/시)이다. 이 때, ab의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)[4점][2010년 7월 교육청]



삼각함수의 덧셈정리

1. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 일 때, $\tan 2\alpha$의 값은?

[3점-1005-중앙]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 2

2. $\sin 20^\circ = a$, $\sin 65^\circ = b$일 때, 다음 중 $\cos 20^\circ$의 값과 같은 것은?[3점-1010-메가]

① $b-a$ ② $b-\sqrt{2}a$ ③ $2\sqrt{b}-a$
④ $\sqrt{2}a+b$ ⑤ $a+\sqrt{2}b$

3. $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=2$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? $\left(단, 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$

[3점-1009-대성]

① $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

4. $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $\sec\theta$의 값은? $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

[3점-2010-대수능]

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

5. $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$일 때, $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$의 값은?[3점-1003-대성]

① $-\frac{5}{9}$ ② $-\frac{4}{9}$ ③ $-\frac{1}{9}$
④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

6. $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

[3점-1008-중앙]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

7. $\cos\theta = \frac{1}{3}$일 때, $\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta\cos 3\theta - \cos\theta\sin 3\theta}$의 값은?

[3점-1011-대성]

① $\frac{16}{9}$ ② $\frac{14}{9}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{10}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

8. $\sin 2\theta = \frac{1}{4}$ 일 때, $\sin\theta + \cos\theta$ 의 값은? $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

[3점-1010-교육청]

① $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ 1
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

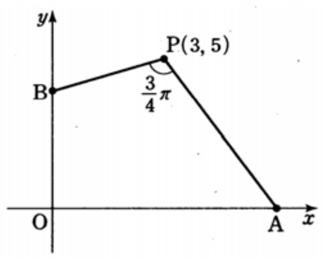
9. $\tan x = 2$, $\tan(x+y) = 4$일 때, $\tan y$의 값은?[3점-1009-종로]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

10. 함수 $f(x) = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$일 때, $f^{-1}(2) + f^{-1}(3)$의 값은?[3점-1003-종로]

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{2\pi}{3}$
④ $\frac{3\pi}{4}$ ⑤ $\frac{5\pi}{6}$

11. 그림과 같이 좌표평면 위에서 점 $\mathrm{P}(3,\ 5)$가 x축 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$과 y축 위의 점 $\mathrm{B}(0,\ 4)$에 대하여 $\angle \mathrm{APB} = \frac{3}{4}\pi$를 이루고 있다. 이때, 상수 a의 값을 구하시오.[4점-1010-종로]

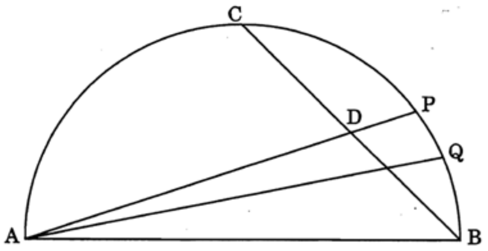


12. $\tan 2\theta = \frac{3}{4}$일 때, $\sin\theta$의 값은?$\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

[3점-1009-중앙]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB의 중점 C에 대하여 선분 BC의 중점을 D라 하고 직선 AD와 반원이 만나는 점을 P라 하자. 호 BP 위의 점 Q에 대하여 $\tan(\angle QAB)=\frac{1}{5}$일 때, $\tan(\angle PAQ)$의 값은?[3점-1006-대성]



① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

14. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=(3\sin x+4\cos x)^2+6\sin x+8\cos x$$

의 최댓값과 최솟값의 합은?[3점-1004-메가]

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

15. $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$에 대하여 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=-\frac{1}{2}$ 일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값은?[3점-1004-종로]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{10}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

16. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때, $\cos 2\theta$ 의 값은?

$\left(\text{단, } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$ [3점-1003-비상]

① $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

17. $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=1$일 때, $2\cos\theta\cos 2\theta$ 의 값은?

$\left(\text{단, } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$[3점-1011-대전교]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. 함수 $f(x)=2\sin x+\cos x$ $(0\le x\le\pi)$가 $x=\alpha$ 에서 최댓값을 가지고 $x=\beta$ 에서 최솟값을 가질 때, $\sin(\alpha+\beta)$ 의 값은?

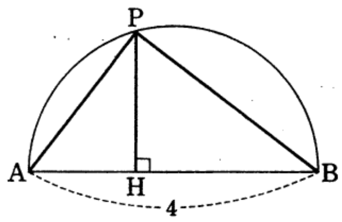
[3점-1004-대성]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

19. 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 있다. x^2+2xy의 값이 최대일 때, $(x+2y)^2$의 값은?[3점–1007–대성]

① $4-2\sqrt{2}$ ② $4-\sqrt{2}$ ③ $2+2\sqrt{2}$
④ $4+\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{2}$

20. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 한 점 P에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PH}}$의 최댓값은? [3점–1011–종로]



① $8+\sqrt{17}$ ② $16+2\sqrt{2}$ ③ $2+16\sqrt{2}$
④ $4+2\sqrt{17}$ ⑤ $8+2\sqrt{17}$

21. 두 함수 $f(x)=3\sin x+1,\ g(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$에 대하여 $f(x)+g(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 이때 M^2+m^2의 값을 구하시오.[4점–1004–종로]

22. $A=30^\circ$인 삼각형 ABC에서 $\cos B\sin C$의 최솟값은? [3점–1004–메가]

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

23. $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때, 함수 $f(x)=\frac{\cot x-\tan x+2\sqrt{3}}{\tan x+\cot x}$의 값이 최대가 되도록 하는 x 값은 p이다. 이때 $pf(p)$의 값은? [4점–1008–종로]

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ $\frac{3\pi}{4}$

24. $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$인 α_n에 대하여 $\tan\alpha_n = \frac{1}{n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 할 때, 다음은 $\tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=$ (가) 임을 증명한 것이다.

<증 명>

$\tan\alpha_1=1,\ \tan\alpha_2=\frac{1}{2},\ \tan\alpha_3=\frac{1}{3},\ \tan\alpha_4=\frac{1}{4}$이므로

$\tan(\alpha_1+\alpha_2)=$ (나) 이고 $\tan(\alpha_3+\alpha_4)=$ (다) 이다.

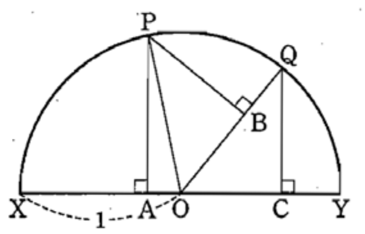
$\therefore\ \tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\tan\{(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4)\}$

$=$ (가)

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1003-중앙]

	(가)	(나)	(다)
①	-4	3	$\frac{7}{11}$
②	-4	3	$\frac{11}{7}$
③	4	-3	$\frac{7}{11}$
④	4	-3	$\frac{11}{7}$
⑤	4	3	$\frac{7}{11}$

25. 그림과 같이 반지름의 길이가 1 이고, $\overline{XY}$를 지름으로 하는 반원의 호 XY 위에 두 점 P, Q 가 있다. 또, 점 P에서 $\overline{XY}$, $\overline{OQ}$에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하고, 점 Q에서 $\overline{XY}$에 내린 수선의 발을 C라 하자.



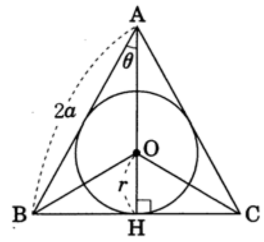
$$\frac{\overline{QC}(\overline{OA}+\overline{OB})}{\overline{PA}+\overline{PB}}= \text{(가)}$$

일 때, 다음 중 (가) 안에 알맞은 것은? (단, $\overset{\frown}{PX} < \overset{\frown}{PY}$ 이고, 점 O는 반원의 중심이다.)[4점-1006-종로]

① $\overline{AC}$ ② $\overline{AX}$ ③ $\overline{CY}$
④ $\overline{OB}$ ⑤ $\overline{OC}$

26. 다음은 $\overline{AB}=\overline{AC}=2a$ 인 이등변삼각형 ABC 에 내접하는 원의 넓이의 최댓값을 구하는 과정이다.

삼각형 ABC 에 내접하는 원의 중심을 O 라 하고, 원 O 의 반지름의 길이를 r, 중심 O 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H, $\angle BAH=\theta$ 라 하면
$\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle ACO+\triangle BCO$
$=$ (가)



한편, 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=2a$ 이고, $\angle BAC=2\theta$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 4a^2\sin 2\theta$ 이다.

즉, (가) $=2a^2\sin 2\theta$ 이므로 $r=\frac{a\sin 2\theta}{1+\sin\theta}$

$f(\theta)=\frac{a\sin 2\theta}{1+\sin\theta}$ 라 하면 $f(\theta)$ 는 $\sin\theta=$ (나) 일 때 최대이므로 구하는 내접원의 넓이의 최댓값은 $(10\sqrt{5}-22)\pi a^2$ 이다.

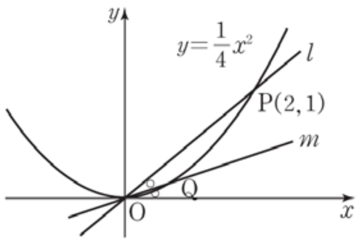
위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?[3점-1004-대성]

	(가)	(나)
①	$ar(1+\sin\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
②	$ar(1+\sin\theta)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
③	$ar(2+\sin\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
④	$2ar(1+\sin\theta)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
⑤	$2ar(1+\sin\theta)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

27. 직선 $y=3x$를 원점을 중심으로 시계방향으로 각 θ만큼 회전시켰더니 원 $(x-\sqrt{2})^2+y^2=1$과 제1사분면에서 접하게 되었다. $\tan\theta=\frac{b}{a}$(a, b는 서로소인 자연수)라 할 때, $a+b$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$[3점-1005-종로]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

28. 그림과 같이 원점을 지나는 직선 l이 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 점 P$(2,\ 1)$에서 만난다. 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 이등분하는 직선 m이 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 만나는 점을 Q라 할 때, 점 Q의 x좌표는? (단, Q는 제1사분면 위의 점이다.)[3점-1010-비상]



① $4(\sqrt{5}-2)$　② $2(\sqrt{5}-2)$　③ $\sqrt{5}-2$
④ $2(\sqrt{3}-1)$　⑤ $\sqrt{3}-1$

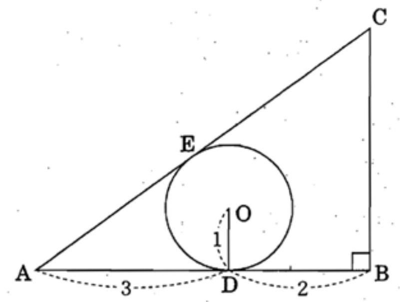
29. $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{4}$일 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은? $\left(\text{단, } \frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi, 0\le\beta\le\frac{\pi}{2}\right)$[3점-1004-교육청]

① $\frac{3-\sqrt{14}}{12}$　② $\frac{-4+\sqrt{14}}{12}$　③ $\frac{4-\sqrt{14}}{12}$
④ $\frac{-3+\sqrt{14}}{12}$　⑤ $\frac{3+\sqrt{14}}{12}$

30. 좌표평면 위의 한 점 A$(-6,-2)$를 지나고 원 $C:\ x^2+y^2=16$에 접하는 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값은?[3점-1005-비상]

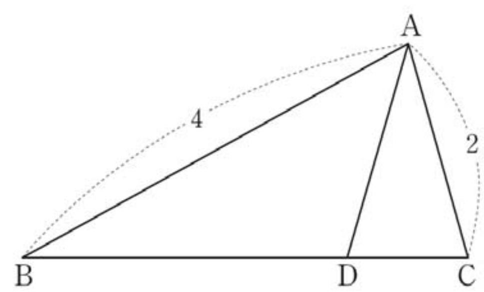
① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{\sqrt{10}}{5}$　③ $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
④ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$　⑤ $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

31. 그림과 같이 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 반지름의 길이가 1인 원 O가 두 변 AB, AC와 각각 점 D, E에서 접하고 있다. $\overline{AD}=3$, $\overline{DB}=2$일 때, 변 BC의 길이는?[3점-1005-대성]



① 3　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{15}{4}$　⑤ 4

32. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=2$인 삼각형 ABC에서 $\angle DAB=2\angle CAD$가 되도록 선분 BC 위에 점 D를 잡으면 삼각형 ADC는 $\overline{AD}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이 된다. $\cos(\angle CAD)=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$일 때, abc의 값을 구하시오. (단, $a,\ b,\ c$는 한자리의 자연수이다.)[3점-1008-비상]



33. $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$일 때, $\sin\theta\cos2\theta$의 값은? $\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

[3점-1009-평가원]

① $\frac{2}{27}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{4}{27}$

④ $\frac{5}{27}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

34. $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$일 때, $\cos 2\theta$의 값은? $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

[3점-1003-중앙]

① $-\frac{24}{25}$ ② $-\frac{16}{25}$ ③ $-\frac{7}{25}$

④ $\frac{7}{25}$ ⑤ $\frac{24}{25}$

35. 함수 $f(x) = 2\sin x - 2\sin\left(x + \frac{4}{3}\pi\right)$의 주기는 $a\pi$이고, 최댓값은 b이다. $a^2 + b^2$의 값은?[3점-1003-종로]

① 12 ② 14 ③ 16

④ 18 ⑤ 20

36. 함수 $f(x) = 3 + 4\sin x\cos x$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1003-중앙]

<보 기>

ㄱ. 주기는 π이다.
ㄴ. 최댓값은 7이다.
ㄷ. 최솟값은 1이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37. 함수 $f(x) = 3\sin^2 x + 4\sin x\cos x - \cos^2 x$ 에 관한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1003-비상]

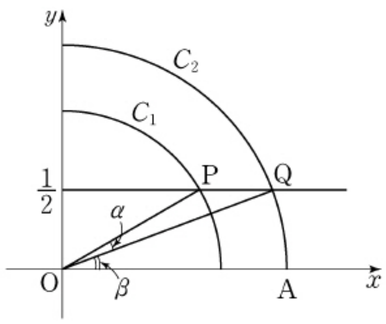
<보 기>

ㄱ. 주기는 π 이다.
ㄴ. $x = \frac{3\pi}{8}$일 때 최댓값을 가진다.
ㄷ. 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 $4\sqrt{2}$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

38. 좌표평면에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 1, $\sqrt{2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 직선 $y=\frac{1}{2}$이 원 C_1, C_2와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. 점 A$(\sqrt{2},\ 0)$에 대하여 $\angle \mathrm{QOP}=\alpha$, $\angle \mathrm{AOQ}=\beta$라고 할 때, $\sin(\alpha-\beta)$의 값은? [3점-1006-평가원]



① $\frac{3-\sqrt{14}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}}{8}$
④ $\frac{3-\sqrt{21}}{8}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{21}}{8}$

39. $0 \le x \le 2\pi$일 때, $\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{1}{3+\cos^2 x}$의 최솟값은? [4점-1003-종로]

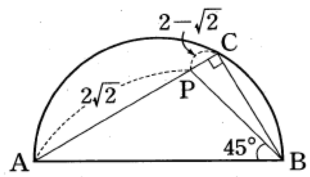
① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

40. θ에 관한 방정식

$$a^2\cos\theta+3\sin\theta=a^2-3a-3$$

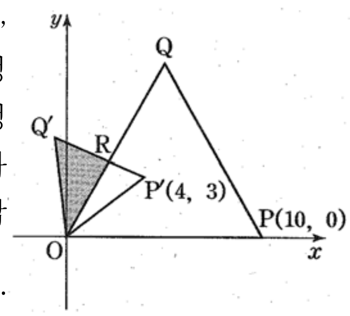
의 실근이 존재하기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하면 $\alpha \le a \le \beta$ 또는 $\gamma \le a$이다. $4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$의 값을 구하시오.[4점-1007-종로]

41. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 변 CA 위의 한 점 P에 대하여 두 선분 AP와 PC의 길이가 각각 $2\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$이고 $\angle \mathrm{PBA}=45^\circ$일 때, 변 BC의 길이는? [4점-1005-메가]



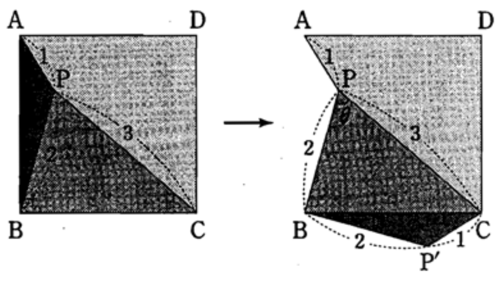
① $\sqrt{2}-1$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}+1$

42. 그림과 같이 두 점 P(10, 0), P′(4, 3)과 한 변의 길이가 10인 정삼각형 OPQ, 한 변의 길이가 5인 정삼각형 OP′Q′이 있다. 선분 OQ와 선분 P′Q′의 교점을 R라 할 때, 삼각형 OPQ′의 넓이는 $\frac{a+b\sqrt{3}}{26}$이다. 이 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 정수이고, O는 원점이다.)[4점-1003-중앙]



① 200 ② 225 ③ 250
④ 275 ⑤ 300

43. [그림1]과 같이 세 조각을 이어 붙이면 정사각형이 되는 얇은 판으로 된 삼각형 모양의 조각 2 개와 사각형 모양의 조각 1 개가 있다.
[그림1]에서 $\overline{PA}=1$, $\overline{PB}=2$, $\overline{PC}=3$ 이다.
[그림2]는 삼각형 모양의 종이 조각 하나의 위치를 변형하여 만든 것이다.
$\angle BPC=\theta$라 할 때, $\tan\theta$ 의 값은?[4점-1003-비상]



[그림1] [그림2]

① $\dfrac{8+4\sqrt{2}}{7}$ ② $\dfrac{8+4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}$
④ $\dfrac{9+4\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\dfrac{10+4\sqrt{2}}{7}$

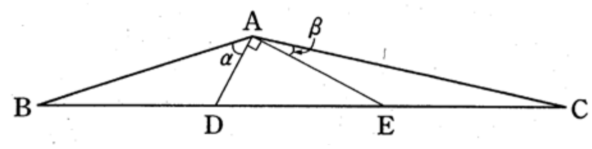
44. 함수 $f(x)=\cos^2 x+\sin x\cos x+1$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1003-대성]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 π이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 3이다.
ㄷ. $0\le x\le 2\pi$에서 $f(x)=[f(x)]$를 만족시키는 x의 개수는 9이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

45. $\angle BAC=150°$ 인 삼각형 ABC 에서 변 BC 의 삼등분점을 D, E 라 할 때, 삼각형 ADE 가 그림과 같이 변 DE 를 빗변으로 하는 직각삼각형이 되었다.
$\angle BAD=\alpha$, $\angle CAE=\beta$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1004-메가]

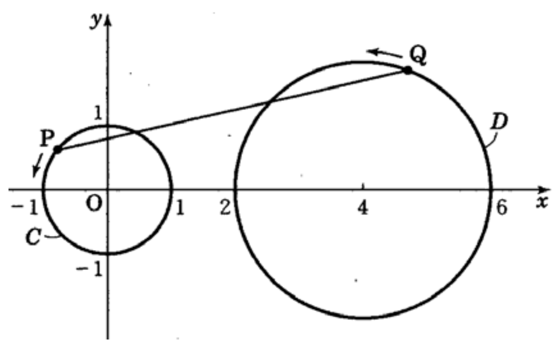


<보 기>

ㄱ. $\tan\alpha=\dfrac{\overline{AE}}{2\,\overline{AD}}$ ㄴ. $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{4}$
ㄷ. $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

46. 그림과 같이 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 C, 점 (4, 0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 D라 하자. 동점 P는 점 (1, 0)을 출발하여 원 C의 둘레를 따라 시계 반대방향으로 매초 2(라디안)의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 동점 Q는 점 (6, 0)을 출발하여 원 D의 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 1(라디안)의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 점 P와 점 Q가 동시에 출발할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 L이라 하자. $4L^2$의 값을 구하시오.[4점-1003-대성]

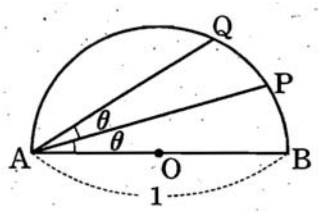


47. 점 $(6,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 두 접선을 그었을 때, 두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각은 각각 $\alpha,\ \beta$이다. $\tan(\alpha+\beta)$의 값은?[3점－1007－교육청]

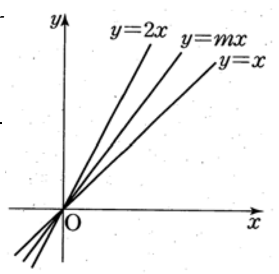
① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1

④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

48. 지름 AB의 길이가 1인 반원 위에 $\angle\mathrm{BAP}=\theta$, $\angle\mathrm{BAQ}=2\theta$가 되도록 두 점 P, Q를 잡을 때, $24\overline{\mathrm{AP}}-8\overline{\mathrm{AQ}}$의 최댓값을 구하시오.[4점－1005－중앙]



49. 직선 $y=x$와 $y=2x$가 이루는 예각을 이등분하는 직선의 방정식은 $y=mx$이다. 이때, 상수 m의 값은?[4점－1011－중앙]

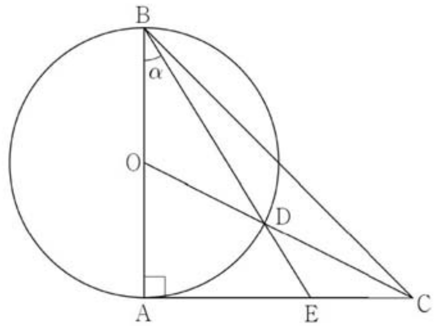


① $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　② $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$

③ $\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$　④ $\frac{1+\sqrt{10}}{3}$

⑤ $\frac{1+2\sqrt{3}}{4}$

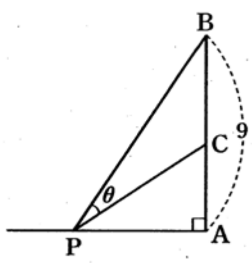
50. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}$를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 O, $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원 O와 $\overline{\mathrm{OC}}$와의 교점을 D, $\overline{\mathrm{BD}}$의 연장선과 $\overline{\mathrm{AC}}$의 교점을 E라 하자. $\angle\mathrm{ABE}=\alpha$라 할 때, $\tan\alpha$의 값은?[4점－1004－교육청]



① $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$　③ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

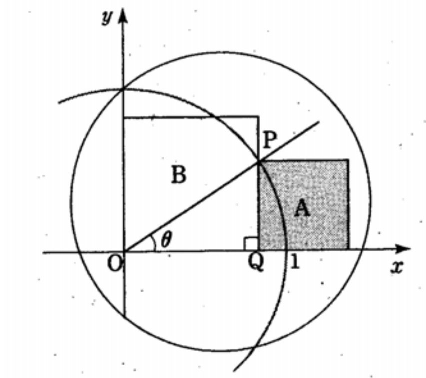
④ $\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$　⑤ $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$

51. 길이가 9인 선분 AB를 4 : 5로 내분하는 점을 C라 하자. 또, 점 A를 지나고 선분 AB에 수직인 직선 위의 동점 P에 대하여 $\angle\mathrm{BPC}=\theta$라 하자. θ의 크기가 최대일 때, 삼각형 BPC의 넓이를 구하시오. [4점－1004－메가]

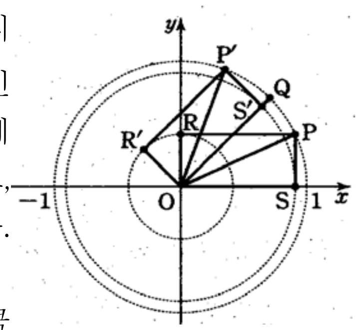


52. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$ 일 때, $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{q}{p}$ 라 하자. 이 때, $p+q$의 값을 구하시오. $\left(\text{단}, 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}\text{이고, } p,\ q\text{는 서로소인 자연수이다.}\right)$[4점-1004-교육청]

53. 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 와 x 축 양의 방향이 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$ 인 점 P 를 원 $x^2+y^2=1$ 위에 잡고, 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. 그림과 같이 한 변의 길이가 각각 $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{OQ}}$ 인 두 개의 정사각형 A, B 를 한 변이 x 축에 오도록 이웃하게 그린다. 정사각형 A, B 의 내부를 모두 포함하는 원 중에서 반지름의 길이가 가장 작은 원을 $C(\theta)$라 하면 원 $C(\theta)$의 넓이는 각 θ 가 등식 $\cos^2\theta = \frac{a+\sqrt{a}}{b}$ 를 만족할 때 최대가 된다. 이때, 두 자연수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하시오.[4점-1003-비상]

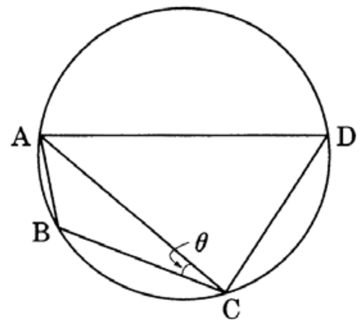


54. 그림에서 두 점 P, Q는 반지름의 길이가 1이고 중심이 원점 O인 원 위에 있다. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 S, R라 하고, $\angle\mathrm{POS} = \alpha$, $\angle\mathrm{QOS} = \beta$라고 하자. 또한 직사각형 ROSP를 원점을 중심으로 시계 반대방향으로 β만큼 회전시킨 것이 직사각형 R′OS′P′이고, $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$, $\mathrm{P}'(a',\ b')$, $\mathrm{S}'(e,\ f)$, $\mathrm{R}'(g,\ h)$라고 할 때, 다음 중 $\cos(\alpha+\beta)$를 바르게 나타낸 것은?[4점-1003-종로]

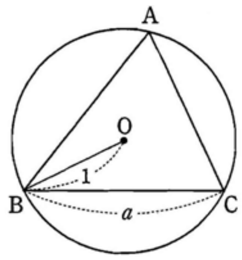


① $a+c$ ② $b+d$ ③ $a'-a$
④ $e+g$ ⑤ $f+g$

55. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에서 $\angle\mathrm{BAC} = 2\angle\mathrm{BCA}$, $\angle\mathrm{DCA} = 2\angle\mathrm{DAC}$이다. $\overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{AD}} = 5 : 8$이고 $\angle\mathrm{BCA} = \theta$일 때 $\tan 2\theta = \frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1010-대성]



56. 반지름의 길이가 1 인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC 에서 $\overline{\mathrm{BC}}=a$ 라 할 때 $\overline{\mathrm{AC}}\cos B+\overline{\mathrm{AB}}\cos C$ 의 최댓값을 $S(a)$ 라 하자. 이때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점−1005−비상]



<보 기>

ㄱ. $S(1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ㄴ. $S(\sqrt{2})=\sqrt{2}$

ㄷ. $0<a_1<a_2\le 2$이면 $S(a_1)<S(a_2)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

삼각방정식

1. θ에 대한 삼각방정식 $\sin 3\theta = \cos 4\theta$가 있다. 이 방정식의 모든 근의 합은? $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$[3점-1007-종로]

① $\frac{1}{14}\pi$ ② $\frac{1}{7}\pi$ ③ $\frac{3}{14}\pi$

④ $\frac{5}{14}\pi$ ⑤ $\frac{3}{7}\pi$

2. 삼각방정식 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{3}\cos x$ 의 모든 해의 합은?

[3점-1003-비상]

① $\frac{5}{2}\pi$ ② 3π ③ $\frac{7}{2}\pi$

④ 4π ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

3. 방정식 $1 + 4\sin x = \sqrt{10 + 8\sin x}$ 를 만족시키는 x값을 α라 할 때, $\sin\alpha\cos 2\alpha$의 값은?[3점-1003-대성]

① $\frac{3}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $-\frac{1}{32}$

④ $-\frac{1}{16}$ ⑤ $-\frac{3}{32}$

4. 폐구간 $[0,\ 2\pi]$에서 삼각방정식

$$(\sqrt{3}\sin x + \cos x)^2 - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

의 모든 해의 합은?[3점-1004-교육청]

① 4π ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ $\frac{14}{3}\pi$

④ 5π ⑤ $\frac{16}{3}\pi$

5. $0 \le x \le \pi$에서 삼각방정식 $\cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3}{2}x$를 만족시키는 모든 해의 합은?[3점-1004-교육청]

① $\frac{4}{3}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ 2π

④ $\frac{7}{3}\pi$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi$

6. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 두 삼각방정식

$$\sin 2x + \cos x = 0,\ \cos 2x + \sin x = 0$$

을 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은?[3점-1005-메가]

① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$

④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

7. $0 < x < 10\pi$일 때, 방정식 $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$의 모든 근의 합을 S라 하자. 이때, $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [3점-1010-중앙]

8. x에 대한 방정식

$2\cos 2x - 4\cos x + 3 - a = 0$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이고, $0 \le x < 2\pi$이다.)[4점-1005-대성]

<보 기>

ㄱ. $0 < a < 1$이면 4개의 서로 다른 실근을 갖는다.
ㄴ. $a = 1$이면 3개의 서로 다른 실근을 갖는다.
ㄷ. $a > 9$이면 실근을 갖지 않는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. x에 대한 삼각 방정식

$\cos 2x - 5\cos x + 3 = a(\cos x - 2)$

의 해가 존재하도록 하는 정수 a의 개수는?[3점-1004-메가]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

10. 삼각방정식 $2\sin x - 4\sin x \cos^2 x - \cos 2x + 1 = 0$을 만족시키는 모든 근의 합은? (단, $0 \le x < 2\pi$)[3점-1006-평가원]

① $\frac{5}{2}\pi$ ② $\frac{11}{4}\pi$ ③ 3π
④ $\frac{13}{4}\pi$ ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

11. 삼각방정식 $\sin 4x - \sin 2x = \cos 4x + \cos 2x$의 해를 모두 더한 값을 $\frac{q}{p}\pi$ (p, q는 서로소인 자연수)라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$[4점-1003-종로]

12. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식

$$\sin 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x = \frac{1}{2}$$

의 가장 작은 근을 α, 가장 큰 근을 β라 하자. 이 때, $\frac{\beta}{a}$의 값을 구하시오.[4점-1003-중앙]

13. $0 < x \le \pi$에서 부등식 $\sin 2x - \cos 2x \le -1$을 만족시키는 x값의 범위가 $a \le x \le b$일 때, $b-a$의 값은?[3점-1003-대성]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

함수의 극한

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ 의 값은?[2점-1010-대성]

① $3\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{3}$
④ $-\sqrt{3}$ ⑤ $-2\sqrt{3}$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{x-2}$ 의 값은?[2점-1010-메가]

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ 의 값은?[2점-1007-교육청]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$ 의 값은?[2점-1010-중앙]

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

5. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$ 의 값은?[2점-1004-메가]

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+x}$ 의 값은?[2점-1010-교육청]

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

7. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{1-2x}$ 의 값은?[2점-1005-메가]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

8. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\right)$의 값은?[2점-1004-교육청]

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

9. $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x-5}\right)$의 값은?[2점-1005-종로]

① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

10. $\lim_{x \to 0} \left\{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2-x}\right)\right\}$ 의 값은?[2점-1008-종로]

① -2 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

11. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+10x-11}{x^3-1}$ 의 값은?[2점-1005-대성]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12. $\lim_{x \to 1} \frac{x^{10}+x^9+x^8-3}{x-1}$ 의 값은? [2점-1010-비상]

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

13. $\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-2})$의 값은?

[2점-1003-대성]

① 4 ② $\frac{5}{2}$ ③ 2

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

14. $\lim_{x \to 2}\frac{\sqrt{x+2}-x}{(x+1)(x-2)}$ 의 값은?[2점-1006-종로]

① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{4}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

15. $\lim_{x \to 3}\frac{x^2(x-2)-9}{x(x-2)-3}$의 값은?[2점-1010-종로]

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ $\frac{13}{4}$

④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{17}{4}$

16. $f(x)=x^2-1$ 일 때, $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{f(\sqrt{x})}$ 의 값은?[2점-1005-중앙]

① 0 ② 1 ③ $\sqrt{2}$

④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

17. $\lim_{x \to 9}\frac{f(x)}{x-9}=2$일 때, $\lim_{x \to 9}\frac{f(x)}{\sqrt{x}-3}$의 값은?[2점-1003-종로]

① 6 ② 8 ③ 10

④ 12 ⑤ 14

18. $\lim_{x \to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x^2+4x-1}-2}$의 값은?[2점-1009-종로]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$

④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

19. $\lim_{x \to 5} \frac{25-x^2}{\sqrt{14-x}-\sqrt{4+x}}$ 의 값은?[2점-1009-대성]

① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

20. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=14$일 때, $a+b$의 값은?[2점-1006-평가원]

① -25 ② -23 ③ -21
④ -19 ⑤ -17

21. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{ax^2+b}=\frac{1}{6}$일 때, $a-b$의 값은? [2점-1011-대전교]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

22. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+x}+ax}{x-1}=b$가 성립하도록 하는 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은?[2점-1007-대성]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

23. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=-1$일 때, $a-b$의 값은?[3점-1003-중앙]

① -5 ② -3 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

24. $\lim_{x\to 2011+0}\frac{|x^2-2011^2|}{x-2011}=a$, $\lim_{x\to -2011-0}\frac{|x^2-2011^2|}{x+2011}=b$라 할 때, $a+b$의 값은?[2점-1011-종로]

① -4022 ② -2011 ③ 0
④ 2011 ⑤ 4022

25. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-a}{x-2}=b$를 만족시키는 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [2점-1009-중앙]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

26. 삼차함수 $f(x)=2x^3+ax+b$ (a, b는 상수)에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-2$가 성립한다. 이 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

[3점-1010-종로]

27. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-ax-b}{x^3-1}=4$일 때, $b-a$의 값은?[2점-1008-대성]

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

28. $\lim_{x\to -1}\frac{(ax+b)(-5x+2)}{x^2-1}=14$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?[2점-1008-비상]

① -4 ② 0 ③ 4
④ 9 ⑤ 16

29. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{ax+b}-3}{x-2}=1$을 만족하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?[3점-1004-종로]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

30. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x^2-4x-3}{x-1}$의 값은?[2점-1003-비상]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

31. $\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=4$를 만족시키는 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은?[2점-1011-대성]

① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

32. 0이 아닌 두 상수 a,b 에 대하여

$$\lim_{x\to b}\frac{ax-b}{x^2-b^2}=3$$

이 성립할 때, $60(a+b)$의 값을 구하시오.[3점-1006-대성]

33. 함수 $f(x)=x^3+ax+b$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은?[3점-1008-중앙]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

34. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오.[3점-1003-대성]

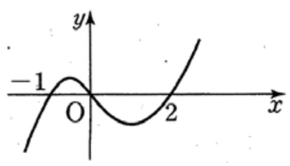
(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^2}{x+1}=-1$
(나) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$의 값이 존재한다.

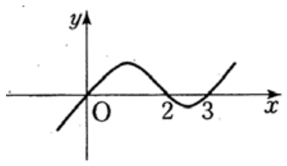
35. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-6$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{(x^2+1)f(1-x)}{x^2-1}$의 값을 구하시오.[3점-1011-중앙]

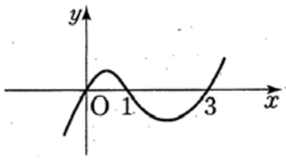
36. 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n+0}\frac{[x]^2+x}{[x]}=3$이 되도록 하는 n의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[2점-1004-대성]

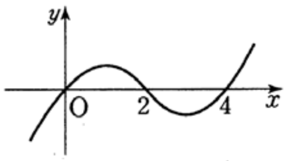
① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

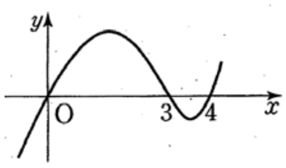
37. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{f(x+2)}{x}=-2$가 성립할 때, $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은? (단, a, b는 상수이다.)[3점–1004–종로]

①


②


③


④


⑤


38. x에 대한 다항식 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-2x}=2$를 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.[3점–1003–종로]

39. 이차함수 $y=f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$이고, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$의 값이 존재한다. 이 때, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$의 값은?[2점–1007–종로]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

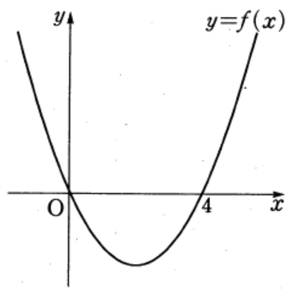
40. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 -2일 때, $f(1)$의 값은?
[3점–1009–평가원]

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

41. $\lim_{x\to\infty}\frac{a\sqrt{x^2+3}-b}{x-1}=8$, $\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+3}-b}{x-1}=k$를 만족시키는 세 상수 a, b, k에 대하여 $a+b+k$의 값을 구하시오.
[3점–1007–메가]

42. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 원점과 점 (4, 0)을 지난다. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{6x}=-2$일 때, $\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{x-4}$의 값을 구하시오.

[3점–1005–메가]



43. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}=3$일 때, $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{f(x-2)}$의 값을 구하시오.[4점–1003–중앙]

44. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{12x^2+6x+1}=\frac{1}{4}$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2+x-6}=\frac{1}{5}$을 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오.

[3점–1003–비상]

45. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)+f(x)-2010}{x-1}=2010$ 이 성립할 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 의 값을 구하시오.[3점–1003–비상]

46. 양의 실수 x에 대하여 x보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 함수 $f(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

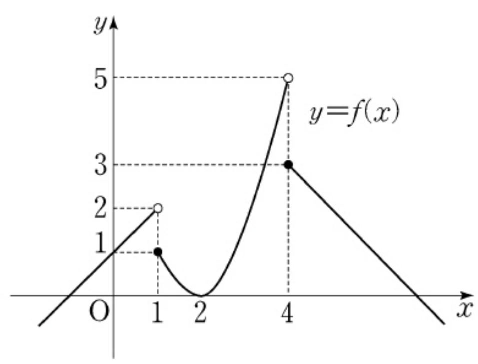
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>3f(x)) \\ f(f(x)) & (x\le 3f(x)) \end{cases}$$

예를 들어, $f\left(\frac{10}{3}\right)=2$이고 $\frac{10}{3}<3f\left(\frac{10}{3}\right)$이므로 $g\left(\frac{10}{3}\right)=f\left(f\left(\frac{10}{3}\right)\right)=f(2)=0$이다.

$\lim_{x\to27-0}g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to27+0}g(x)=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

[3점–1010–비상]

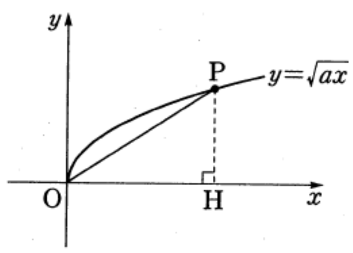
47. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은?[3점–1006–평가원]

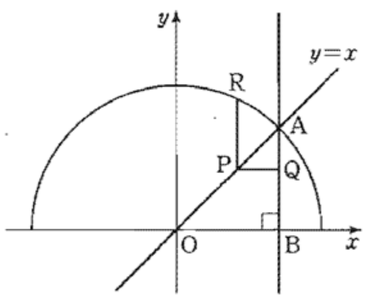
① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

48. 그림과 같이 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ \sqrt{ax})$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\lim_{x\to\infty}(\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OH}})=5$를 만족시키는 상수 a의 값은?[3점-1005-메가]



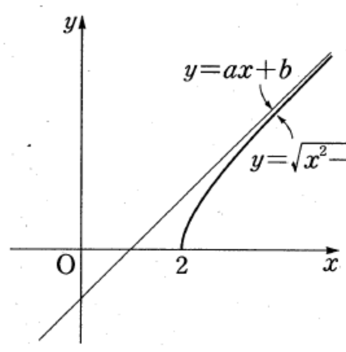
① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

49. 그림과 같이 반원 $x^2+y^2=8$ $(y\ge 0)$과 직선 $y=x$가 만나는 점을 A 라 하고, 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 B 라 하자. 또, 선분 OA 위의 점 $\mathrm{P}(p,\ p)$를 지나 x 축에 평행한 직선이 직선 AB 와 만나는 점을 Q 라 하고, 또 점 $\mathrm{P}(p,\ p)$를 지나 y 축에 평행한 직선이 반원 $x^2+y^2=8$ $(y\ge 0)$과 만나는 점을 R 라 하자. 이때 $\lim_{p\to 2-0}\dfrac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)[3점-1006-종로]



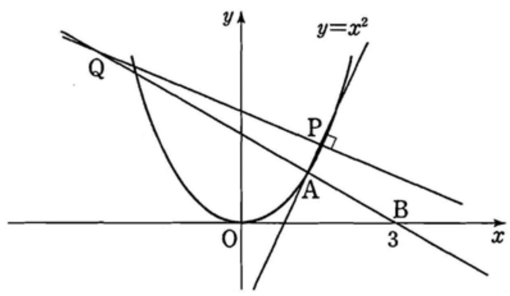
① $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

50. 그림은 함수 $y=\sqrt{x^2-2x}$ $(x\ge 2)$의 그래프와 직선 $y=ax+b$를 나타낸 것이다. 함수 $y=\sqrt{x^2-2x}$ $(x\ge 2)$의 그래프는 x의 값이 한없이 커질 때, 직선 $y=ax+b$에 한없이 가까워진다고 한다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?[3점-1004-메가]



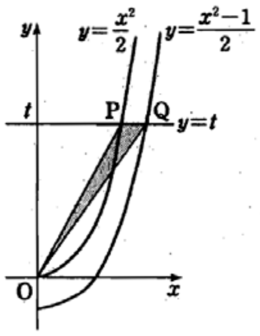
① $-\dfrac{2}{3}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $-\dfrac{1}{3}$
④ 0 ⑤ $\dfrac{1}{3}$

51. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t>1)$과 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$에 대하여 직선 AP에 수직이고 점 P를 지나는 직선이 직선 AB와 만나는 점을 Q라고 하자. 점 P가 곡선 $y=x^2$을 따라 점 A에 한없이 가까워질 때, 점 Q는 점 $(a,\ b)$에 한없이 가까워진다. 이때, $\dfrac{b}{a}$의 값은?[3점-1005-비상]



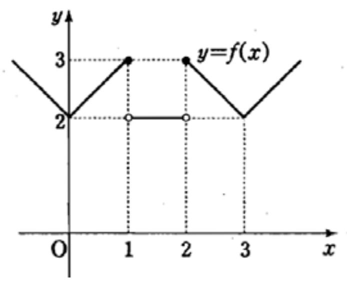
① -2 ② -1 ③ $-\dfrac{2}{3}$
④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ 0

52. 그림과 같이 두 곡선 $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{x^2-1}{2}$이 직선 $y=t\ (t>0)$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 POQ의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\{f(t)\}^2}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.)[3점-1003-비상]



① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{16}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\sqrt{2}$

53. 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1003-비상]



<보 기>

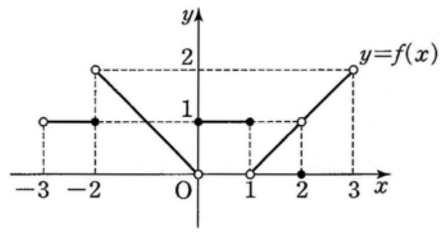
ㄱ. $\lim_{x\to1+0}(f\circ f)(x)=2$

ㄴ. $\lim_{x\to0}(f\circ f)(x)=3$

ㄷ. $\lim_{x\to1-0}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to2+0}(f\circ f)(x)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

54. 열린구간 $(-3,\ 3)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [3점-1008-종로]



<보 기>

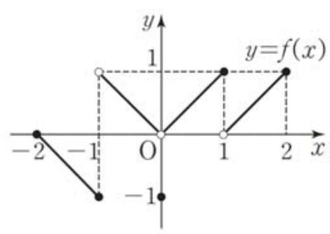
ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)f(x+1)=0$

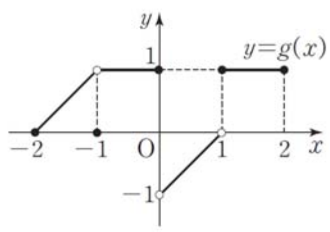
ㄴ. $\lim_{x\to0}(f\circ f)(x)=1$

ㄷ. $\lim_{x\to t+0}f(x)>\lim_{x\to t-0}f(x)$ 인 t가 2개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

55. 다음은 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다.





옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1008-비상]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to0}\{f(x)g(x)\}=0$

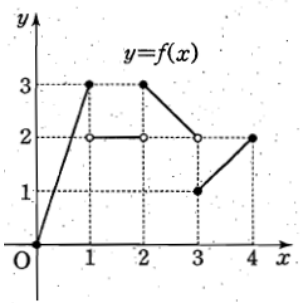
ㄴ. $\lim_{x\to-1+0}g(f(x))=1$

ㄷ. $\lim_{x\to1+0}f(g(x))=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

56. $0 \le x \le 4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{x \to 2-0}(f \circ f)(x) - \lim_{x \to 2+0}(f \circ f)(x)$의 값은?

[3점–1005–중앙]



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

57. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x \le 1) \\ x & (x > 1) \end{cases}$$

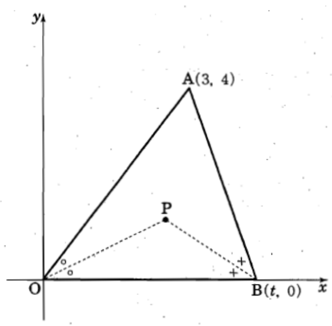
에 대하여 구간 $[t, t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $\lim_{t \to +0} g(g(t))$의 값은?[4점–1010–대성]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

58. x가 양수일 때, x보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 $f(x)$라 하고, 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x > 2f(x)) \\ \dfrac{1}{f(x)} & (x \le 2f(x)) \end{cases}$

라고 하자. 예를 들어, $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=2$이고, $\dfrac{7}{2}<2f\left(\dfrac{7}{2}\right)$이므로 $g\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이다. $\lim_{x \to 8+0} g(x)=\alpha$, $\lim_{x \to 8-0} g(x)=\beta$라고 할 때, $\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오.[4점–1006–평가원]

59. 좌표평면 위에 원점 O와 두 점 A$(3,\ 4)$, B$(t,\ 0)$ $(t>0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB가 있다. $\angle$AOB의 이등분선과 $\angle$ABO의 이등분선의 교점 P의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \infty} f(t)$의 값은?[4점–1005–대성]

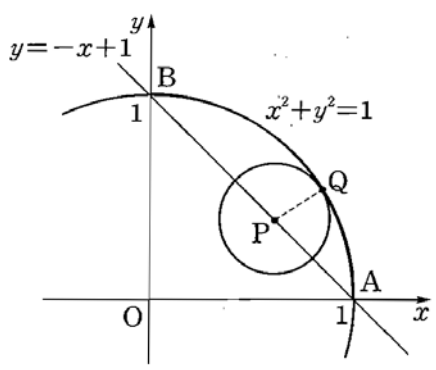


① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

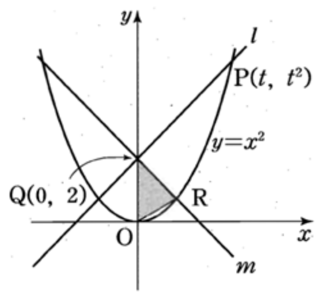
60. 곡선 $y=\sqrt{x}$ 와 직선 $y=mx\ (m>0)$의 교점 중 원점이 아닌 점을 A라 하자. 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B라 할 때, $30\lim_{m\to+0}\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OB}}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)[4점–1003–대성]

61. 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $y=-x+1$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 동점 P가 선분 AB 위를 움직일 때, 점 P를 중심으로 하고 원 $x^2+y^2=1$과 제 1사분면에서 접하는 원을 그려, 그 접점을 Q라 하자. 점 P가 점 A에 한없이 가까워질 때, $\frac{\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값은 α에 한없이 가까워진다. $10\alpha^2$의 값을 구하시오.

[4점–1007–메가]



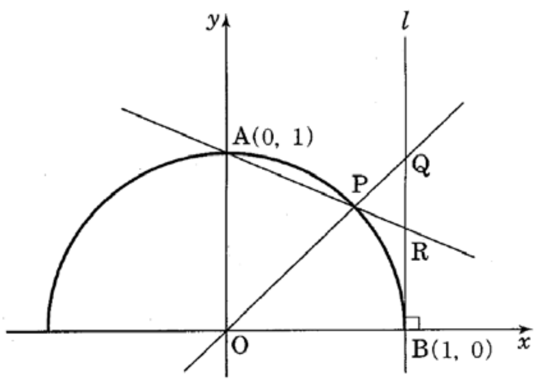
62. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$과 점 Q(0, 2)가 있다. 두 점 P, Q를 지나는 직선 l과 수직이면서 점 Q를 지나는 직선 m이 곡선 $y=x^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 R이라 하자. △QOR의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}S(t)$의 값은? (단, O는 원점이다.)



[4점–1003–중앙]

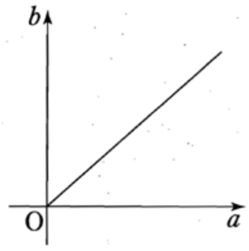
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

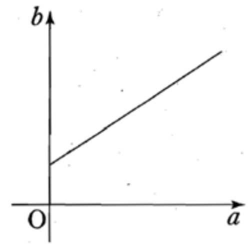
63. 좌표평면에서 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$ 의 그래프 위에 두 점 A(0, 1), B(1, 0)과 제1사분면 위의 동점 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{1-t^2})$이 있다. 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선 l에 대하여 직선 OP와 직선 AP가 직선 l과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\lim_{t\to1-0}\frac{\overline{\mathrm{RB}}}{\overline{\mathrm{QB}}}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)[4점–1003–대성]

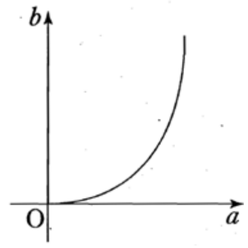


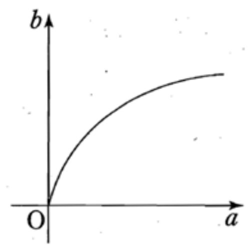
① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

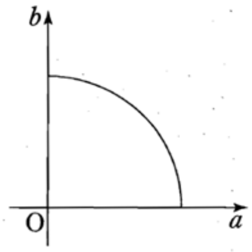
64. 음이 아닌 두 실수 a, b가 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x-b^2)=0$을 만족할 때, 다음 중 a, b의 관계를 나타낸 그래프의 개형은?[3점-1003-중앙]

①


②


③


④


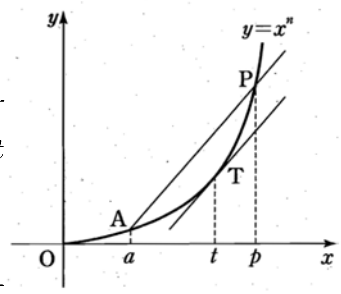
⑤


65. 현재 우리나라에서는 종합소득세를 매길 때, 과세표준금액이 많은 사람에게 더 많은 비율의 세금이 부과되는 누진제를 적용하고 있다. 과세 표준금액이 1200만 원 이하인 사람에게는 8%, 1200만 원을 초과해서 4600만 원 이하의 사람에게는 17%를 적용한다. 그런데 이에 따르면 과세표준금액이 1119만원인 사람에 비해 1201만 원인 사람은 훨씬 많은 세금을 내게 된다. 이를 보완하기위하여 누진 공제액을 두어 과세표준금액에 대한 세금 부과 함수가 연속함수가 되도록 한다. 예를 들어, 과세표준금액이 900만원,1500만원인 사람이 내는 세금은 각각 (900×0.08)만 원, $(1500\times0.17-108)$만 원이다.

과세표준금액에 따른 세율과 누진공제액이 다음 표와 같을 때, $\left[\frac{b}{10}\right]$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점-1003-종로]

과세표준금액	세율	누진공제액
1200만 원 이하	8%	-
1200만 원 초과~4600만 원 이하	17%	108만 원
4600만 원 초과~8800만 원 이하	26%	a만 원
8800만 원 초과	35%	b만 원

66. 그림과 같이 곡선 $y=x^n$ $(x\ge0)$위의 두 점 A, P에 대하여 직선 AP와 평행한 접선의 접점을 T라 하자. 세 점 A, P, T의 x좌표를 a, p, t라 할 때, $K_n=\lim_{p\to a}\frac{t-a}{p-a}$라 하자.



이 때 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a<t<p$이고, n은 2 이상의 자연수이다.) [4점-1010-종로]

<보 기>

ㄱ. $a\ne0$이면 $K_3=\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. a의 값에 관계없이 K_2의 값은 일정하다.

ㄷ. $a=0$이면 n의 값에 관계없이 K_n의 값은 일정하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

함수의 연속

1. 함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$은 $x=a$에서 불연속이다. 이때, 실수 a의 개수는?[3점-1008-중앙]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

2. 다항함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\begin{cases}[x] & (-1\le x\le 1)1\\ 0 & (x<-1,\ x>1)\end{cases}$이 다음 조건을 만족시킨다. $f(4)$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점-1010-교육청]

(가) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3+x-1}=2$
(나) 모든 실수 x에서 함수 $f(x)g(x)$는 연속이다.

3. 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $0\le x<2$일 때, $f(x)=\begin{cases}\pi(x-1) & (0\le x<1,\ 1<x<2)\\ \dfrac{\pi}{2} & (x=1)\end{cases}$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x-1)$이다.

$g(x)=\sin x$라 할 때, 열린 구간 $(-4,\ 4)$에서 함수 $y=(g\circ f)(x)$가 불연속인 x의 값의 개수는? [3점-1003-비상]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

4. 모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{x-2} & (|x|>2)\\ \dfrac{2a}{2-x} & (|x|<2)\\ \dfrac{a}{2} & (|x|=2)\end{cases}$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>0$)

[3점-1008-대성]

<보기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 a의 값이 존재한다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=a$는 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 함수 $y=[f(x)]$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$를 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)[3점-1011-대전교]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ \dfrac{1}{2} & (x>0)\end{cases}$

ㄴ. $f(x)=\begin{cases}1 & (x\le 0)\\ 1-x^2 & (x>0)\end{cases}$

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}-1 & (x\le 0)\\ -x^3+x^2-1 & (x>0)\end{cases}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=1$, $f(1)=-1$일 때, 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 1개의 실근을 가지는 방정식만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점–1003–중앙]

<보 기>

ㄱ. $x-f(x)=0$　　ㄴ. $x^2f(x)=0$

ㄷ. $(f\circ f)(x)=0$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[3점–1005–종로]

<보 기>

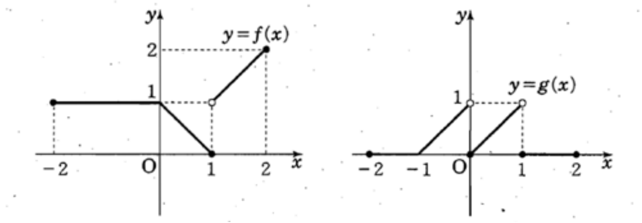
ㄱ. $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=0$이고 $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 극한값이 존재하면 $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=0$이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=0$이고 $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 극한값이 존재하면 $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=0$이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 극한값이 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 연속이다.

① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 그림은 $-2\le x\le 2$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 나타낸 것이다.



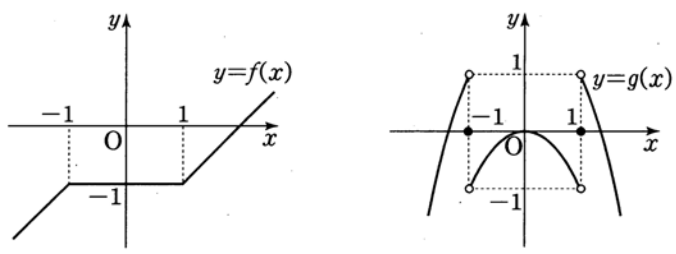
옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점–1005–대성]

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $y=f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $y=g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프가 다음과 같다.



이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[3점–1009–중앙]

<보 기>

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1-0}g(f(x))=1$
ㄴ. 함수 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(g(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

10. 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(x-1)}{|x-1|} & (x\neq1) \\ a & (x=1)\end{cases}$ 일 때, 임의의 실수 a에 대하여 $g(f(x))$가 실수 전체에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$를 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1009-종로]

<보 기>

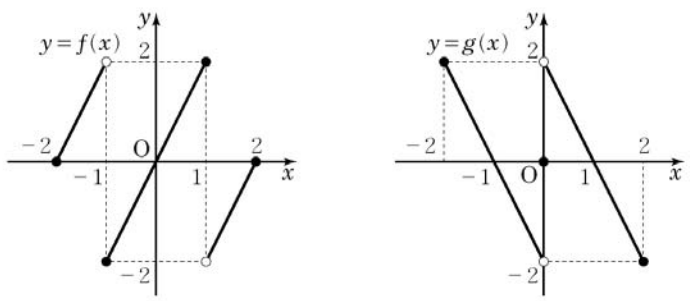
ㄱ. $g(x)=x^4-x^2-2$

ㄴ. $g(x)=x^2-2x+1$

ㄷ. $g(x)=2^x+2^{-x}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

11. $-2\le x\le 2$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1007-대성]

<보 기>

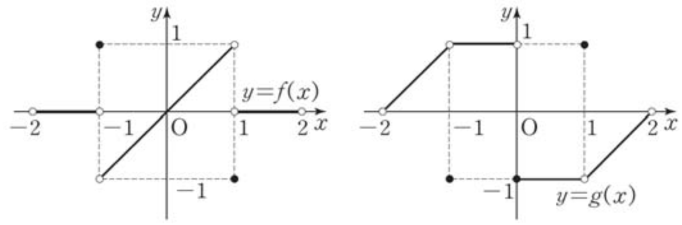
ㄱ. $\lim\limits_{x\to1+0} g(f(x))=2$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1} f(x)g(x)=0$

ㄷ. 함수 $y=f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 다음은 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다.



옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점-1010-비상]

<보 기>

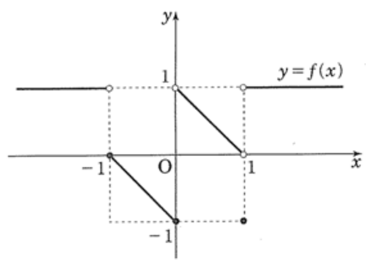
ㄱ. $\lim\limits_{x\to0} f(x)g(x)=0$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0} f(g(x))=-1$

ㄷ. 함수 $y=g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1009-대성]



<보 기>

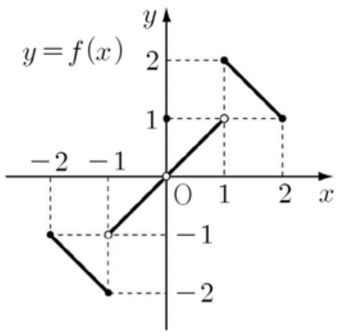
ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1-0} f(f(x))=\lim\limits_{x\to1+0} f(f(x))$

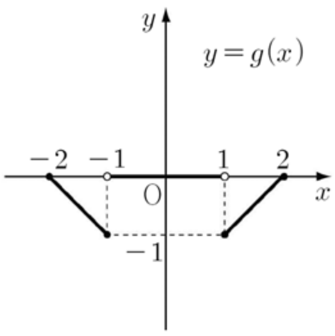
ㄴ. $\lim\limits_{x\to-1+0} f(f(x))=\lim\limits_{x\to1-0} f(f(x))$

ㄷ. 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. $-2 \le x \le 2$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점-1004-교육청]





<보 기>

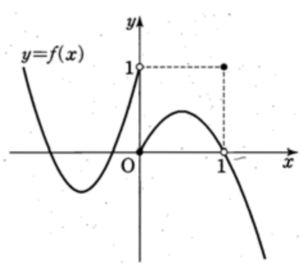
ㄱ. $\lim_{x \to -1} g(f(x)) = -1$

ㄴ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

ㄷ. 방정식 $g(f(x))=-\frac{1}{2}$의 실근이 1과 2사이에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1010-종로]



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to +0} f(x) \times \lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(x) \times \lim_{x \to 1-0} f(x)$

ㄴ. $\lim_{x \to 1+0} f(f(x)) = f(\lim_{x \to 1+0} f(x))$

ㄷ. 함수 $y=f(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1007-종로]

<보 기>

ㄱ. 함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이면 함수 $|f(x)|$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $(f \circ f)(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $f(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=g(a)$에서 연속이고, 함수 $(f \circ g)(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

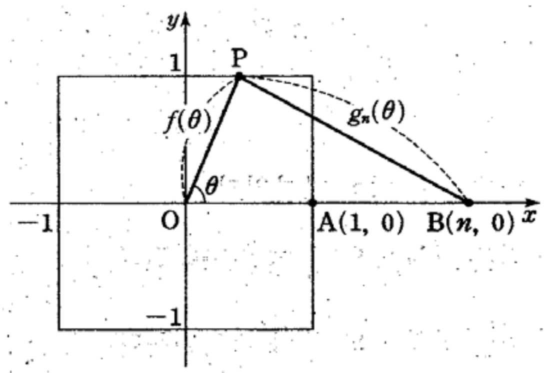
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(x-1)f(x) = x^2 + ax + b - 2\sqrt{x^2+4x-1},\ f(1)=3$$

을 만족할 때, $20ab$의 값을 구하시오.[3점-1005-종로]

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형이 있다. 동점 P가 점 A(1, 0)에서 출발하여 정사각형 위를 시계 반대 방향으로 이동할 때, ∠POA의 크기를 θ, 동점 P에서 원점 O에 이르는 거리를 $f(\theta)$, 동점 P에서 점 B(n,)) (n은 3 이상의 자연수)에 이르는 거리를 $g_n(\theta)$라 하자. 함수 $y=\left[\dfrac{g_n(\theta)}{f(\theta)}\right]\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프에서 불연속점의 개수를 $h(n)$이라 할 때, $h(3)+h(8)$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점-1003-종로]



① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

19. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 세 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) $0\le x\le 1$일 때, $f(x)=2x^2$
> (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$이다.
> (다) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이다.

$0\le x\le 20$에서 함수 $y=[f(x)]$ 가 불연속인 x 의 값의 개수를 구하시오. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)
[4점-1003-비상]

20. 함수 $f(x)=[\log x]+\left[\log\dfrac{100}{x}\right]$이 $x=a$ $(0<a<100)$에서 불연속일 때, 모든 a의 값의 합은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점-1005-메가]

① $\dfrac{50}{9}$　② $\dfrac{100}{9}$　③ $\dfrac{50}{3}$
④ 25　⑤ $\dfrac{100}{3}$

21. 함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\{\log(x-4)^2\}^{2n}-\log(x-4)^2}{\{\log(x-4)^2\}^{2n-2}+1}$이 연속이 되지 않는 x의 값들의 곱을 구하시오.[4점-1003-종로]

22. 함수 $y=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos 2x}+\dfrac{1}{\tan 4x}$의 그래프를 $0<x<2\pi$에서 그릴 때, 불연속인 점의 x좌표는 k이다. 이 때, 서로 다른 실수 k의 개수를 구하시오.[4점-1003-중앙]

23. 두 함수

$$f(x)=x-4,\ g(x)=\begin{cases} x^2-2 & (x \ge a) \\ 4x+10 & (x < a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a값의 합을 구하시오.[4점-1003-대성]

24. 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{|x-1|} & (x \ne \pm 1) \\ 0 & (x=\pm 1) \end{cases}$$

실수 t에 대하여 열린 구간 $(t-2,\ t+2)$에서 함수 $f(x)$의 불연속인 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1011-중앙]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 1-0} f(x)=-1$ ㄴ. $g(-1)=1$

ㄷ. $\lim_{t \to 1-0} g(t)=2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. 함수 $f(x)=|x-1|$에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 곱 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1011-대성]

<보 기>

ㄱ. $g(x)=\begin{cases} x & (0<x<1) \\ 2-x & (1 \le x < 2) \end{cases}$

ㄴ. $g(x)=\begin{cases} 0 & (0<x<1) \\ 1 & (1 \le x < 2) \end{cases}$

ㄷ. $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & (0<x<1) \\ 0 & (x=1) \\ \dfrac{1}{x-1} & (1<x<2) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

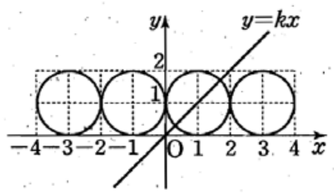
26. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-ax+1}{x-1} & (x \ne 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases},\ g(x)=\lim_{n \to \infty} \frac{bx^{2n+1}+2x+1}{x^{2n}+1}$$

에 대하여 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?[3점-1010-비상]

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

27. 그림과 같이 중심의 좌표가 각각 $(-3,\ 1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$, $(3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 모두 1인 4개의 원이 있다. $-7 \le k \le 7$인 실수 k에 대하여 직선 $y=kx$와 4개의 원의 서로 다른 교점의 개수를 $f(k)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1005-중앙]



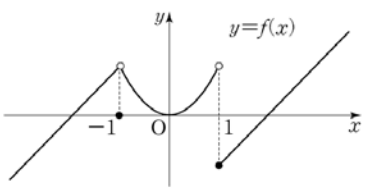
<보 기>

ㄱ. 함수 $f(k)$의 그래프에서 불연속인 점은 4개다.
ㄴ. $\lim\limits_{k\to a+0} f(k) \ne \lim\limits_{k\to a-0} f(k)$인 실수 a는 2개다. (단, $a \ne \pm 7$)
ㄷ. 함수 $y=f(f(k))$는 연속함수이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ 0 & (x=-1) \\ x^2 & (-1<x<1) \\ x-2 & (x \ge 1) \end{cases}$$



에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-2010-대수능]

<보 기>

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1+0} \{f(x)+f(-x)\}=0$
ㄴ. 함수 $f(x)-|f(x)|$가 불연속인 점은 1개다.
ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a는 없다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. x가 실수일 때, 함수 $f(x)$를

$$f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$$

로 정의하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1007-메가]

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$
ㄴ. 임의의 정수 n에 대하여 $f(n)=n$이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. n이 자연수일 때, 함수

$$f_n(x)=\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+1},\quad F(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점-1010-대성]

<보 기>

ㄱ. 임의의 자연수 n에 대하여 함수 $f_n(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄷ. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

31. 열린 구간 $(0, 32)$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\left[\log_2 x\right]$에 대하여 함수 $f(x)$의 그래프가 불연속인 모든 x의 값을 큰 수부터 차례대로 나열하여 만든 수열을 $\{a_n\}$이라 하자. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1005-비상]

<보 기>

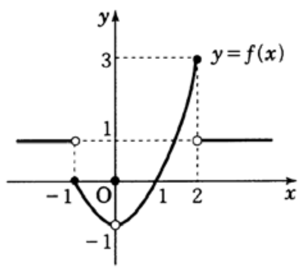
ㄱ. $\lim_{x\to 16} f(x)=4$

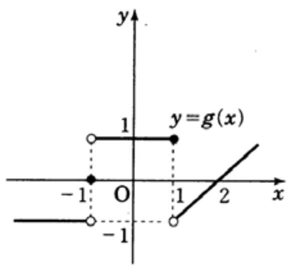
ㄴ. 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 5이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 33$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

32. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.





옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1004-대성]

<보 기>

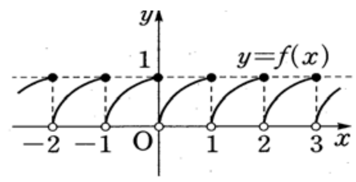
ㄱ. $\lim_{x\to 1} f(g(x))$가 존재한다.

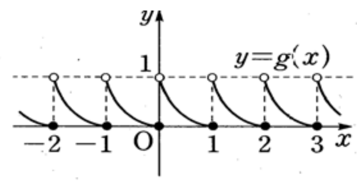
ㄴ. $x=0$에서 함수 $g(f(x))$는 연속이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)g(x)$의 그래프의 불연속점은 2개이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33. 그림은 모든 정수에서 불연속이고 주기가 1인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다.





<보기>의 함수 중 모든 실수에서 연속인 함수만을 있는 대로 고른 것은?[3점-1004-메가]

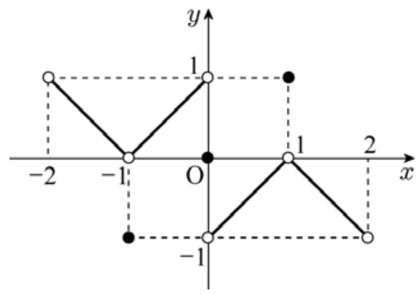
<보 기>

ㄱ. $f(x)+g(x)$ ㄴ. $f(x)f(x)g(x)$

ㄷ. $f(g(x))+g(f(x))$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 열린 구간 $(-2,\ 2)$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1010-교육청]



<보 기>

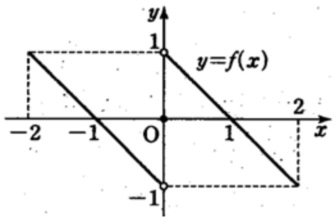
ㄱ. $\lim_{x\to +0} f(x)=-1$

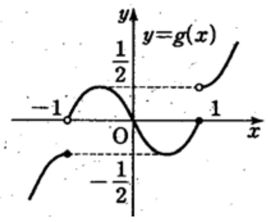
ㄴ. 함수 $(f\circ f)(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ. $-2<a<2$ 인 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)f(-x)$ 의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같다.





옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1003-종로]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0} g(f(x))=0$

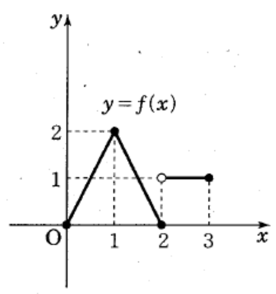
ㄴ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

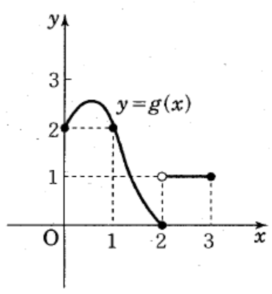
ㄷ. 방정식 $g(f(x))=0$은 4개의 실근을 가진다.

(단, $-2\le x\le 2$)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36. 구간 $[0, 3]$에서 정의 된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.





옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1003-대성]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x)=0$

ㄴ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄷ. 구간 $[0, 3]$에서 함수 $(g\circ f)(x)$는 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37. 함수 $f(x)$와 $g(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{는 유리수}) \\ 0 & (x\text{는 무리수}) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} 0 & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$

로 정의할 때, 모든 실수 x에서 연속인 함수인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1008-중앙]

<보기>

ㄱ. $f(x)+g(x)$ ㄴ. $(f\circ g)(x)$
ㄷ. $(f\circ f)(x)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

38. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-a|x|-|x|^n+b}{|x|^n+1}$$

가 모든 실수 x에서 연속일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점-1004-교육청]

<보 기>

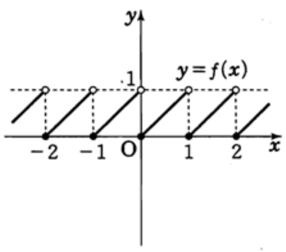
ㄱ. $a-b=1$

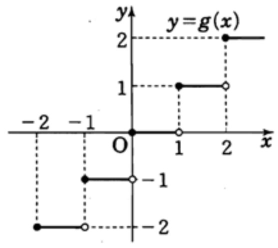
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이다.

ㄷ. $a<1$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39. 다음 그림은 두 함수 $f(x)=x-[x]$, $g(x)=[x]$의 그래프이다.





다음 중 모든 정수에서 연속인 함수만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)[4점-1006-대성]

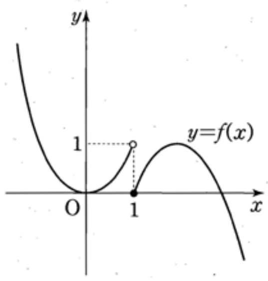
<보 기>

ㄱ. $y=f(x)g(x)$　　ㄴ. $y=f(g(x))$
ㄷ. $y=g(f(x))$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

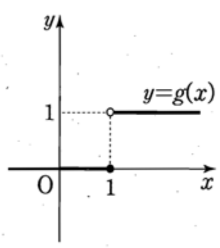
40. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $y=(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=g(x)$의 그래프만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점-1003-중앙]

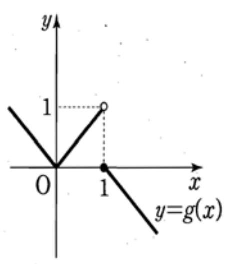


<보 기>

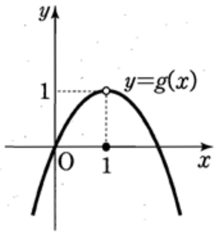
ㄱ.



ㄴ.

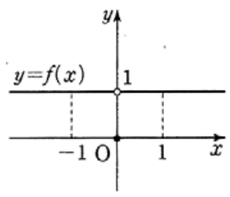


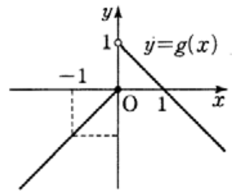
ㄷ.

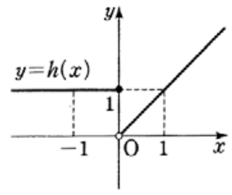


① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

41. 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, $x=0$에서 연속인 함수인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1004-종로]







<보 기>

ㄱ. $y=(f\circ f)(x)$　　ㄴ. $y=(g\circ g)(x)$
ㄷ. $y=(h\circ h)(x)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

42. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\neq 1) \\ 2 & (x=1)\end{cases}$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점-1006-평가원]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)$
ㄴ. 함수 $g(x)=f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a가 존재한다.
ㄷ. 함수 $h(x)=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

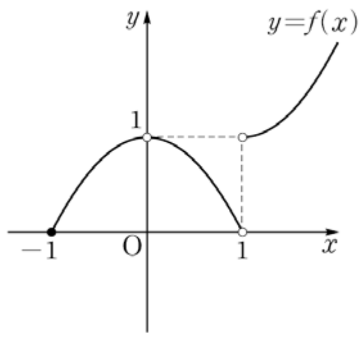
43. 방정식 $2^{x-1}=100-\frac{1}{2}x$는 구간 $(n,\ n+1)$에서 오직 한 개의 해를 갖는다. 이때, 정수 n의 값은?[3점-1004-종로]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

44. 방정식 $a^x-x=0\ (a>1)$이 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위는?[3점-1010-중앙]

① $1<a<\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}<a<\sqrt{3}$
③ $\sqrt{2}<a<2$ ④ $\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$
⑤ $2<a<\sqrt{6}$

45. 그림은 $\{x\,|\,x\geq-1\}$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 두 점 $(0,\ a)$, $(1,\ b)$를 제외한 나머지 부분을 좌표평면에 나타낸 것이다. a, b는 0 또는 1인 상수일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1010-메가]



<보 기>

ㄱ. a, b의 값에 관계없이 $\lim_{x\to1}f(f(x))$가 존재한다.

ㄴ. $b=0$일 때, 함수 $f(f(x))$가 $x=1$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(f(x))$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 3이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

초월함수의 극한

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(\sqrt[n]{3}-1)}{(n+1)(\sqrt[n]{2}-1)}$ 의 값은?[3점-1005-중앙]

① 1 ② $\ln 2$ ③ $\ln 3$
④ $\log_2 3$ ⑤ $\log_3 2$

2. $\lim_{x\to0}\frac{(1-2^x)\ln 3^x}{1-\cos 4x}$ 의 값은?[3점-1008-종로]

① $-\frac{\ln2\cdot\ln3}{8}$ ② $-\frac{\ln2\cdot\ln3}{4}$ ③ $-\frac{\ln3}{4}$
④ $\frac{\ln2\cdot\ln3}{8}$ ⑤ $\frac{\ln2\cdot\ln3}{4}$

3. $\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\cos x}-1}{x^2}$ 의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

[3점-1010-비상]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

4. $\lim_{x\to1}\frac{e^{\sqrt{x}}-e}{x-1}$ 의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

[3점-1010-종로]

① $\frac{e}{2}$ ② e ③ 3
④ $\frac{3}{2}e$ ⑤ $3e$

5. $\lim_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ 의 값은?[3점-1008-대성]

① e^{-2} ② e^{-1} ③ 1
④ e ⑤ e^2

6. $\lim_{x\to0}\frac{x\tan 2x}{1-\cos 3x}$ 의 값은?[3점-1005-메가]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ 2

7. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{\tan x\sin 2x}$ 의 값은?[3점-1006-평가원]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

8. $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{(h-1)^2}-e^{h^2+1}}{h}$ 의 값은?[3점-1010-대성]

① $-2e$ ② $-e$ ③ $-\frac{1}{2}e$
④ $\frac{1}{2}e$ ⑤ e

9. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}\cos x-1}{x}$ 의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

[3점-1010-비상]

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

10. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}$ 의 값은?[3점-1006-대성]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 0

11. $\lim_{n\to\infty}\left\{x^2\ln\left(\cos\dfrac{2}{x}\right)\right\}$의 값은?[3점-1011-종로]

① -4 ② -2 ③ -1
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

12. 등식

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^{2x}+ae^{-2x}+b}{x\sin x}=1$$

을 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?[3점-1010-메가]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

13. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ 일 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1009-대성]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{\sin x}=2$

ㄴ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{e^{x}-1}=2$

ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{\ln(1+x)}=2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)[3점-1011-중앙]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\frac{1}{4}$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=\frac{1}{e^2}$

ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x}=\ln 2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. $\lim_{x\to\infty}f(x)\left(e^{\frac{1}{3x}}-1\right)=6$ 일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ 의 값은?

(단, e는 자연로그의 밑이다.)[3점-1004-종로]

① 2 ② 3 ③ 6
④ 12 ⑤ 18

16. $\lim_{x\to e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}$ 의 값은?[3점-1007-메가]

① e^{-e} ② e^{-1} ③ $e^{-\frac{1}{e}}$
④ e ⑤ e^e

17. 함수 $f(x)=e^{3x}-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{g(x)}\right\}$의 값은?[3점-1005-종로]

① 145 ② 155 ③ 165
④ 175 ⑤ 185

18. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{\cos x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n x\right)$의 값은?[3점-1007-메가]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

19. $\lim_{x\to 1}\ln x^{\frac{1}{1-x}}$의 값은?[3점-1005-대성]

① -1 ② 0 ③ $\dfrac{1}{e}$
④ 1 ⑤ e

20. $\lim_{x\to +0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{x}+4\right)}{\ln\left(\dfrac{4}{x}+2\right)}$의 값은?[3점-1007-대성]

① 0 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

21. $\lim_{x\to 0}\left\{\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{\tan 3x}{x^2}\right)\cdot\ln(4x+1)\right\}$의 값은?[3점-1006-종로]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 15 ⑤ 20

22. 수열 $\{a_n\}$을 $a_1=2,\ a_{n+1}=1+\dfrac{1}{na_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\times a_n\times a_{n+1}\times a_{n+2}\times\cdots\times a_{2n}\right)^n$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)[3점-1005-중앙]

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{e}$
④ e ⑤ $\dfrac{1}{e}$

23. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$의 값은?[3점-1004-대성]

① $\dfrac{1}{e}$ ② 1 ③ 2
④ e ⑤ e^2

24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\sin x}+e^{x\sin 2x}-2}{x\ln(1+x)}$ 의 값은?[3점-1007-교육청]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

25. 자연수 n에 대하여 $f(n)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^2+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

[3점-1008-비상]

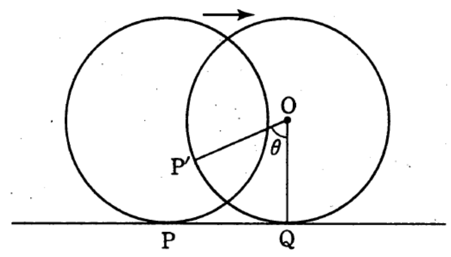
① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

26. $f(x)=e^x\ln(x^2+1)$ 일 때, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+2x)-f(1)}{x}$ 의 값은? (단, e 는 자연로그의 밑이다.)[3점-1005-비상]

① $-e(\ln2+1)$ ② $2e(\ln2+1)$ ③ $e(2\ln2+1)$
④ $-e(\ln2+2)$ ⑤ $2e(\ln2+2)$

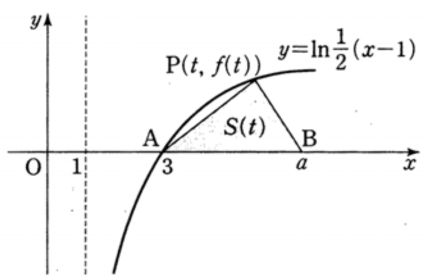
27. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원판이 점 P에서 지면과 접하고 있다. 이 원판을 굴려서 점 Q에서 지면과 접하도록 만들고 점 P와 일치했던 원판 위의 점을 P′이라 하자. $\angle\mathrm{P'OQ}=\theta$라 하고 점 P′에서 지면까지의 거리를 x라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{x}{\overline{\mathrm{PQ}}^2}$의 값은?

[3점-1009-종로]



① 0 ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

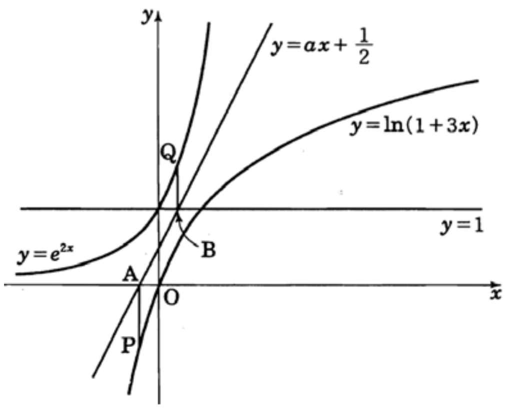
28. 함수 $f(x)=\ln\dfrac{1}{2}(x-1)$의 그래프 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$가 있다. 점 P와 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ 0)$으로 이루어진 삼각형 ABP의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to3+0}\dfrac{S(t)}{t-3}=5$이다. 이때 상수 a의 값은? (단, $a>3$)



[3점-1004-종로]

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

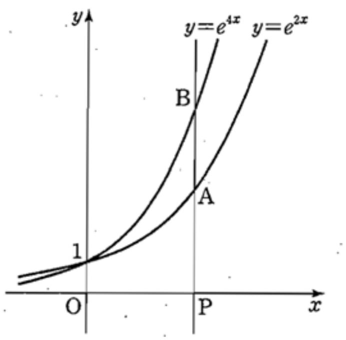
29. 그림과 같이 좌표평면 위에 두 곡선 $y=e^{2x}$, $y=\ln(1+3x)$가 있다. 직선 $y=ax+\frac{1}{2}$ $(a>0)$이 두 직선 $y=0$, $y=1$과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 점 A 를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\ln(1+3x)$와 만나는 점을 P 라 하고, 점 B 를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=e^{2x}$과 만나는 점을 Q 라 하자. $\lim_{a\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{BQ}}}$의 값은?[3점-1006-대성]



① $\frac{e}{3}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{e}{2}$
④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{2e}{3}$

30. 그림과 같이 좌표평면 위에 두 지수함수 $y=e^{2x}$, $y=e^{4x}$의 그래프가 있다. x축 위의 점 $\mathrm{P}(p,\ 0)$을 지나며 y축에 평행한직선이 $y=e^{2x}$ 와 $y=e^{4x}$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 이때,

$$\lim_{p\to+0}\frac{2\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{AB}}-2}{\overline{\mathrm{OP}}}$$



의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이고, O는 원점이다) [3점-1006-종로]

① 1　② 2　③ 4
④ 6　⑤ 8

31. 세 양수 a, b, c에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}x^a\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=2$$

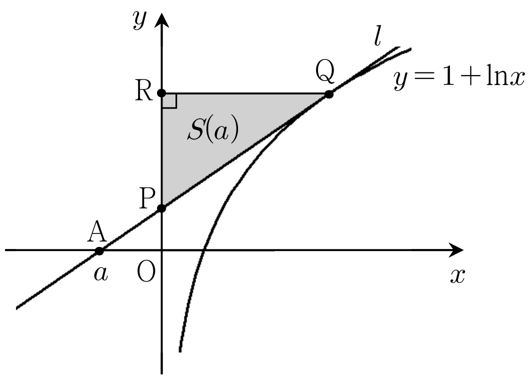
일 때, $a+b+c$의 값은?[4점-1006-평가원]

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

32. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\ln\sqrt[3]{x}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{x\to+0}\frac{f(g(x))}{g(x)-1}$의 값은?[3점-1010-교육청]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

33. 그림과 같이 점 A$(a, 0)$에서 곡선 $y=1+\ln x$에 그은 접선이 y축과 만나는 점을 P, 접점을 Q라 하자. 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 R, △PQR의 넓이를 $S(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a<0$)**[3점-1011-대전교]**



<보 기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{PR}}=1$

ㄴ. $\lim_{a\to-0} S(a)=\frac{1}{2}$

ㄷ. $\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{a}=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to0}f(x)=0$일 때, 극한값이 존재하는 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?**[3점-1005-메가]**

<보 기>

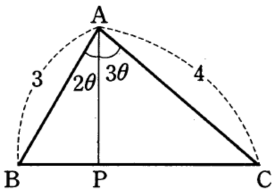
ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$

ㄷ. $\lim_{x\to0}\frac{\ln|1+f(x)|}{\ln|1-f(x)|}$

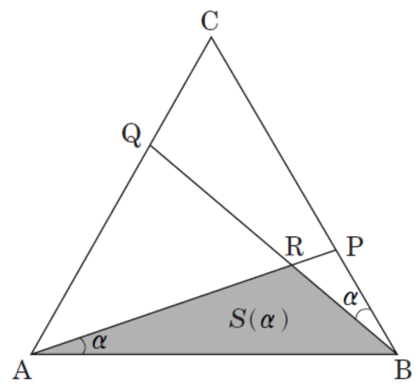
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$임 △ABC가 있다. 선분 BC위의 점P가 $\angle\mathrm{BAP}=2\theta$, $\angle\mathrm{CAP}=3\theta$를 만족할 때, $\lim_{\theta\to0}12\overline{\mathrm{AP}}$의 값을 구하시오.



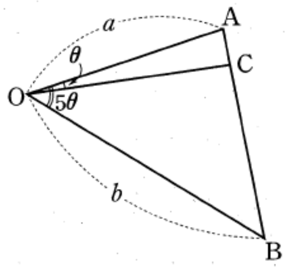
[4점-1005-종로]

36. 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위의 점 P와 변 CA 위의 점 Q를 $\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{QBC}=\alpha$가 되도록 잡는다. 두 선분 AP와 BQ의 교점을 R라 할 때, 삼각형 ABR의 넓이를 $S(\alpha)$라 하자. $\lim_{\alpha\to+0}\frac{S(\alpha)}{\alpha}$의 값은?**[4점-1008-대성]**



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

37. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=a$, $\overline{\mathrm{OB}}=b$, $\angle\mathrm{AOB}=5\theta$인 삼각형 OAB에서 $\angle\mathrm{AOC}=\theta$가 되도록 선분 AB 위에 점 C를 잡을 때, 극한값 $\lim_{\theta\to+0}\overline{\mathrm{OC}}$의 값은?



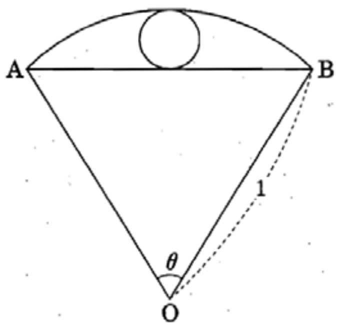
[4점-1008-중앙]

① $\frac{5ab}{a+b}$ ② $\frac{5ab}{a+4b}$

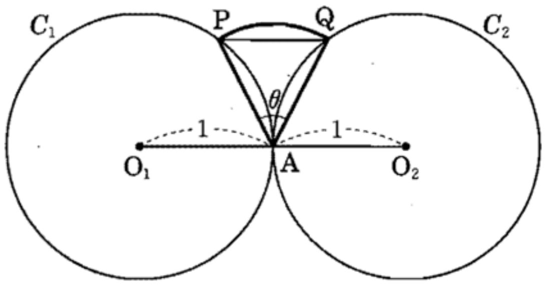
③ $\frac{ab}{5a+b}$ ④ $\frac{ab}{a+5b}$ ⑤ $\frac{ab}{5(a+b)}$

38. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고, 중심각의 크기가 θ $(0<\theta<\pi)$인 부채꼴 AOB가 있다. 이 부채꼴의 호 AB와 현 AB에 동시에 접하는 원 중에서 반지름의 길이가 가장 큰 원의 둘레의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to+0}\pi\cdot\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2}{l(\theta)}$의 값을 구하시오.

[4점-1005-대성]



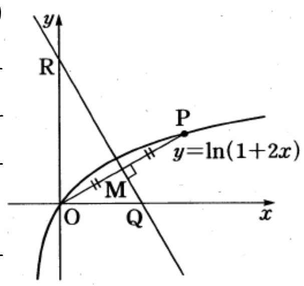
39. 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 1이고 중심이 각각 O_1, O_2인 두 원 C_1, C_2가 점 A에서 외접하고 있다. 이때, 두 점 P, Q가 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}\mathbin{/\mkern-5mu/}\overline{\mathrm{O_1O_2}}$를 만족시키면서 각각 두 원 C_1, C_2 위를 움직인다. 점 A를 중심으로 하고 선분 AP를 반지름으로 하는 부채꼴 APQ에서 $\angle\mathrm{PAQ}=\theta$라 할 때, 호 PQ의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0}\frac{l(\theta)}{\theta^2}$의 값은?[4점-1011-대성]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

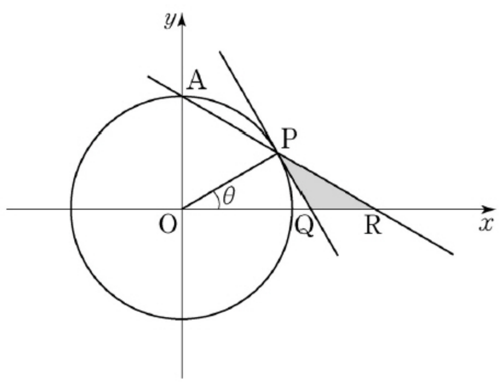
40. 그림과 같이 곡선 $y=\ln(1+2x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ \ln(1+2a))$에 대하여 선분 OP의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 선분 OP에 수직인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. 점 Q의 x좌표를 m, 점 R의 y좌표를 n이라 할 때, $100\lim_{a\to0}\frac{n}{m}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, $a>0$이다.)



[4점-1005-메가]

41. 좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 A(0, 1)과 점 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R라 하자. $\angle QOP=\theta$라 하고 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자. $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\alpha$일 때, 100α의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

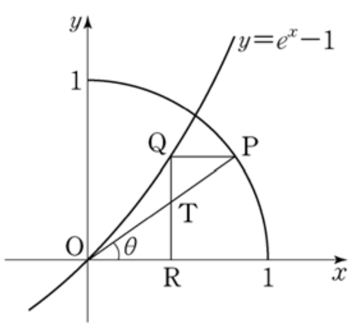
[4점-1006-평가원]



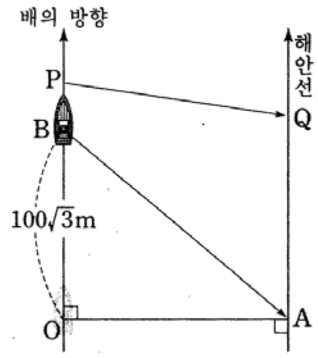
42. 좌표평면에서 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라 하자.

점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=e^x-1$과 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하자. 선분 OP와 선분 QR의 교점을 T라 할 때, 삼각형 OTR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $60a$의 값을 구하시오.

[4점-2010-대수능]



43. 그림과 같이 서치라이트를 장착한 배가 지점 O를 출발하여 초속 $10\sqrt{3}$ m의 속도로 직선 방향의 해안선과 평행한 방향으로 나아가고 있다. 배에 장착한 서치라이트는 시계 반대 방향으로 1초에 $\frac{\pi}{6}$(rad)씩 회전하면서 해안선에 빛을 비추고 있다. 지점 O에서 해안선에 수직으로 빛을 비춘 배가 $100\sqrt{3}$ m 떨어진 지점 B를 지날 때 다시 지점 A를 비춘다고 한다. 배가 지점 B에서 지점 P로 갈 때까지 t초 동안 서치라이트가 회전하면서 해안선을 따라 계속 비춘 빛의 길이를 $\overline{AQ}$라 할 때, $\lim_{t\to0}\frac{\overline{AQ}}{t}$의 값은? (단, 단위는 m/초이고, 빛이 도달하는 데 걸리는 시간은 무시한다.)[4점-1004-종로]

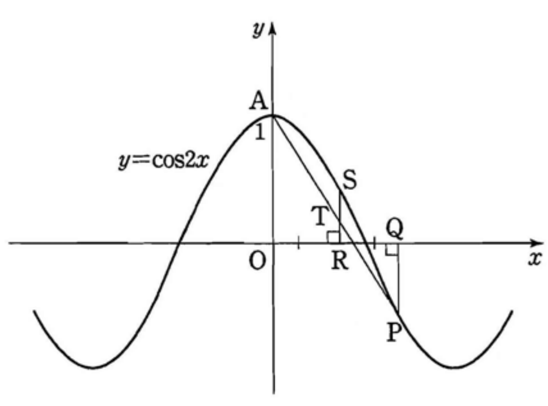


① $10+\frac{100\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $10\sqrt{3}+\frac{100}{3}\pi$

③ $10\sqrt{3}+\frac{100\sqrt{3}}{3}\pi$ ④ $10\sqrt{3}+\frac{200}{3}\pi$

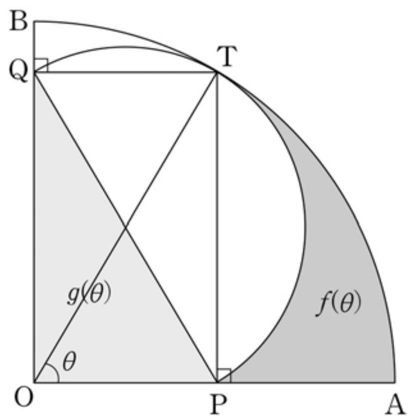
⑤ $10\sqrt{3}+\frac{200\sqrt{3}}{3}\pi$

44. 그림과 같이 점 A(1, 0)과 곡선 $y=\cos 2x$ 위를 움직이는 점P(t, $\cos 2t$) ($t\neq0$)에 대하여 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 선분 OQ의 중점을 R라 하자. 또, 점 R을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y=\cos 2x$ 와 만나는 점을 S, 선분 AP와 만나는 점을 T라 하자. 점 P가 곡선 $y=\cos 2x$를 따라 점 A에 한없이 가까워 질 때, $\frac{\overline{ST}}{\overline{OQ}^2}$의 값은 α에 한없이 가까워진다. 이때, 100α의 값을 구하시오. (점 O는 원점이다.)[4점-1005-비상]

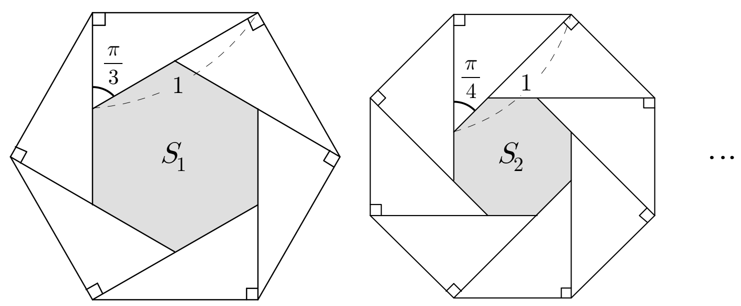


45. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 T에서 선분 OA와 선분 OB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고 $\angle TOP = \theta$라 하자. 점 P와 점 Q를 지름의 양끝으로 하고 점 T를 지나는 반원을 C라 할 때, 반원 C의 호 TP, 선분 PA, 부채꼴 OAT의 호 AT로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to +0} \frac{\theta + f(\theta)}{g(\theta)} = a$일 때, $100a$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

[4점-1009-평가원]



46. [그림1]과 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\frac{\pi}{3}$인 6개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S_1이라 하자. [그림2]와 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\frac{\pi}{4}$인 8개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S_2라 하자.



[그림1] [그림2]

이와 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\frac{\pi}{n}$인 $2n$개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} n^2 S_n$의 값은?[4점-1011-대전교]

① $\frac{1}{10}\pi^3$ ② $\frac{1}{8}\pi^3$ ③ $\frac{1}{6}\pi^3$
④ $\frac{1}{4}\pi^3$ ⑤ $\frac{1}{2}\pi^3$

함수의 연속

1. 함수 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x+1\ (0<x<2\pi)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{2n}}{1+\{f(x)\}^{2n}}$으로 정의하자. 이때 함수 $g(x)$의 불연속점의 개수는?[4점-1005-종로]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 없다.

미분계수와 도함수

1. 자연수 k에 대하여 구간 $[k,\ k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이 $3k^2+2k+1$일 때, 구간 $[1,\ 10]$에서 함수 $y=f(x)$의 평균변화율을 구하시오.[3점–1005–종로]

2. $a_1=1,\ a_2=4$인 수열 $\{a_n\}$과 함수 $f(x)=x^2+2x+3$이 있다. 함수 $y=f(x)$의 $x=a_n$에서 $x=a_{n+1}$까지의 평균변화율과 $x=a_{n+2}$에서의 미분계수가 같을 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?
(단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)[3점–1005–메가]

① $\frac{5}{3}$　② 2　③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{8}{3}$　⑤ 3

3. 자연수 n과 이차함수 $f(x)=4x^2+3x$에 대하여 x가 $n+2$에서 $3n+2$까지 변할 때의 평균 변화율과 $x=a_n$에서의 미분계수가 같아지도록 수열 $\{a_n\}$을 정할 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구하시오.
[3점–1009–종로]

4. 함수 $f(x)=(x-3)^3$에 대하여 $x=-1$에서의 미분계수를 구하시오.[3점–1008–비상]

5. 함수 $f(x)=(x^3-4x+3)(x-2)$에 대하여 $f'(2)$의 값은?
[2점–1006–대성]

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

6. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=f(2)=5$이고 $f(4)=f(5)=1$이라 한다. $|9f'(3)|$의 값을 구하시오.
[4점–1007–종로]

7. 모든 실수 x 에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 등식

$$(x^2+1)f(x)=x^3+2x+1$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?[3점-1008-종로]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

8. 원점을 지나는 미분가능한 함수 $y=f(x)$가 $f'(0)=2$를 만족할 때, $\lim_{x\to0}\frac{f(f(x))}{x}$의 값은?[3점-1005-종로]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 0

9. 이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)가 $\lim_{h\to0}\frac{f(2h)}{h}=5$를 만족시킬 때, $10(a+b)$의 값을 구하시오.

[3점-1011-대전교]

10. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x \le b) \\ ax+1 & (x>b) \end{cases}$ 가 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은? (단, $b>0$) [3점-1011-종로]

① -5 ② -4 ③ -3

④ -2 ⑤ -1

11. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \le 3) \\ -\frac{1}{2}(x-a)^2+b & (x>3) \end{cases}$ 이 모든 실수에서 미분가능할 때, $a+b$의 값을 구하시오.[3점-1007-교육청]

12. 함수 $f(x)=(x^3+x+1)(x^2+3)$ 에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$ 의 값을 구하시오.[4점-1009-대성]

13. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=6$, $g(1)=0$, $g'(1)=2$ 를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)+g(x)}{x^2-1}$의 값을 구하시오.

[3점–1005–비상]

14. 함수 $f(x)=2x^4-3x+1$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$의 값을 구하시오.

[3점][2010년6월 평가원]

15. 함수 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-18)(x-19)$에 대하여 $\frac{f'(18)}{f'(2)}$의 값을 구하시오.[3점–1005–메가]

16. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=7$을 만족시킬 때, 함수 $y=(x+1)^2f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.

[3점–1004–대성]

17. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x^3+2f'(2)x^2+2x+2$를 만족시킬 때, $f'(-2)$의 값을 구하시오. [3점–1011–중앙]

18. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x^3-1}=4$$

가 성립한다. 함수 $g(x)$를 $g(x)=x^3\cdot f(x)$라 할 때, $x=1$에서의 미분계수 $g'(1)$의 값을 구하시오.[3점–1006–종로]

19. 다항함수 $f(x)$가 등식

$$\log\{(x+1)f(x)\}=\log(x+4)+\log(x^3+1)$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은?[3점-1005-대성]

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

20. 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 a에 대하여 등식

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}=a^2$$

을 만족시킨다. $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[3점-1004-종로]

21. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-3}{h}=2$일 때, 곡선 $y=\{f(x)\}^2$ 위의 점 $(5,\ \{f(5)\}^2)$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

[3점-1009-중앙]

22. 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{10}\frac{x^n}{n}$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $q-p$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[3점-1007-교육청]

① 508 ② 509 ③ 510
④ 511 ⑤ 512

23. 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)\neq 1,\ f'(0)=1$
(나) 임의의 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)+f(x)f(y)=f(x)+f(y)$

다음 중 도함수 $f'(x)$와 항상 같은 것은?[4점-1010-메가]

① 1 ② $-f(x)$ ③ $f(x)$
④ $1-f(x)$ ⑤ $1+f(x)$

24. 최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.[4점-1006-평가원]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=4$
(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=4$

25. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2(x-2) & (x \le 2) \\ 2x^2+ax+b & (x>2) \end{cases}$가 실수 전체에서 미분가능할 때, $f(4)$의 값을 구하시오, (단, a, b는 상수이다.)

[3점–1007–대성]

26. 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+9$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 2a-f(x) & (x<b) \\ a+f(x) & (x \ge b) \end{cases}$$

라고 정의하자. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $b \ne 0$)

[4점–1004–종로]

27. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$을 만족시키는 함수 $f(x)$가 있다. 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & (x \ne a) \\ f'(a) & (x=a) \end{cases}$로 정의할 때, 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

[4점–1010–중앙]

<보 기>

ㄱ. $g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
ㄴ. $g(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.
ㄷ. $g(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

28. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 임의의 양수 k에 대하여 $|f(x)|=k$의 모든 실근의 합은 0이다.
(나) 직선 $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}$은 $y=|f(x)|$의 그래프에 접한다.

이때 $f(|x|)=0$의 서로 다른 세 실근을 α, β, γ라 할 때, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$의 값을 구하시오.[4점–1005–종로]

29. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

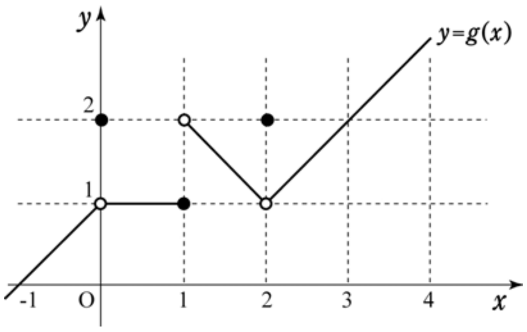
[4점–1005–종로]

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=f(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$이 존재할 때, 등식 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이 성립한다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$이 존재할 때, 극한값 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$가 존재한다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$이 존재하면 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$도 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 실수 전체의 집합에서 연속이고 $f(0)=0$인 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=|x|$이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1007-교육청]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$　　ㄴ. $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(f(x))=1$

ㄷ. 합성함수 $y=g(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

31. 사차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(-1)=0,\ f'(2)=0$
(나) 방정식 $f(x)=0$의 해의 집합은 $\{-2,\ 2\}$이다.

이때, $f(4)$의 값은?[3점-1010-비상]

① 50　② 48　③ 46
④ 44　⑤ 42

32. 함수 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$일 때, $f'(\sqrt{2})$의 값은?

[3점-1010-중앙]

① -1　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{5}$
④ $-\frac{1}{7}$　⑤ $-\frac{1}{9}$

33. 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=\ln(x+1)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1010-중앙]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\ln 2$

ㄴ. $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=1$

ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))-\ln 2}{x}=\ln 2$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 두 함수 $f(x)=\sin 2x$, $g(x)=e^{3x}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

[3점–1009–중앙]

<보 기>

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$　　ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-3}{x}=3$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-2}{x^2}=4$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

35. 함수 $f(x)=e^x+e^{-x}$에 대하여 $f'(a)=\dfrac{15}{4}$일 때, $f(a)$의 값은?[3점–1008–대성]

① $\dfrac{13}{4}$　② $\dfrac{7}{2}$　③ $\dfrac{15}{4}$
④ 4　⑤ $\dfrac{17}{4}$

36. 매개변수 t에 대하여 $x=t-\dfrac{1}{t}$, $y=t+\dfrac{1}{t}$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1005–중앙]

<보 기>

ㄱ. $\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{1}{t^2}$　　ㄴ. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$

ㄷ. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4t}{(t^2+1)^2}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37. 미분가능한 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 e를 갖는다. $g(x)=f(x)e^x$을 만족시키는 함수 $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(2h)-e}{h}$의 값은?[3점–1005–대성]

① $\dfrac{e}{4}$　② $\dfrac{e}{2}$　③ e
④ $2e$　⑤ $4e$

38. 함수 $f(x)=x^2e^{-x}$은 $x=a$에서 극댓값 b를 갖는다. 이때, ab의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)[3점–1009–중앙]

① 0　② $\dfrac{4}{e}$　③ $\dfrac{8}{e}$
④ $\dfrac{4}{e^2}$　⑤ $\dfrac{8}{e^2}$

39. 두 함수 $f(x)=3\sin x$, $g(x)=4\cos x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1007-메가]

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 주기는 π이다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)+g(x)$의 최댓값은 5이다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)g(x)$의 최솟값은 $-5\sqrt{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

40. 다항함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이다.

함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & (x\neq 0) \\ f'(0) & (x=0) \end{cases}$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[3점-1010-대성]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $g'(0)=0$
ㄷ. $x\neq 0$인 모든 x에 대하여 $g'(x)>0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

41. 함수 $f(x)=a\sin 2x+b\cos 3x$ 에 대하여

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-6,\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-6$$

일 때, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 의 값은?[3점-1005-비상]

① -2 ② 0 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

도함수의 활용

1. 함수 $f(x)=x^3+6x^2+15|x-2a|+3$ 이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a 의 최댓값은?[3점−1010−교육청]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

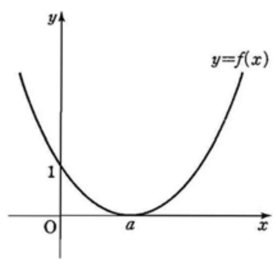
2. 곡선 $y=x^3+x^2-3x-2$ 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=ax+b$라 할 때, 두 상수 $a,\ b$의 값을 구하시오.

[3점−1010−대성]

3. 곡선 $y=x^3+3x^2+4x$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식이 $y=4x+4$일 때, $2ab$의 값을 구하시오.[3점−1010−비상]

4. 함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 열린 구간 $(0,\ 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오.[3점−1009−평가원]

5. 그림은 꼭짓점의 좌표가 $(a,\ 0)$이고, 점 $(0,\ 1)$을 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 함수 $F(x)$가 $F(x)=(x-a)f(x)$일 때, 곡선 $y=F(x)$ 위의 점 $(-a,\ F(-a))$에서의 접선의 기울기는? (단, $a>0$)



[3점−1006−종로]

① 8 ② 9 ③ 10

④ 12 ⑤ 15

6. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^n\ (n\ge 2)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서 그은 접선의 y절편을 $g(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10}|g(n)|$의 값을 구하시오.

[3점−1010−중앙]

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=4$인 점에서 접하고, $x=10$인 점에서 만난다. $f'(x)=g'(x)$의 모든 실근의 합을 구하시오.[3점–1005–대성]

8. 함수 $f(x)=2x^2+ax+b$ 의 그래프 위의 점 $(1,\ c)$에서 그은 접선의 방정식이 $y=2x-5$일 때, 세 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.[3점–1004–종로]

9. 곡선 $y=x^3$ 위의 제1사분면 위에 있는 동점 P에서의 접선을 l 이라 하자. 접선 l 에 수직이고, 점 P를 지나는 직선이 점 $(0,\ 4)$를 지나도록 하는 점 P의 개수는?[4점–1011–중앙]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 0

10. 다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 집합을 A_f로 나타내기로 하자.

예를 들어 $f(x)=x^2-1$이면 $A_f=\{-1,\ 1\}$이고, $f(x)=x^3-1$이면 $A_f=\{1\}$이다.

최고차항의 계수가 양수인 사차식 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)[3점–1011–대성]

<보 기>

ㄱ. $n(A_f)=3$이면 함수 $f(x)$는 극댓값을 가진다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=\alpha,\ x=\beta(\alpha\neq\beta)$에서 극소이고, $n(A_f)=2$이면 $f(\alpha)f(\beta)\neq 0$이다.

ㄷ. $\alpha\in A_f,\ \beta\in A_f$일 때, $f'(\alpha)=0,\ f'(\beta)\neq 0$이면 $n(A_f)=3$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 함수 $f(x)=(x-1)^2(x-4)+a$ 의 극솟값이 10 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.[3점–2010–대수능]

12. 삼차함수 $f(x)=x^3-kx^2-3x+k$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?(단, k는 실수이다.)

[4점–1010–비상]

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 k의 값에 관계없이 두 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ -2)$를 지난다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)$는 극댓값과 극솟값이 항상 존재한다.
ㄷ. 함수 $f(x)$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 최솟값은 4이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\ (a>0)$과 실수 t에 대하여 $x\le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은?

[4점–1009–평가원]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

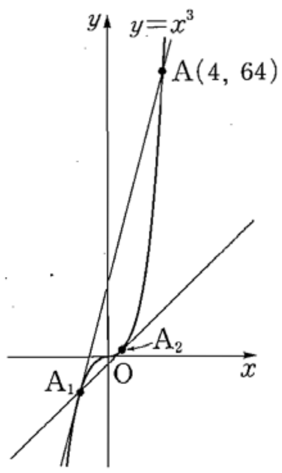
14. 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 실수)에 대하여 $A=\{x|f(x)=0,\ x\text{는 실수}\}$,
$B=\{x|f'(x)=0,\ x\text{는 실수}\}$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1008–중앙]

<보기>

ㄱ. $n(B)=0$이면 $n(A)=1$이다.
ㄴ. $n(B)=1$이면 $n(A)>1$이다.
ㄷ. $n(B)=2$이면 $n(A)\ge 2$이다.

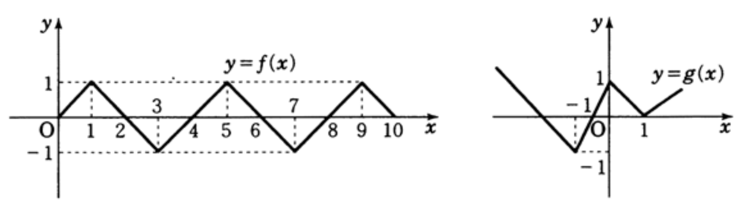
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

15. 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 64)$를 지나는 직선이 점 A가 아닌 점에서 곡선 $y=x^3$과 접하는 점을 $\mathrm{A}_1(x_1,\ y_1)$이라 하자. 또, 점 A_1을 지나는 직선이 점 A_1이 아닌 점에서 곡선 $y=x^3$과 접하는 점을 $\mathrm{A}_2(x_2,\ y_2)$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 점 $\mathrm{A}_n(x_n,\ y_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 지나는 직선이 점 A_n이 아닌 점에서 곡선 $y=x^3$과 접하는 점을 $\mathrm{A}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$의 값은?[4점–1007–메가]



① -2 ② $-\frac{4}{3}$ ③ -1
④ 0 ⑤ $\frac{2}{3}$

16. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$ $(0<x<10)$ 에서 극대가 되는 모든 x의 값의 합을 구하시오.[4점–1004–대성]



17. 순이익이란 총 매출액에서 물건의 매입 비용, 인건비, 건물 임대료 등 총 비용을 제외한 금액이다.
즉, (순이익)=(총 매출액)−(총 비용)이다. A 회사의 총 생산량 x에 대한 총 매출액 $f(x)$와 총 비용 $g(x)$가 다음과 같다.

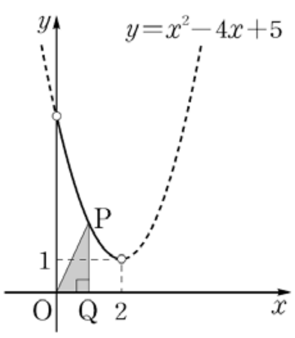
$$f(x)=\begin{cases}3x^2+21x & (0<x<8)\\ 21x+192 & (x\ge 8)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x^3-6x^2+50 & (0<x<8)\\ 22x+2 & (x\ge 8)\end{cases}$$

이 회사가 최대의 순이익을 내기 위한 총 생산량 x의 값을 구하시오.

[4점−1008−비상]

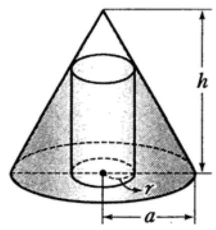
18. 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 곡선 $y=x^2-4x+5$ $(0<x<2)$ 위를 움직이는 점이다. 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(x)$라 하자. 함수 $S(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고 $x=\beta$에서 극솟값을 가질 때, $\alpha-\beta$의 값은? (단, O는 원점이다.)



[3점−1010−메가]

① -1　② $-\dfrac{2}{3}$　③ $-\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{2}{3}$

19. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 a, 높이가 h인 직원뿔에 내접하는 원기둥의 부피가 최대일 때, 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하자. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점−1011−종로]



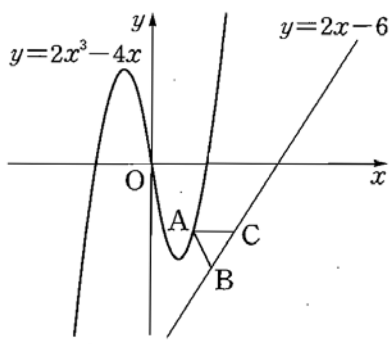
<보 기>

ㄱ. h가 일정할 때 a가 커지면 r의 값도 커진다.
ㄴ. a가 일정할 때 h가 커지면 r의 값도 커진다.
ㄷ. $\dfrac{r}{a}$의 값은 일정하다.

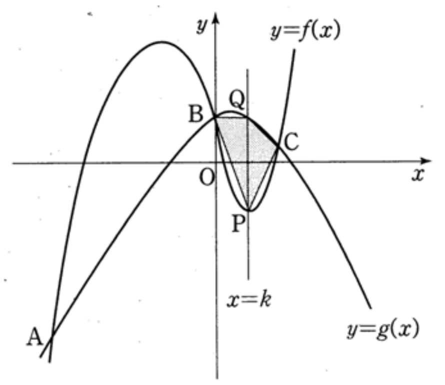
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

20. 그림과 같이 좌표평면에서 정삼각형 ABC의 한 꼭짓점 A는 곡선 $y=2x^3-4x$ 위에 있고, 나머지 두 꼭짓점 B, C는 모두 직선 $y=2x-6$ 위에 있다. 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값을 S라 할 때, $225S^2$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.)

[4점−1007−메가]



21. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=x^3+2x^2-8x+2$, $g(x)=-x^2+x+2$의 그래프의 세 교점을 x좌표가 작은 것부터 차례대로 A, B, C라 하자. 직선 $x=k$와 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점을 각각 P, Q라 할 때, 사각형 BPCQ의 넓이가 최대가 되도록 하는 양수 k에 대하여 $10k$의 값을 구하시오. (단, k는 점 C의 x좌표보다 작다.) [4점-1010-비상]



22. 함수 $f(x)=x^4-x^3-x^2+kx+a$ (k는 상수)이 $x=k$에서 극값 k를 갖는다고 할 때, 자연수 a의 값은?[3점-1007-메가]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

23. 1이 아닌 실수 a에 대하여 삼차함수 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$는 $x=p$ 와 $x=q$에서 극값을 갖는다. 두 점 $\mathrm{P}(p, f(p))$, $\mathrm{Q}(q, f(q))$를 지나는 직선의 기울기를 $g(a)$라 할 때, $g(0)$의 값은?[3점-1009-중앙]

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

24. 삼차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근 a, b, c를 갖는다고 하자. 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=\frac{4}{3}$일 때, $a+b+c$의 값은?[3점-1007-메가]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{8}{3}$

25. 삼차식 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 3 & (x<-1) \\ f(x) & (-1\le x\le 1) \\ -1 & (x>1) \end{cases}$$

로 정의하자. 함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1010-교육청]

<보 기>

ㄱ. $g'(-1)=g'(1)$
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$
ㄷ. 함수 $g'(x)$의 최솟값은 -2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ g(x) & (x < 0) \end{cases}$$

라고 하자. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1006-평가원]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=g(0)$
ㄴ. $f'(0)=g'(0)$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $f'(0)g'(0)<0$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27. 삼차함수 $f(x)=(x-1)^3+x-1$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1006-대성]

<보 기>

ㄱ. $x_1<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$이다.
ㄴ. 임의의 실수 x에 대하여 $f'(1+x)=f'(1-x)$이다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서의 접선이 서로 평행하면 $f(a)+f(b)=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. x^3의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x좌표가 α_1, α_2, α_3인 서로 다른 세 점에서 x축과 만나고, 함수 $y=f(x)$는 $x=\beta_1$, $x=\beta_2$에서 극값을 갖는다. 이때 항상 옳은 것은?

[3점-1005-비상]

① $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{1}{3}(\beta_1+\beta_2)$ ② $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{3}{2}(\beta_1+\beta_2)$
③ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3(\beta_1+\beta_2)$ ④ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\beta_1\beta_2$
⑤ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=2\beta_1\beta_2$

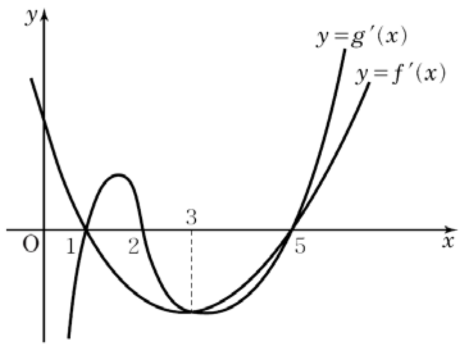
29. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$, $h(x)=f(x)-g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=2$에서 접한다.
(나) $f'(0)=g'(0)+4$
(다) $h(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.

이 때 $(-7)\times h(0)$의 값을 구하시오.[4점-1009-종로]

30. 두 함수 $f(x)=x^4+2x^3-10x+a$와 $g(x)=-x^2-10x+6$이 있다. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$를 만족시키는 실수 a의 최솟값을 m이라 하고, 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\ge g(x_2)$를 만족시키는 실수 a의 최솟값을 n이라 하자. $m+n$의 값을 구하시오.[4점–1005–메가]

31. 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 사차함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프가 그림과 같다.



옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1007–대성]

<보 기>

ㄱ. $1<x<3$에서 함수 $y=f(x)-g(x)$는 감소한다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)-g(x)$는 3개의 극점을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=g(x)$는 적어도 2개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

32. 삼차함수 $f(x)=x^3-4x$와 이차함수 $g(x)=2x^2-8$에 대하여 함수 $h(x)$는 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 함숫값 $h(a)$는 함숫값 $f(a)$와 함숫 값 $g(a)$ 중 하나이다.
(나) 함수 $h(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.
(다) 함수 $h(x)$의 극댓값이 존재한다.

이때, 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점–1005–중앙]

<보 기>

ㄱ. $h(0)=0$
ㄴ. 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.
ㄷ. 주어진 조건을 만족시키는 함수 $h(x)$의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

33. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여
집합 S를

$S=\{a\,|\,$함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점–2010–대수능]

34. 삼차항의 계수가 양수인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x+4)=g(x)+k$ (k는 상수) (나) $f(x)$는 $x=3$에서 극값 0을 갖는다. (다) $g(x)$는 $x=4$에서 극값 0을 갖는다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1010–대성]

<보 기>

ㄱ. $k>0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극솟값과 함수 $g(x)$의 극댓값의 합은 0이다.
ㄷ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 서로 만나지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

35. 사차함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+x+c$ (c는 상수)가 다음 조건을 만족시킬 때, $4c$의 값을 구하시오. (단, $f(-1)\neq 2$)[4점–1008–대성]

연립방정식 $\begin{cases} f(x)=(x+1)f'(x)+2 \\ f(x)=3x+5 \end{cases}$ 의 실수해가 존재한다.

36. 서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[4점–1006–평가원]

<보 기>

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실 근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37. 사차다항식 $f(x)$에 대하여 두 방정식 $f(x)=0$, $f(x)=x$가 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) 0을 근으로 갖지 않는다. (나) 실근의 개수는 3이다. (다) 음의 실근의 개수는 1이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1008–대성]

<보기>

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$과 $f'(x)=0$은 양의 공통근을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=2x$의 모든 실근의 곱은 0보다 작다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=\frac{x}{2}$의 음의 실근은 방정식 $f(x)=x$의 음의 실근보다 작다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

38. 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=2$에서 x축에 접한다.
> (나) 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=4$에서 x축에 접한다.
> (다) 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 도함수 $y=g'(x)$의 그래프와 일치한다.

부등식 $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

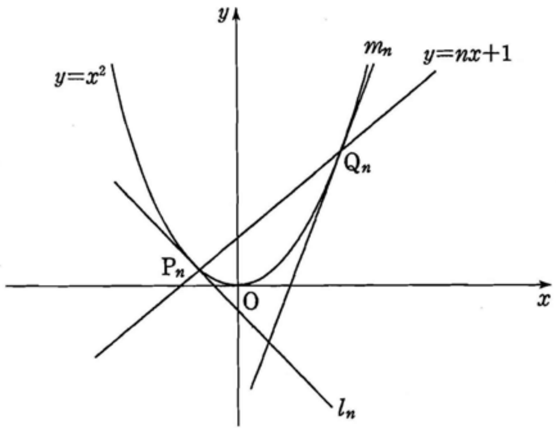
[4점-1009-대성]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

39. 두 양수 a, b에 대하여 두 이차함수 $y=x^2-4x+2$, $y=-x^2+ax+b$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때, 두 교점 중 한 교점을 P라 하자.
점 P를 지나고 각 함수의 그래프에 접하는 두 직선이 서로 수직으로 만날 때, 점 $(a,\ b)$가 그리는 자취는 직선 $b=ma+n$의 일부이다. 이때, $4(m^2+n^2)$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.)

[4점-1005-메가]

40. 자연수 n에 대하여 직선 $y=nx+1$과 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 P_n, Q_n이라 하고, 두 점 P_n,Q_n에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선을 각각 l_n, m_n이라 하자. 두 직선 l_n, m_n의 교점의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{40} a_n$의 값을 구하시오.[4점-1005-비상]

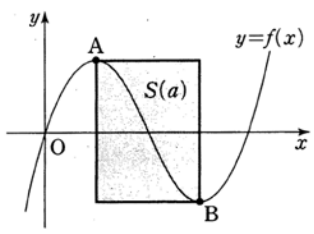


41. $\alpha \leq \beta \leq \gamma$인 세 실수 α,β,γ가 삼차방정식 $x^3+3x^2-24x=\alpha\beta\gamma$의 근이다. α의 값이 최대일 때, γ의 값은?

[4점-1005-중앙]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

42. 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$에 대하여 $y=f(x)$의 극대점을 A, 극소점을 B라 하자. 가로와 세로가 x, y축과 각각 평행하고, 선분 AB를 대각선으로 하는 직사각형의 넓이 S(a)의 값을 구하시오.[4점-1004-종로]



43. $h(x)=k(x-a)^2(x-b)^2$이면 곡선 $y=h(x)$는 $x=\dfrac{a+b}{2}$에 대하여 대칭임이 알려져 있다.
사참함수 $f(x)=x^4-6x^3+13x^2-11x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1007-종로]

<보 기>

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=x-4$의 그래프는 두 점에서 만난다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(x)+3-2x$를 만족한다.
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=x+k$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나고 네 점의 x좌표를 각각 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ $(\alpha<\beta<\gamma<\delta)$라 할 때, $f'(\alpha)+f'(\delta)>f'(\beta)+f'(\gamma)$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

44. 삼차함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $y=f(|x|)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1005-메가]

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축 위의 한 점에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=f(|x|)$는 음수인 실근을 갖지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

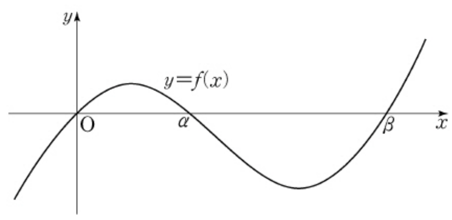
45. 삼차함수 $f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$ $(0<\alpha<\beta)$와 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(a)+(b-a)f'(x)$$

라고 하자. $a<0$, $\alpha<b<\beta$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1006-평가원]

<보 기>

ㄱ. x에 대한 방정식 $g(x)=f(a)$는 실근을 갖는다.
ㄴ. $g(b)>f(a)$ ㄷ. $g(a)>f(b)$

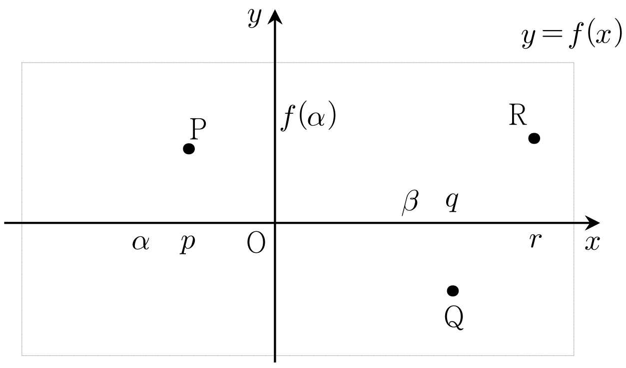


① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

46. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=-f(x)$
(나) $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ (단, $\alpha<\beta$)

그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$에서의 접선과 $y=f(x)$가 만나는 점을 $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$라 하고, $f(x)=f(\alpha)$이고 $x\neq\alpha$인 점을 $\mathrm{R}(r,\ f(r))$라 하자. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha\le p<0<q\le r$이다.)[4점–1011–대전교]



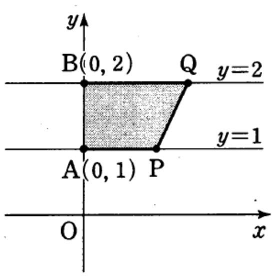
<보 기>

ㄱ. $q=-2p$ ㄴ. $\alpha+2r=3\beta$

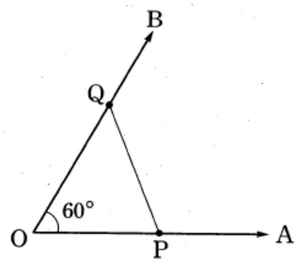
ㄷ. $\displaystyle\lim_{p\to-0}\frac{f(p)}{p}=3\alpha\beta$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

47. 점 P는 점 A(0, 1)을 출발하여 직선 $y=1$을 따라 x축의 방향으로 출발한 지 t초 일 때, $2t$ (m/초)의 속력으로 움직이고, 점 Q는 점 P가 움직이고 3초 후 점 B(0, 2)를 출발하여 직선 $y=2$를 따라 x축의 방향으로 12 (m/초)의 속력으로 움직인다. 점 Q가 출발한 후 사각형 APQB가 직사각형이 되는 순간 이 사각형의 넓이의 시각에 대한 순간의 변화율을 구하시오.[4점–1005–종로]



48. 두 반직선 OA, OB가 이루는 예각의 크기는 60°이고, 두 반직선 OA, OB 위를 각각 움직이는 두 점 P, Q에 대하여 임의의 시각 t에서 두 선분 OP, OQ의 길이는 각각 $t+3$, t^2+1이다. 삼각형 OPQ의 넓이가 $15\sqrt{3}$이 되는 순간 삼각형 OPQ의 넓이의 변화율은?[4점–1005–메가]

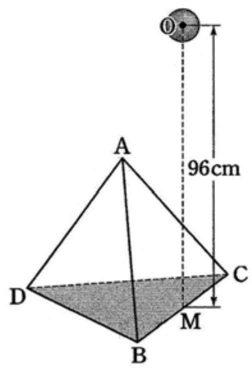


① $11\sqrt{3}$ ② $\dfrac{23\sqrt{3}}{2}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $13\sqrt{3}$

49. 그림과 같이 반지름의 길이가 2cm인 구 모양의 공과 지면위에 놓인 한 모서리의 길이가 10cm인 정사면체 ABCD가 있다. 공의 중심 O 에서 지면에 내린 수선의 발이 모서리 BC의 중점 M 과 같고, 점 M 에서 공의 중심 O까지의 거리는 96cm이다. 공을 지면에 수직으로 낙하시켰을 때, t 초 후의 지면으로부터 공의 중심까지의 높이 $h(t)$는

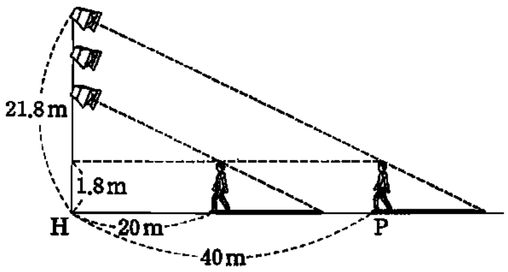
$h(t)=96-45t^2$(cm)

라고 한다. 공이 정사면체 ABCD 와 처음으로 충돌하는 순간 공 의 높이 변화율은? (단, 면 BCD는 지면에 닿아있고, 공기의 저 항은 무시한다.)[4점–1008–종로]

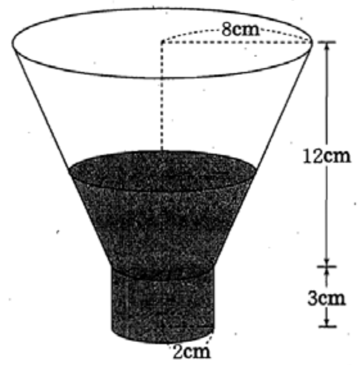


① $-45\sqrt{2}$(cm/초) ② $-45\sqrt{3}$(cm/초)
③ -90(cm/초) ④ $-90\sqrt{2}$(cm/초)
⑤ $-90\sqrt{3}$(cm/초)

50. 그림과 같이 바닥으로부터 21.8m 높이에 있는 조명이 매초 0.6m의 속도로 수직 방향으로 내려오고 있고, 동시에 조명 바로 밑 H지점)에서 40m 떨어진 P지점을 출발하여 1.8m의 키를 가진 배우가 1.2(m/초)의 속도로 H지점을 향하여 똑바로 걸어오고 있다. 이때, 이 배우가 조명 바로 밑(H지점)에서 20m 떨어진 지점을 지나는 순간의 그림자 끝의 속력은 a(m/초)이다. 이때, $10a$의 값을 구하시오.[4점-1006-종로]

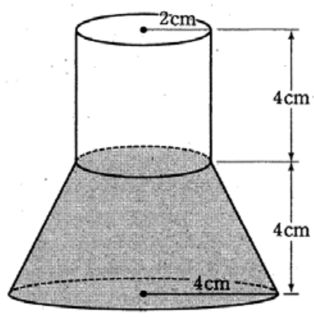


51. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2cm이고 높이가 3cm인 원기둥 위에 밑면의 반지름의 길이가 2cm이고 윗면의 반지름의 길이가 8cm이며 높이가 12cm인 원뿔대가 놓여 있는 모양의 그릇이 있다. 비어 있는 이 그릇에 수면의 높이가 매초 5mm의 일정한 속력으로 증가하도록 물을 넣을 때, 물을 넣기 시작하여 14초가 되는 순간, 그릇에 담긴 물의 부피의 시간(초)에 대한 변화율은? (단, 그릇의 밑바닥은 막혀 있다.)[4점-1005-대성]



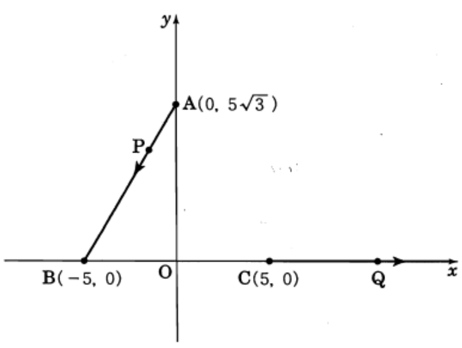
① $4\pi\text{cm}^3$/초 ② $5\pi\text{cm}^3$/초 ③ $6\pi\text{cm}^3$/초
④ $7\pi\text{cm}^3$/초 ⑤ $8\pi\text{cm}^3$/초

52. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4cm이고 높이가 4cm인 원뿔대와 밑면의 반지름의 길이가 2cm이고 높이가 4cm인 원기둥이 붙어 있는 모양의 유리컵이 있다. 이 컵에 수면의 높이가 매초 1cm증가하도록 물을 넣을 때, 원뿔대와 원기둥의 이음새를 지나는 물의 부피의 증가율은 $k\pi\text{ cm}^3$/초이다. k^2의 값을 구하시오.[4점-1010-종로]



53. 그림과 같이 좌표평면 위에 세 점 A$(0,\ 5\sqrt{3})$, B$(-5,\ 0)$, C$(5,\ 0)$이 있다. 동점 P는 점 A 를 출발하여 점 B 를 향하여 선분 AB 위를 매초 1 의 속력으로 움직이고 있고, 동점 P와 동시에 출발한 동점 Q 는 점 C 를 출발하여 x 축의 양의 방향으로 x 축 위를 매초 2 의 속력으로 움직이고 있다. 두 점 P, Q 가 동시에 출발한지 t 초 후의 두 점 사이의 거리의 제곱을 $f(t)$ $(0 \le t \le 10)$ 라 하자. $t=2$ 일 때, $f(t)$ 의 시간(초)에 대한 변화율을 구하시오.

[4점-1006-대성]



54. 온라인 게임에서 'S팩'이라는 아이템을 사용하면 사용 즉시 30초 동안 선수의 달리기 속도를 2m/초만큼 증가시킨다고 한다. 어떤 선수가 1000m달리기를 할 때, 출발과 동시에 'S팩' 아이템을 한번 사용했더니 'S팩' 아이템을 사용하지 않았을 때의 기록보다 12초 단축되었다. 이 선수가 'S팩' 아이템을 한번 사용했을 때의 1000m달리기 기록은 얼마인가? (단, 이 선수는 등속도로 달리고, 달리는 속력은 10m/초를 넘지 않는다.)[4점-1007-종로]

① 2분 40초 ② 2분 42초 ③ 2분 48초
④ 3분 2초 ⑤ 3분 8초

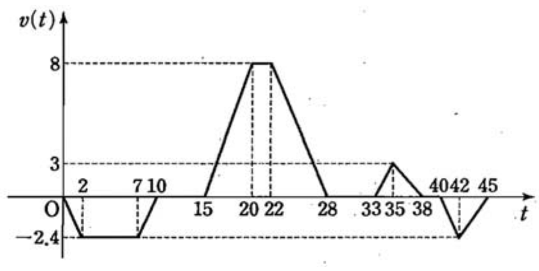
55. 두 역 A, B 사이에 놓인 철도 노선의 길이는 450km이다. A역에서 출발한 어떤 고속열차는 처음 150km 구간에서의 평균속력이 나머지 300km 구간에서의 평균속력보다 시속 125km만큼 빠르게 운행되어 B역에 도착한다고 한다. 이 고속열차의 총 운행시간이 3시간 이하가 되도록 할 때, 처음 150km 구간에서 운행된 고속열차의 평균속력의 최솟값은 $a$km/시이다. a의 값을 구하시오.

[4점-1005-대성]

56. 키가 150cm인 학생이 높이가 2m인 가로등 바로 밑에서 일직선 방향으로 멀어지고 있다. 이 학생이 가로등 밑에서 출발한지 t초 후의 학생의 속력이 $\frac{t}{10}$m/초일 때, 이 학생이 가로등 밑에서 출발한 지 3초 후의 학생의 그림자의 길이를 $\frac{b}{a}$m라 하자. 이때, $a+b$의 값을 구하시오.(단, a,b 는 서로소인 자연수이다.)

[4점-1005중앙]

57. 다음 그림은 어떤 고층 건물의 승강기의 시각 t(초)와 속도 $v(t)$(m/초) 의 관계를 나타낸 것이다. 승강기는 1층에 있을 때, 승강기의 바닥이 지면의 높이와 같다고 한다.



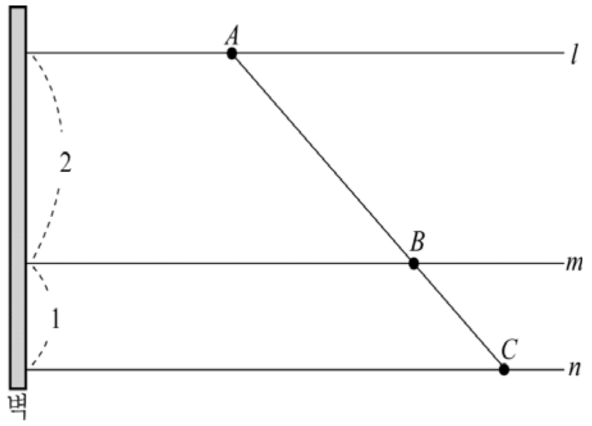
1층에서 출발하여 위쪽 방향을 (+)방향으로 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1006-종로]

<보 기>

ㄱ. 승강기는 출발한 이후에 다시 1층에서 정지하지 않았다.
ㄴ. 승강기가 출발한 후 45초 동안 승강기 바닥이 도달한 최고 높이는 49.5m이다.
ㄷ. 승강기가 출발한 후 42초가 되는 순간 승강기의 위치는
지하이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

58. 그림과 같이 케이블 l, m, n은 모두 벽면과 수직이고, 케이블 사이의 거리가 각각 2, 1이다. l위의 광원 A에서 m위의 물체 B에 빛을 비추면 n위에 그림자 C가 나타난다.



광원 A와 물체 B의 시각 $t\,(t \le 8)$에서 벽으로부터의 거리를 각각 $x = 4 - \frac{1}{2}t$, $y = t^2 - \frac{11}{2}t + 10$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 광원, 물체, 그림자의 크기는 무시한다.)[4점-1007-교육청]

<보 기>

ㄱ. $t = \frac{5}{2}$에서 광원과 물체의 속도가 같아진다.
ㄴ. A와 C 사이의 거리가 3인 순간은 두 번이다.
ㄷ. $2 < t < 3$에서 그림자 C의 가속도는 1이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

59. 함수 $f(x) = \ln\frac{x}{k}$ (k는 자연수)의 역함수를 $y = g(x)$라 할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점과 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 사이의 최단 거리를 l_k라 하자. $l_k \ge 3\sqrt{2}$를 만족시키는 k의 최솟값은? (단, $e = 2.7$로 계산한다.)[3점-1007-교육청]

① 11 ② 10 ③ 9
④ 8 ⑤ 7

60. 곡선 $y = \left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2$의 변곡점이 직선 $y = 2x$ 위에 있을 때, 양수 a의 값은?[3점-1009-평가원]

① e ② $\frac{5}{4}e$ ③ $\frac{3}{2}e$
④ $\frac{7}{4}e$ ⑤ $2e$

61. 곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선이 곡선 $y = x^2 + k$에 접할 때, 실수 k의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)[3점-1008-중앙]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{1}{4e^2}$
④ e^2 ⑤ $4e^2$

62. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x+3\ln x$ 위의 점 $(n,\ n+3\ln n)$에서 이 곡선에 그은 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\tan 2\theta_n}{n}$의 값은?

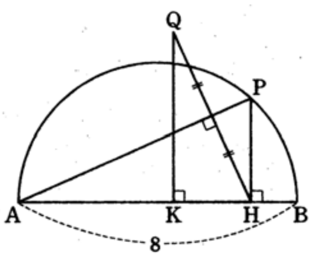
[3점–1010–비상]

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{4}$
④ 1　⑤ 2

63. 좌표평면에서 곡선 $y^3=\ln(5-x^2)+xy+4$ 위의 점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는?[3점–2010–대수능]

① $-\frac{3}{5}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{2}{5}$
④ $-\frac{3}{10}$　⑤ $-\frac{1}{5}$

64. 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 원주 위에 동점 P에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 한다. 또, 점 H의 직선 AP에 대한 대칭점을 Q라 하고, 점 Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 K라 한다. $\overline{\mathrm{QK}}$가 최대일 때의 선분 AP의 길이는?[3점–1010–종로]



① $4\sqrt{2}$　② $2\sqrt{10}$　③ $4\sqrt{3}$
④ $2\sqrt{13}$　⑤ $2\sqrt{15}$

65. 곡선 $y=\frac{1}{1-\cos x}$ $(0<x<\pi)$위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{1-\cos t}\right)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 할 때, $\lim_{t\to+0}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{QR}}}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

[3점–1010–비상]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

66. 함수 $f(x)=\frac{x}{e^x}$는 $x=\alpha$에서 극값을 갖고, 변곡점의 x좌표는 β이다. 이때, $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

[3점–1011–중앙]

① $\frac{e}{3}$　② $\frac{e}{2}$　③ $\frac{1}{e}$
④ $\frac{2}{e}$　⑤ e

67. 함수 $f(x)=\ln(e^x+e-1)$에 대한 설명 중 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1006–대성]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}f'(x)=1$
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 존재하지 않는다.
ㄷ. 임의의 양수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$는 항상 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

68. 미분가능한 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 $x=k$ 에서 공통접선을 가질 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, <보기>의 함수의 그래프는 모두 직선이 아니다.)[4점–1004–대성]

<보 기>

ㄱ. 두 곡선 $y=\{f(x)\}^2$, $y=\{g(x)\}^2$ 은 $x=k$ 에서 공통접선을 가진다.

ㄴ. 두 곡선 $y=e^{f(x)}$, $y=e^{g(x)}$ 은 $x=k$ 에서 공통접선을 가진다.

ㄷ. 두 곡선 $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$ 는 $x=k$ 에서 공통접선을 가진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

69. $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln x-\ln\sin\frac{\pi}{2}x}{x-\sin\frac{\pi}{2}x}$ 의 값은?[3점–1007–대성]

① 0 ② $\frac{2}{\pi}$ ③ 1
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

70. 함수 $f(x)=\ln(1+x^2)$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점–1011–대성]

<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$

ㄴ. 함수 $f'(x)$의 최솟값은 -1이다.

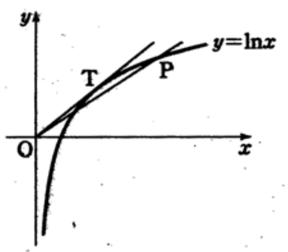
ㄷ. 임의의 실수 a, b에 대하여 $|f(a)-f(b)|\le|a-b|$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

71. 다음은 임의의 양수 p에 대하여 $e^p\ge p^e$임을 증명하는 과정이다.

<증 명>

원점에서 $y=\ln x$에 그은 접선의 방정식을 구하자. 접점을 $\mathrm{T}(\alpha, \ln\alpha)$라 하면, 접선의 방정식은



$y-\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)$ 이다. 이 직선이 원점을 지나야 하므로 $-\ln\alpha=-1$

따라서 접선의 방정식은 $\boxed{(가)}$이다.

이때 $y=\ln x$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(p, \ln p)$를 잡으면, $y=\ln x$의 그래프는 위로 볼록한 그래프이므로

($\overline{\mathrm{OT}}$의 기울기) $\ge$ ($\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기)

따라서 $\frac{1}{e}\ge\boxed{(나)}$이다.

$\therefore p\ge e\ln p$이고, $e^p\ge e^{e\ln p}=p^e$

따라서 임의의 양수 p에 대하여 $e^p\ge p^e$이다.(단, 등호는 $p=e$일 때 성립)

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)[4점–1007–종로]

	(가)	(나)
①	$y=\frac{1}{e}x$	$\frac{1}{p}$
②	$y=\frac{1}{e}x$	$\frac{\ln p}{p}$
③	$y=ex$	$\frac{1}{\ln p}$
④	$y=ex$	$\frac{\ln p}{p}$
⑤	$y=x$	$\frac{1}{p}$

72. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$)[4점–1010–메가]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x) = xe^x$은 개구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

ㄴ. 방정식 $xe^x - 1 = 0$은 개구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 실근을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $e^x + e^{-x} = x + x^{-1}$은 개구간 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$에서 실근을 갖는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

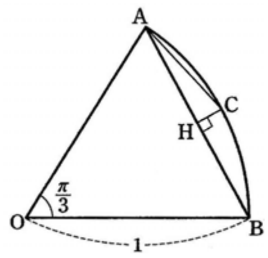
73. $0 \le x < \frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x - k \le -\ln(\cos x) - \ln 2$$

가 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값은?[4점–1009–종로]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{1}{2}\ln 2$ ③ $\ln 2$
④ $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$ ⑤ $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\ln 2$

74. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 AOB의 호 AB 위의 점 C에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이때 삼각형 ACH의 넓이가 최대가 되기 위한 $\angle$CAH의 크기는 $\frac{\pi}{a}$이다. 상수 a의 값을 구하시오.[4점–1008–종로]



75. 함수 $f(x) = e^{-x}\sin x\ (x \ge 0)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, e는 자연로그의 밑이다.) [4점–1008–비상]

<보 기>

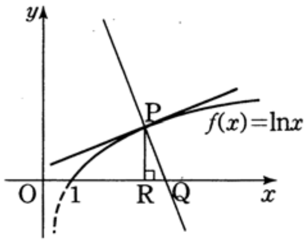
ㄱ. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

ㄴ. 임의의 x에 대하여 $f(x + 2\pi) < f(x)$이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x = \frac{5\pi}{4}$에서 최솟값을 가진다.

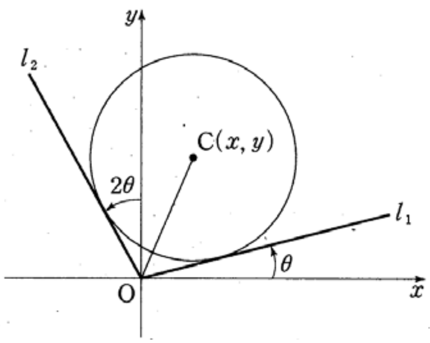
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

76. 곡선 $f(x)=\ln x\ (x>1)$ 위의 점 P를 지나면서 점 P에서의 접선에 수직인 직선과 x축의 교점을 Q라 하고, 점 P에서x축에 내린 수선의 발을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값을 M이라 할 때, e^2M의 값을 구하시오. (단, e는 자연로그의 밑이다.)



[4점–1009–중앙]

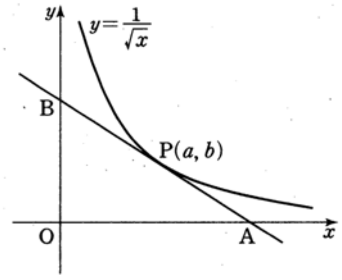
77. 그림과 같이 좌표평면 위에서 원점 O를 중심으로 회전하는 두 개의 반직선 l_1, l_2가 있다. 반직선 l_1은 x축의 양의 방향에서 시작하여 시계 반대 방향으로 매초 1(rad/초)의 속도로 회전하고 있고, 반직선 l_2는 y축의 양의 방향에서 시작하여 시계 반대 방향으로 매초 2(rad/초)의 속도록 회전하고 있다.



두 반직선 l_1, l_2가 회전을 시작하여 t초 후, 이들 두 반직선에 접하고 반지름의 길이가 1인 원의 중심의 좌표를 C$(x,\ y)$라 하자. 이때, $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{dy}{dt}$의 값은? $\left(단,\ 0\le t<\dfrac{\pi}{2}\right)$[4점–1011–종로]

① -2 ② $-\dfrac{3}{2}$ ③ -1
④ $-\dfrac{2}{3}$ ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

78. 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 위의 점 P$(a,\ b)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.)[4점–1010–종로]



<보 기>

ㄱ. $a=4$일 때, 직선 AB의 기울기는 $-\dfrac{1}{16}$이다.

ㄴ. $a=b$이면 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이다.

ㄷ. 선분 AB의 최솟값은 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

79. 다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f'(x)$	$+$		$+$	0
$f(x)$		$\dfrac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1009–평가원]

<보 기>

ㄱ. $g'(3)=-1$

ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.

ㄷ. 점 P(1, 1)은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

80. 원점 O와 함수 $f(x)=e^x$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$에 대하여 $F(x)=\overline{\mathrm{OP}}^2$이라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1007–대성]

<보 기>

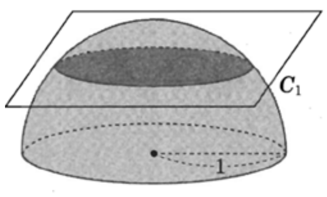
ㄱ. 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 최솟값을 가질 때 $e^{2a}=-a$이다.

ㄴ. 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$F\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\le\dfrac{F(x_1)+F(x_2)}{2}$이다.

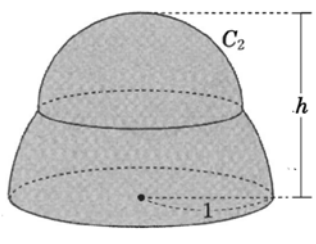
ㄷ. 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면
$\dfrac{F(x_1)}{x_1}<\dfrac{F(x_2)}{x_2}$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

81. [그림 1]과 같이 밑면의 반지름의 길이가 1인 반구 C_1을 밑면과 평행한 평면으로 잘랐다. 이 때, 생긴 단면을 밑면으로 하는 작은 반구 C_2를 [그림 2]와 같이 반구 C_1의 단면 위에 올려놓을 때, 전체 높이 h의 최댓값은?[4점–1009–대성]



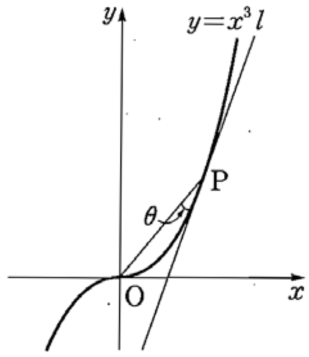
[그림 1]



[그림 2]

① $\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$　② $\sqrt{2}$　③ $\dfrac{3}{2}$
④ $\sqrt{3}$　⑤ $2\sqrt{2}-1$

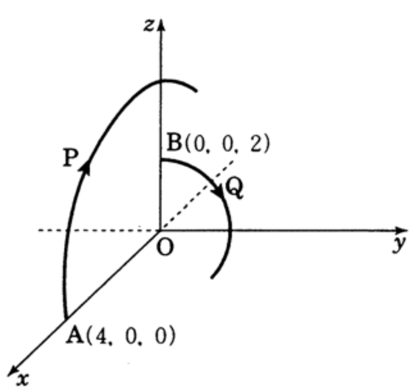
82. 그림과 같이 삼차함수 $y=x^3$의 그래프 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ $(a>0)$에서의 접선 l과 선분 OP가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)[4점–1007–메가]



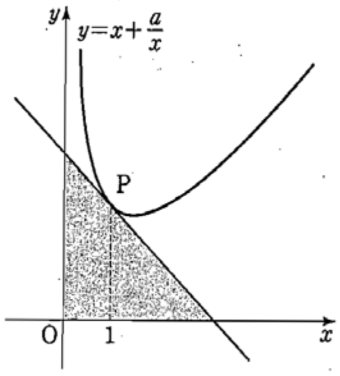
① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

83. 그림과 같이 좌표공간의 zx 평면 위에 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 4 인 원 위를 매초 4 의 속력으로 움직이는 점 P 와 yz 평면 위에 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 2 인 원 위를 매초 4 의 속력으로 움직이는 점 Q 가 있다. 점 P 는 점 A(4, 0, 0)에서 출발하여 화살표 방향으로 움직이고 점 Q 는 점 B(0, 0, 2)에서 출발하여 화살표 방향으로 움직이고 있다. 두 점 P, Q 가 동시에 출발할 때, 원점과 두 점 P, Q 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OPQ 의 넓이의 최댓값을 M이라 할 때, $8M^2$의 값을 구하시오.

[4점–1004–대성]



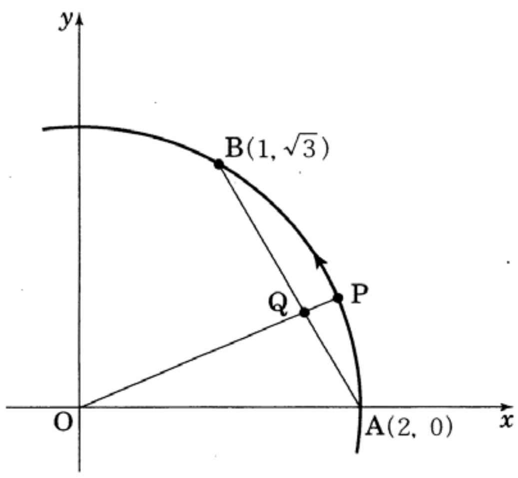
84. 그림과 같이 곡선 $y=x+\dfrac{a}{x}$ $(a>1)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 1+a)$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(a)$라 할 때, 함수 $S(a)$의 최솟값은?[4점–1006–종로]



① 5　② $\dfrac{11}{2}$　③ 6　④ $\dfrac{15}{2}$　⑤ 8

85. 그림은 좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 2인 원의 일부를 나타낸 것이다. 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ \sqrt{3})$과 호 AB 위의 점 P에 대하여 두 선분 AB, OP의 교점을 Q라 하자. 동점 P가 점 A를 출발하여 호 AB 위를 매초 2의 일정한 속력으로 점 B까지 시계 반대 방향으로 움직일 때, 점 Q의 속력의 최솟값은?

[4점–1010–대성]



① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　③ 1　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

86. 함수 $f(x)=\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{(x^2-2x+2)^2}$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1007–교육청]

<보 기>

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선과 원점 사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{1}{8}$ 이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)-f(10)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

87. $0<a<b<c<3$인 임의의 실수 a, b, c에 대하여 다음 중 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$를 만족하는 함수 $f(x)$를 고르면?

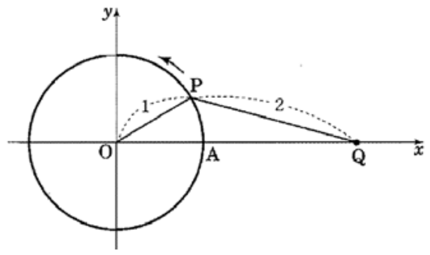
[4점–1005–종로]

① $f(x)=\cos x$　② $f(x)=\sin x$　③ $f(x)=x^3$　④ $f(x)=2x-\ln x$　⑤ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

88. 함수 $f(x)=x\ln(x^2+3x+3)$에 대하여 $\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=a$라 하자. e^a의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)[4점–1007–종로]

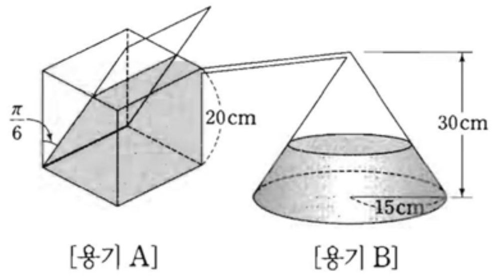
① 1　　② $\sqrt{e}$　　③ 3
④ e　　⑤ e^2

89. 좌표평면에서 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 점 P가 점 A(1, 0)에서 출발하여 이 원 위를 매초 1의 일정한 속력으로 시계 반대 방향으로 움직이고, 점 Q는 $\overline{PQ}=2$를 유지하면서 x축 위를 움직인다.

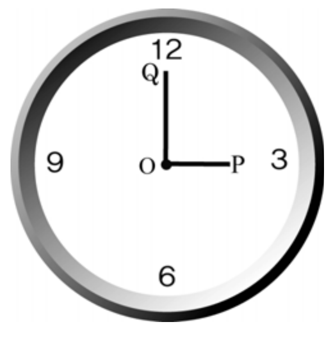


점 P가 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 지나는 순간, 점 Q의 속력은 $p+q\sqrt{5}$ 이다. $\frac{1}{pq}$ 의 값을 구하시오. (단, 점 Q의 x좌표는 양수이고, p ,q는 유리수이다.)[4점–1011–대성]

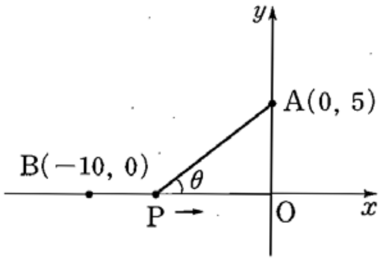
90. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 20cm인 정육면체 모양의 [용기A]와 밑면의 반지름의 길이가 15cm이고, 높이가 30cm인 직원뿔 모양의 [용기B]가 위 부분끼리 관으로 연결되어 있다. 또, [용기A]에는 밑면의 모서리가 고정되어 있고, 옆면에 붙어 있던 얇은 판이 옆면과 이루는 각이 매초 $\frac{\pi}{20}$ (rad)만큼 커지도록 움직이면서 [용기A]에 가득 차 있던 물이 비어 있는 [용기B]에 흘러 들어간다. 이때, [용기A]의 얇은 판이 옆면과의 이면각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 가 되는 순간의 [용기B]의 수면의 반지름의 길이는 a(cm)이고, 상승속도는 v(cm/초)이다. $3a^2v$ 의 값을 구하시오.[4점–1006–종로]



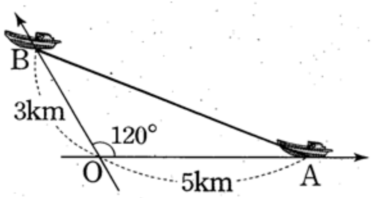
91. 그림과 같은 원모양의 시계가 있다. 시계의 중심을 O, 길이가 2인 시침의 끝점을 P, 길이가 3인 분침의 끝점을 Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하자. 4시 정각이 되는 순간, 넓이 S의 시간(분)에 대한 순간변화율은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 세 점 O, P, Q가 일직선 위에 있는 경우는 $S=0$으로 한다.)[4점–1007–교육청]



92. 그림과 같이 좌표평면에 정점 A(0, 5)가 있고, B(−10, 0)을 출발하여 x축의 양의 방향으로 매초 1의 일정한 속도로 움직이는 점 P가 있다. ∠APO의 크기를 θ라 할 때, 점 P가 점 B를 출발하여 9초가 되는 순간 θ의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점−1007−메가]

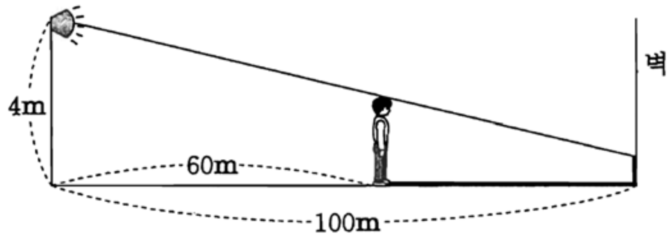


93. 두 척의 배 A, B가 한 지점 O를 지나 120°의 각을 이루면서 그림과 같이 직선 항로로 항해하고 있고, 배 A의 속력은 28km/시, 배 B의 속력은 21km/시로 일정하다. 배 A가 점 O로부터 5km, 배 B가 점 O로부터 3km 떨어진 지점을 지나는 순간 두 배 A, B 사이의 거리의 변화율은 $a$km/시라고 한다. 이때, a의 값은? (단, 배의 크기는 무시한다.)[4점−1010−중앙]



① 41 ② 41.5 ③ 42 ④ 42.5 ⑤ 43

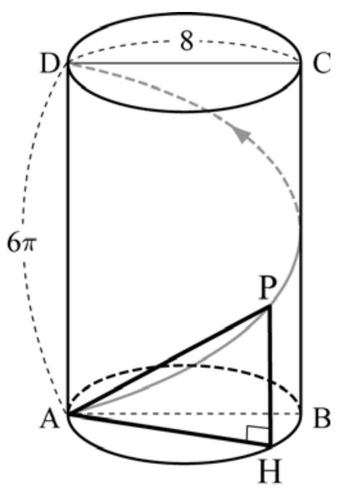
94. 그림과 같이 지면으로부터의 높이가 4(m)인 지점에 가로등이 있고 가로등과 100(m) 떨어진 곳에 지면에 수직인 벽이 있다. 키가 2(m)인 학생이 가로등 밑을 출발하여 벽을 향해 벽에 수직인 방향으로 90(m/분)의 일정한 속력으로 걸어간다. 이 학생이 가로등 밑에서 60(m) 떨어진 지점을 지나는 순간, 이 학생의 전체 그림자의 길이의 시간(분)에 대한 변화율은 a(m/분)이다. $|a|$의 값을 구하시오. (단, 그림자의 꺾인 부분도 그림자의 길이에 포함된다.)[4점−1006−대성]



95. 밑면의 지름의 길이가 8이고 높이가 6π인 원기둥이 있다. 그림과 같이 평행한 두 선분 AB와 DC는 서로 다른 두 밑면의 지름이고, 두 선분 DA와 AB는 수직이다.

점 P가 매초 π의 일정한 속력으로 원기둥의 옆면을 따라 점 A에서 출발하여 선분 CB 위의 점을 지나 점 D까지 최단거리로 움직인다. 점 P에서 선분 AB를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 삼각형 PAH의 넓이를 S라 하자.

점 P가 점 A에서 출발한 지 5초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점–1010–교육청]



96. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 시각 t에서의 위치가

$$x = 2\sin t - 2\cos t, \quad y = 3\sin t\cos t$$

이다. 점 P의 속력의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점–1011–대전교]

정답 및 풀이

1. 답 ②

$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{3}{2}x$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{3}{2}x$

$x^3+3x^2-2=0$

$(x+1)(x^2+2x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x^2+2x-2=0$

$x^2+2x-2=0$의 두 근은 무연근이 아니고 $x=-1$은 무연근이다.

따라서, 모든 근의 합은 -2이다.

2. 답 99

[해설]

$\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}+$

$\cdots+\frac{1}{(x-97)(x-98)}+\frac{1}{(x-98)(x-99)}$

$=-(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1})-(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2})-\cdots$

$-(\frac{1}{x-97}-\frac{1}{x-98})-(\frac{1}{x-98}-\frac{1}{x-99})$

$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-99}$

이므로 주어진 방정식은

$-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-99}=1$

위 식에 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 정리하면

$x^2-99x-99=0$

위 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=99^2+4 \cdot 99>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

또, 0부터 99까지의 정수해가 존재하지 않으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 분수 방정식의 모든 실근의 합은 99이다.

3. 정답 ①

주어진 분수방정식의 양변에 $x(x+1)$을 곱하여 정리하면

$3(x+1)+ax=x-a$

$(a+2)x=-a-3$

(i) $a=-2$일 때, 불능이므로 해가 없다.

(ii) $a\neq-2$일 때, $x=\frac{-a-3}{a+2}$

한편 $\frac{-a-3}{a+2}=0$ 또는 $\frac{-a-3}{a+2}=-1$이면 무연근이므로 해가 아니다.

(i) $\frac{-a-3}{a+2}=0$ 에서 $a=-3$

(ii) $\frac{-a-3}{a+2}=-1$에서 만족하는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

따라서, 구하는 a의 값은 -2 또는 -3이고 그 합은 -5이다.

4. 정답 ④

$\frac{x}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=\frac{ax+5}{x^2-1}$을 통분하면

$\frac{x(x+1)+(x-1)(x-2)}{x^2-1}=\frac{ax+5}{x^2-1}$

$2x^2-2x+2=ax+5$

$2x^2-(a+2)x-3=0$

오직 하나의 실근을 가지려면 중근을 가져야 하므로

$D=(a+2)^2-4\cdot2\cdot(-3)=0$에서

$a^2+4a+28=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하면

합은 28인데 보기에 없네요.

그러면 무연근을 이용하여

$x=1$을 대입하면 $a=-3$

$x=-1$을 대입하면 $a=-1$

그러므로 $(-1)\times(-3)=3$

5. 정답 ④

B가 시간당 처리하는 데이터의 양을 x기가바이트라고 하면 B가 데이터 처리를 완료하는데 걸리는 시간은 $\frac{400}{x}$시간이다.

또 A가 B보다 시간당 20기가바이트씩 더 처리하므로 A가 데이터 처리를 완료하는 데 걸리는 시간은 $\frac{400}{x+20}$시간이다.

A가 B보다 1시간 먼저 데이터 처리를 완료하였으므로

$\frac{400}{x}-\frac{400}{x+20}=1$

양변에 $x(x+20)$을 곱하여 정리하면

$x^2+20x-8000=0$

$(x+100)(x-80)=0$

$x>0$이므로 $x=80$

따라서 A, B 두 기종의 컴퓨터가 시간당 처리하는 데이터의 양의 비는

$(x+20):x=100:80=5:4$

6. ②

수영에서의 평균속력을 v (km/분)로 놓으면 싸이클 , 달리기에서의 평균속력은 각각 $10v$, $v+0.1$이다.

전체 걸린 시간은 85분이므로

$\frac{1.5}{v}+\frac{20}{10v}+\frac{10}{v+0.1}=85$

$\frac{3.5}{v}+\frac{10}{v+0.1}=85$

양변에 분모의 최소공배수 $v(v+0.1)$을 곱하여 정리하면

$85v^2-5v-0.35=0$, $15v^2-v-0.07=0$

$(v-0.1)(17v+0.7)=0$

$\therefore v=-.1$ (km/분)

7. ②

나연이와 시연이가 함께 작업을 할 때 x시간이 걸린다고 하면,

나연이 혼자서 할 때 걸리는 시간은 $(x+2)$시간,

시연이 혼자서 할 때 걸리는 시간은 $\left(x+\frac{9}{2}\right)$시간이다.

따라서 전체 작업량을 A라 하면, 나연이와 시연이가 1시간 동안 하는 작업량은 각각 $\frac{A}{x+2}$, $\frac{A}{x+\frac{9}{2}}$이고 함께 작업할 때의 시간 당 작업량은 각 사람의 시간 당 작업량의 합과 같으므로

$\frac{A}{x+2}+\frac{A}{x+\frac{9}{2}}=\frac{A}{x}$

$\frac{1}{x+2}+\frac{2}{2x+9}=\frac{1}{x}\ (\because\ A\neq 0)$

양변에 분모의 최소공배수를 곱하면

$x(2x+9)+2x(x+2)=(x+2)(2x+9)$

$2x^2=18,\ x^2=9$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$ $\qquad \therefore x=3\ (\because x>0)$

8. 답 30

A를 출발할 때의 P의 속력을 시속 $x$km라고 하면 Q의 속력은 시속 $x-30$km이므로 도착 예정 시간의 차이는

$\frac{90}{x-30}-\frac{120}{x}=\frac{1}{6}$

양변에 $6x(x-30)$을 곱하여 정리하면

$x^2+150x-90\times 240=0$

$(x-90)(x+240)=0$

$x>0$이므로 $x=90$

따라서, 1시간 이동 후 P, Q의 남은 거리는 각각

$120-90=30$, $90-60=30$이므로 P, Q가 동시에 도착하려면 P의 속력도 시속 60km이어야 한다.

따라서, P의 이동속력을 시속 30km줄여야 한다.

9. 정답 10

갑이 C지점에 도달할 때까지 걸리는 시간은

$\frac{0.02}{5}+\frac{0.06}{5+5}$이고, 을의 속력을 v라 할 때, 을이 C지점에 도달할 때까지 걸리는 시간은 $\frac{0.04}{v}+\frac{0.03}{v-5}$이므로

$\frac{0.02}{5}+\frac{0.06}{5+5}\geq\frac{0.04}{v}+\frac{0.03}{v-5}$

v는 5보다 커야하므로

$v^2-12v+20\geq 0$

$v\geq 10$

따라서, 을의 최소 속력은 시속 10 km이다.

10. 정답 ①

$x+\frac{6(x+1)}{x^2-9}=\frac{4}{x-3}$

$\Leftrightarrow\ x(x^2-9)+6(x+1)=4(x+3),\ \ x\neq\pm 3$

$\Leftrightarrow\ x^3-7x-6=0,\ \ x\neq\pm 3$

$\Leftrightarrow\ (x+1)(x+2)(x-3)=0,\ \ x\neq\pm 3$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=-2$

따라서, 모든 근의 합은 $(-1)+(-2)=-3$이다.

11. 답 ⑤

[해설] $\alpha\in A\cap B$라고 하면

$\alpha^2-3\alpha-4a=0\ \cdots$ ㉠

$\frac{1}{\alpha-a}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{4}$에서

$\alpha^2-a\alpha-4a=0\ \cdots$㉡

㉠−㉡을 하면 $(a-3)\alpha=0$

$\therefore a=3$ 또는 $\alpha=0$

$\alpha\neq 0$이므로 $a=3$

$\therefore \alpha^2-3\alpha-12=0$

따라서, 위의 식을 만족하는 α의 곱은 -12이다.

12. 답 ①

삼차방정식 $f(2x+1)=0$에서 $2x+1=t$라 하면

$f(t)=0$이 되는 t는 1,5,9이므로 x는 0,2,4이고, 삼차 방정식 $g(x-1)=0$에서 $x-1=s$라 하면 $g(s)=0$이 되는 s는 3,4,5이므로 x는 4,5,6이다.

한편 $\frac{f(2x+1)}{g(x-1)}=0 \Leftrightarrow f(2x+1)=0,\ g(x-1)\neq 0$이므로

$\frac{f(2x+1)}{g(x-1)}=0$의 근은 0, 2의 2개이고 그 합은 2이다.

13. 정답 ②

주어진 방정식의 양변에 $f(x)g(x)$를 곱하여 정리하면

$\{g(x)\}^2-2f(x)g(x)+\{f(x)\}^2=0$

$\{g(x)-f(x)\}^2=0$

$\therefore f(x)=g(x)$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$ 또는 $x=7$

이 때, $x=0$과 $x=1$은 주어진 분수방정식의 분모를 0이 되게 하므로 무연근이다.

따라서 구하는 합은 $4+7=11$이다.

14. 답 ②

[해설] $\frac{1}{1-4f(x)}=\frac{1}{x^2}$을 정리하면 $x62=1-4f(x)$에서

$f(x)=-\frac{1}{4}(x^2-1),\ f(x)\neq\frac{1}{4},\ x\neq 0$

따라서 주어진 분수방정식의 실근의 개수는 두 곡선

$y=-\frac{1}{4}(x^2-1)$과 $y=f(x)$의 교점 중 $f(x)=\frac{1}{4}$, $x=0$인 점을 제외한 점의 개수와 같으므로 $3-1=2$(개)이다.

15. 정답 ⑤

ㄱ. (참) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}+2=0$에서

$\frac{2}{x-1}+2=0,\ \ \frac{x}{x-1}=0$

$\therefore\ x=0$

ㄴ. (참) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+2=0$에서

$(x-2)+2(x-1)+2(x-1)(x-2)=0,\ x\neq 1,\ x\neq 2$

$2x^2-3x=0,\ x\neq 1,\ x\neq 2$

$x(2x-3)=0,\ x\neq 1,\ x\neq 2$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

ㄷ. (참) $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+2=0$에서

$a(x-b)+b(x-a)+2(x-a)(x-b)=0,\ x\neq a,\ x\neq b$

$2x^2-ax-bx=0,\ x\neq a,\ x\neq b$

$x(2x-a-b)=0,\ x\neq a,\ x\neq b$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{a+b}{2}$

16. 정답 ⑤

ㄱ. (참) $a=b=c$이면 $\frac{3}{x-a}=0$이므로 실근은 존재하지 않는다.

ㄴ. (참) $a=b, b\neq c$이면 $\frac{2}{x-a}+\frac{1}{x-c}=0$

$2(x-c)+(x-a)=0$

$x=\frac{a+2c}{3}$

$a\neq c$이므로 무연근이 아니다.

그러므로 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. (참) $(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)=0$ …㉠

$3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$

$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}>0$

($\because\ a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a$)

㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고 $x=a,\ x=b,\ x=c$는 이차방정식 ㉠의 근이 아니므로 그 두 실근은 무연근이 아니다.

그러므로 주어진 분수방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

17. 정답 ③

ㄱ. $a\neq b$일 때, $f(x)=\frac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}$이므로

$f(x)=0\Leftrightarrow 2x-a-b=0$(단, $x\neq a, x\neq b$)

$\Leftrightarrow x=\frac{a+b}{2}$

따라서 방정식 $f(x)=0$은 항상 한 개의 실근을 갖는다.

$\therefore$참

ㄴ. $f(x)<0\Leftrightarrow(x-a)(x-b)(2x-a-b)<0$

$a<b$일 때, $a<\frac{a+b}{2}<b$이므로 $f(x)<0$의 해는

$x<a$ 또는 $\frac{a+b}{2}<x<b$이다. $\therefore$거짓

ㄷ. ㄴ에서 $f(x)<0$의 해는 $x<a$또는 $\frac{a+b}{2}<x<b$이고, $0<a<b$일 때, $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$이므로 $f(x)<0$의 해 중에는 $\sqrt{ab}$보다 큰 값이 있다. $\therefore$참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18. 정답 ⑤

$\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x\cdot f(x)}$의 양변에 $xf(x)$를 곱하여 정리하면

$f(x)+x=1$

$f(x)=-x+1,\ f(x)\neq 0,\ x\neq 0$

즉, $y=f(x)$, $y=-x+1$의 교점들 중에서 $f(x)\neq 0$, $x\neq 0$을 만족하는 것의 개수가 오직 1개이어야 한다.

그런데 보기의 주어진 함수 $f(x)$는 모두 위의 방정식을 만족하는 실근의 개수가 0이므로 주어진 조건을 만족하는 함수는 존재하지 않는다.

19. 정답 55

[출제의도] 분수방정식의 해 구하기

주어진 분수방정식의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 정리하면 $\{f(x)\}^2-3f(x)+2=0$이다.

$\therefore\ f(x)=1$(무연근), $f(x)=2$

조건에서 $f(x)=(x-7)(x-8)+1$이므로 이차방정식 $x^2-15x+55=0$의 두 근의 곱은 55이다.

20. 정답 ②

$\frac{a}{x}+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{x(x-1)}$에서

$a(x-1)+x=x(x-1)+1$

$x^2-(a+2)x+a+1=0$

$(x-1)(x-a-1)=0$

$\therefore\ x=1$또는 $x=a+1$

$n(A)=0$이 되기 위해서는 위의 이차방정식의 해가 모두 무연근이어야

하고, $x=1$는 무연근이므로

$a+1=0$일 때, $a=-1$

$a+1=1$일 때, $a=0$

따라서 주어진 조건을 만족하는 실수 a는 2개다.

21. 답 ②

$f(x)-(x-1)=(x+3)(x-2)(x-4)$에서

$f(x)=(x+3)(x-2)(x-4)+(x-1)$이므로

$f(x)+4=(x+3)(x-2)(x-4)+(x+3)$

$=(x+3)(x^2-6x+9)$

$=(x+3)(x-3)^2$

$f(x)-3=(x+3)(x-2)(x-4)+(x-4)$

$=(x-4)(x^2+x-5)$

그러므로 준식은

$$\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-3)^2}=\frac{(x-2)(x^2+x-5)}{(x-4)(x^2+x-5)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

가 되어 $x\neq\pm3$, $x\neq4$, $x^2+x-5\neq0$이고, 위 식을 정리하면

$(x-2)(x-4)=(x-2)(x-3)^2$

$(x-2)(x^2-7x+13)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x^2-7x+13=0$

이때, 이차방정식 $x^2-7x+13=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\cdot13=-3<0$이므로 실근을 갖지 않는다.

따라서 구하는 분수 방정식 ㉠을 만족시키는 실근은 2의 1개이다.

22. 정답 ②

$f(x)=x^2-(2a+2)x+a^2+2a$

$\quad=(x-a)(x-a-2)$

$$\frac{f(x)}{x-b}=\frac{f(x)}{x-c} \Leftrightarrow f(x)\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)(b-c)}{(x-b)(x-c)}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

여기서 $b=c$이면 해가 무수히 많으므로 $b\neq c$

이 때, $f(x)=0$으로부터 $x=a$, $x=a+2$

그런데 이들이 분모를 0이 되게 할 때, ㉠에서 해가 모두 무연근이 되므로

$b=a$, $c=a+2$ (또는 $b=a+2$, $c=a$)

$\therefore\ b^2+c^2=a^2+(a+2)^2$

$\quad=2(a+1)^2+2$

따라서, $a=-1$일 때, b^2+c^2의 최솟값은 2이다.

23. 답 ③

[해설] 분수방정식

$(f\circ f)(x)=t$로 놓으면

$\frac{4-x}{t}-\frac{t}{x}=0$에서 $t^2=4x-x^2$

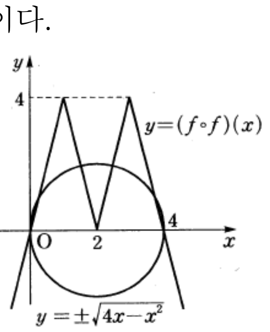
$\therefore t=\pm\sqrt{4x-x^2}\ \cdots ㉠$

즉, 방정식 ㉠의 실근의 개수는 두 함수 $y=(f\circ f)(x)$와 $y=\pm\sqrt{4x-x^2}$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

한편, $y=\pm\sqrt{4x-x^2}$의 양변을 제곱하여 정리하면 $(x-2)^2+y^2=4$이므로 $y=\pm\sqrt{4x-x^2}$의 그래프는 점 $(2,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이다.

이때, 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 그래프의 교점의 개수는 6개다.

그런데 이 중에서 $x=0$, $x=4$는 주어진 방정식의 무연근이므로 구하는 방정식의 실근의 개수는 4개다.



24. 정답 ④ 수학 외적 문제 해결 능력 – 방정식과 부등식

전체 일의 양을 1, A, B가 한 시간에 하는 일의 양을 각각 x, y라 하면

$\frac{1}{x}=\frac{1}{x+y}+8 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{x+y}+2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠−㉡을 하면 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=6$

$\therefore\ y=\frac{x}{1-6x}$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x+\frac{x}{1-6x}}+8=\frac{-48x^2+10x+1}{x(2-6x)}$$

$48x^2-16x+1=0$

$(12x-1)(4x-1)=0$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{12} \\ y=\frac{1}{6} \end{cases},\ \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{(부적합)}$$

따라서 A가 이 일을 하는데 걸리는 시간은 12(시간)이다.

25. 정답 20

수학 외적문제 해결 능력 – 방정식과 부등식

B 공장에서 한 시간 동안 생산하는 자동차의 대수를 x라 하면 A공장에서 한 시간 동안 생산하는 자동차의 대수는 $x+4$이다.

이 때, $\frac{960}{x+4}=\frac{600}{x}+10$이므로

$\frac{96}{x+4}=\frac{60}{x}+1$

양변에 $x(x+4)$를 곱하면

$96x=60(x+4)+x(x+4)$

$x^2-32x+240=0$

$(x-12)(x-20)=0$

$\therefore x=12$ 또는 $x=20$

$x=12$이면 B공장은 하루에 $12\times24=288$대의 자동차를 생산하므로 조건에 모순이다.

$x=20$이면 B공장은 하루에 $20\times24=480$대의 자동차를 생산하므로 조건을 만족한다.

따라서 B공장에서 한 시간 동안 생산하는 자동차는 20대이다.

26. 105 수학 외적 문제 해결 능력 – 방정식과 부등식

서로 반대 방향으로 돌 때의 속력은 한 사람이 $3a+2$의 속력으로 420m를 이동한 것과 같으므로 한 바퀴 도는데 걸리는 시간은 $\frac{420}{3a+2}$초이다.

서로 같은 방향으로 돌 때의 속력은 한 사람이 $a+2$의 속력으로 420m를 이동한 것과 같으므로 한 바퀴 도는데 걸리는 시간은 $\frac{420}{a+2}$초이다.

두 경우의 시간의 차가 40초이므로

$\dfrac{420}{a+2}-\dfrac{420}{3a+2}=40$이다.

$21(3a+2-a-2)=2(3a+2)(a+2)$

$6a^2-26a+8=0$

$(3a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=4(\because a>1)$

$\therefore \dfrac{420}{4}=105$(초)

27. 답 ④

순이와 철수의 속력은 각각 매시 $a$km와 $(a+2)$km이고, 두 사람이 만날 때까지 걸린 시간이 같으므로

$\dfrac{4}{a}=\dfrac{5}{a+2}+\dfrac{1}{3},\ a\neq 0,\ a\neq -2$

양변에 $3a(a+2)$를 곱하면

$12(a+2)=15a+a(a+2)$

정리하면 $a^2+5a-24=0$

$(a+8)(a-3)=0$

이때, $a>0$이므로 $a=3$이고 이 값은 분수방정식의 분모를 0으로 하지 않으므로 구하는 근이다.

$\therefore\ a=3,\ b=a+2=5$

$\therefore\ a+b=8$

28. 정답 12

A가 시간당 하는 일의 양을 x, B가 시간당 하는 일의 양을 y, 전체 일의 양을 1이라 두자.

이때 A 혼자 일을 완성하는 데 걸리는 시간은 $\dfrac{1}{x}$

B 혼자 일을 완성하는 데 걸리는 시간은 $\dfrac{1}{y}$

이므로 조건 (가), (나)로부터

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+16=\dfrac{1}{x}\\ \dfrac{1}{x+y}+9=\dfrac{1}{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16x(x+y)=y & \cdots\cdots ㉠\\ 9y(x+y)=x & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠ + ㉡으로부터

$(16x+9y)(x+y)=x+y$

$(x+y)(16x+9y-1)=0$

$16x+9y-1=0\ (\because\ x+y\neq 0)$

$\therefore\ y=\dfrac{1-16x}{9}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$16x\left(x+\dfrac{1-16x}{9}\right)=\dfrac{1-16x}{9}$

$112x^2-32x+1=0,\ (28x-1)(4x-1)=0$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{28}$ 또는 $x=\dfrac{1}{4}$

(ⅰ) $x=\dfrac{1}{28}$일 때, ㉢에서 $y=\dfrac{1}{21}$

(ⅱ) $x=\dfrac{1}{4}$일 때, ㉢에서 $y=-\dfrac{1}{3}$ (이것은 $y>0$에 모순)

$\therefore\ x=\dfrac{1}{28},\ y=\dfrac{1}{21}$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{21}}=\dfrac{7}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}}=12$

[다른 풀이]

전체 일의 양을 W라 하고, A와 B가 함께 완성하는데 걸리는 시간을 k라 하면 A가 혼자 완성하는 데 걸리는 기간과 B가 혼자 완성하는 데 걸리는 시간을 각각 $k+16$, $k+9$ 시간이 걸린다.

따라서, A, B가 한 시간 동안 할 수 있는 일의 양은 각각 $\dfrac{W}{k+16}$, $\dfrac{W}{k+9}$이고 두 사람이 한 시간 동안 할 수 있는 일의 양은 $\dfrac{W}{k}$이다.

$\dfrac{W}{k+16}+\dfrac{W}{k+9}=\dfrac{W}{k}$

$k(k+9)+k(k+16)=(k+9)(k+16)$

$k^2=144\quad \therefore\ k=12$

29. 정답 6

전체 작업의 양을 1이라 하고, A컴퓨터 1대와 B컴퓨터 1대를 동시에 이용하여 작업하는 데 걸리는 시간을 x(시간)라 하자. 이때, A컴퓨터 1대로 작업하는 데 걸리는 시간은 $x+4$(시간)이고, B컴퓨터 1대로 작업하는 데 걸리는 시간은 $x+16$(시간)이다. 이때, 두 컴퓨터 A, B를 각각 1대씩 이용하여 1시간 동안 작업할 수 있는 양은 각각 $\dfrac{1}{x+4}$, $\dfrac{1}{x+16}$이고, A컴퓨터 1대와 B컴퓨터 1대를 동시에 이용하여 1시간 동안 작업할 수 있는 양은 $\dfrac{1}{x}$이므로

$\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+16}=\dfrac{1}{x}$

양변에 $x(x+4)(x+16)$을 곱하면

$x(x+16)+x(x+4)=(x+4)(x+16)$

$x^2=64$

$\therefore x=8\ (\because\ x>0)$

따라서 A컴퓨터 1대와 B컴퓨터 2대를 동시에 이용하여 1시간 동안 작업할 수 있는 양은

$\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{2}{x+16}=\dfrac{1}{8+4}+\dfrac{2}{8+16}=\dfrac{1}{6}$

이므로 A컴퓨터 1대와 B컴퓨터 2대를 동시에 이용하여 작업하면 6시간이 걸린다.

$\therefore\ a=6$

30. 정답 : ⑤

물탱크의 용량을 L이라 하자. A수도꼭지로 이 물탱크에 물을 가득 채우는데 걸리는 시간을 x라 하면 B, C수도꼭지를 각각 2개, 3개 사용하여 물탱크에 물을 가득 채우는데 걸리는 시간은 각각 $x-1$(시간), $x-2$(시간)이므로 수도꼭지 A, B, C를 각각 1개씩 사용하여 1시간 동안 물탱크에 채울 수 있는 물의 양은

각각

$\frac{L}{x}$, $\frac{L}{2(x-1)}$, $\frac{L}{3(x-2)}$이다. 따라서 주어진 조건에서

$\frac{L}{x}+\frac{2L}{2(x-1)}=\frac{L}{2(x-1)}+\frac{3L}{3(x-2)}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}=\frac{1}{x-2}$, $x^2-6x+4=0$

$\therefore\ x=3+\sqrt{5}=5.24$(시간) ($\because\ x>2$)

31. 정답 ③

$\sqrt{x+4}+2=x$

$\sqrt{x+4}=x-2$

$x+4=x^2-4x+4$

$x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$

$\therefore\ x=5(\because\ x\geqq 2)$

$\therefore\ \alpha\in\{x|3<x<6\}$

32. 정답 3

$\sqrt{10-3x}=x-2$의 양변을 제곱하면

$10-3x=x^2-4x+4,\ x^2-x-6=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=-2$

$x=-2$는 무연근이므로 구하는 값은 3이다.

33. 정답 ④

$f(x)=\log_3\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$에서

$f^{-1}(1)=a$로 놓으면 $f(a)=1$

$a+\sqrt{a^2+1}=3$

$a^2+1=(3-a)^2$ $\qquad\therefore\ a=\frac{4}{3}$

$\therefore\ f^{-1}(1)=\frac{4}{3}$

34. 답 ③

[해설] 무리방정식

방정식 $\sqrt{4-2a(2+x)}=x$의 양변을 제곱하면

$4-2a(2+x)=x^2$

$x^2+2ax+4(a-1)=0$

$(x+2)\{x+2(a-1)\}=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-2(a-1)$

그런데 $x=-2$는 무연근이므로 $x=-2(a-1)$이 주어진 방정식의 근이 되어야 한다.

즉, $-2(a-1)\geq 0$이어야 하므로 $a\leq 1$이다.

따라서 실수 a의 최댓값은 1이다.

35. ①

$\sqrt{(x+2)(x-3)}=t$로 놓으면 $x^2-x=t^2+6$ 이므로

이것을 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$t^2-t-2=0$, $(t+1)(t-2)=0$ $t\geq 0$ 이므로

$t=\sqrt{x^2-x-6}=2$ 양변을 제곱하여 정리하면

따라서, 구하는 모든 x의 값들의 곱은 -10이다.

36. 답 ③

[해설]주어진 식의 양변을 제곱하면

$4x^3-4x+1=x+7$, $4x^2-5x-6=0$

$(x-2)(4x+3)=0$, $\quad\therefore\ x=2$ 또는 $x=-\frac{3}{4}$

그런데 주어진 식에서 $2x-1\geq 0$, $x+7\geq 0$이므로

$x\geq\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\alpha=2$

따라서 $\frac{3}{2}<\alpha<\frac{5}{2}$이다.

37. 답 ⑤ 이해력–방정식과 부등식

$\sqrt{x^2-x}=-2x^2+2x+1$에서 $\sqrt{x^2-x}=t$ $(t\geq 0)$라 하면

$t=-2t^2+1$, $\quad 2t^2+t-1=0$, $\quad (2t-1)(t+1)=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$ ($\because\ t\geq 0$)

$\sqrt{x^2-x}=\frac{1}{2}$, $\quad x^2-x-\frac{1}{4}=0$

근과 계수의 관계에 의하여 주어진 무리방정식의 모든 실근의 합은 1이다.

38. 정답 ③

이해력 – 방정식과 부등식

$x^2-4x=t$로 놓으면 $t+\sqrt{2t}=4$

$\therefore\sqrt{2t}=4-t$ $\qquad$ ………… ㉠

위 등식의 양변을 제곱하면

$2t=t^2-8t+16$

$t^2-10t+16=(t-2)(t-8)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=8$

$t=8$을 ㉠에 대입하면 등식이 성립하지 않는다.

$t=2$를 ㉠에 대입하면 등식이 성립하므로 $t=2$이다.

따라서, $x^2-4x=2$, 즉 $x^2-4x-2=0$이므로 근과 계수의 관계에 의해 구하는 모든 실근의 합은 4이다.

39. ①

$\sqrt{4x^2-5x+7}-4x^2+5x=1$에서

$4x^2-5x+7=X$로 놓으면

$\sqrt{X}=X-6$ $\qquad$ ……… ㉠

양변을 제곱하면

$X=X^2-12X+36$, $X^2-13X+36=0$

$(X-4)(X-9)=0$

$X=4$ 또는 $X=9$

$X=4$이면 ㉠에서 $2=-2$가 되어 모순 $X=9$

$4x^2-5x+7=9$에서

$4x^2-5x-2=0$ ……… ㉡

따라서 주어진 무리방정식은 근은 이차방정식 ㉡의 근과 같으므로 구하는 모든 실근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

40. 답 ④

주어진 방정식의 양변을 제곱하면

$36x^2-12x+1=5-12x$ $\therefore x^2=\frac{1}{9}$

$\therefore \alpha=\frac{1}{3}$ $\left(\because x=-\frac{1}{3}\text{은 무연근}\right)$

$\therefore \frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$

41. 정답 11

$\sqrt{x-1}=t$로 치환하면 $t\ge 0$이다.

무리방정식은 $t^3-6t=t^2$

정리하면 $t^3-t^2-6t=0$

인수분해를 하면 $t(t-3)(t+2)=0$

$t\ge 0$이므로 $t=0$ 또는 $t=3$

$\therefore$ $\sqrt{x-1}=0$ 또는 $\sqrt{x-1}=3$

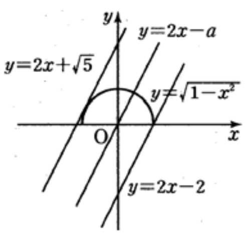
양변 제곱하여 x를 구하면

$x=1$ 또는 $x=10$

실근의 합 $=1+10=11$

42. 정답 9

무리방정식 $\sqrt{1-x^2}=2x+a$의 실근이 존재하려면 두 그래프 $y=\sqrt{1-x^2}$과 $y=2x+a$의 교점이 존재해야 한다.



$y=2x+a$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때 $a=-2$이고, $y=2x+a$가 $y=\sqrt{1-x^2}$와 접할 때, $a=\sqrt{5}$ 이므로

$-2\le a\le \sqrt{5}$

$\therefore$ $m^2+M^2=(-2)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=9$

43. 답 ②

[해설] 함수 $f(x)$의 그래프가 $(1,4)$에서 꺾이고 점 $(5,0)$을 지나므로 $f(x)=-|x-1|+4$이다.

$f(x)=t$라 두면 주어진 방정식은 $2t+1=\sqrt{13-4t}$

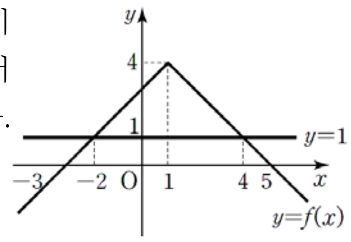
$(2t+1)^2=13-4t$, $4t^2+8t-12=0$

$(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$-\frac{1}{2}\le t\le \frac{13}{4}$이므로 $t=1$이다.

방정식 $f(x)=1$의 근은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표이므로 $x=-2$ 또는 $x=4$이다. 따라서 구하는 모든 실근의 곱은 -8이다.



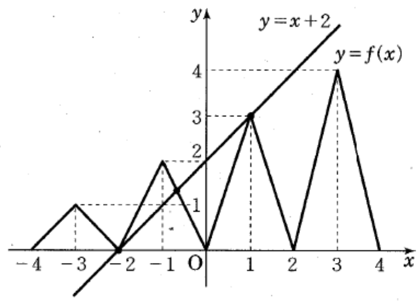
44. 정답 ③

$\sqrt{f(x)-x-1}=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^t+3t-4=0$, $(t-1)(t+4)=0$

$\therefore\ t=1$ $(\because\ t>0)$

$\sqrt{f(x)-x-1}=1$에서 $f(x)=x+2$



따라서 위의 그림에서 구하는 실근의 개수는 3이다.

45. ② 이해능력–방정식과 부등식

$f(x)-3=\sqrt{f(x)-1}$

$\{f(x)\}^2-6f(x)+9=f(x)-1$

$\{f(x)\}^2-7f(x)+10=0$

$\{f(x)-2\}\{f(x)-5\}=0$

$\therefore$ $f(x)=5$ $(\because\ f(x)\ge 3)$

따라서 구하는 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

46. 정답 ③

$f(x)+3=\sqrt{f(x)+5}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$\{f(x)\}^2+5f(x)+4=0$

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=-4$

$f(x)=-4$는 주어진 식을 만족하지 않으므로 $f(x)=-1$

따라서 주어진 그래프에서 $f(x)=-1$을 만족하는 실근 x의 개수는 3이다.

47. [출제의도]무리방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{x^2-5x+3}=X$로 놓으면

$X^2+X-6=0$, $(X-2)(X+3)=0$, $\therefore X=2,-3$

그런데 $X\ge 0$이므로 $X=\sqrt{x^2-5x+3}=2$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-5x-1=0$

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=-1$이므로 $\alpha^2+\beta^2=27$

48. 답 5

주어진 무리방정식의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-(2a-11)x-(2a-10)=0$

$(x+1)(x-2a+10)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2a-10$

$x=-1$이 무연근 ($\because x \ge 0$)이므로 $x=2a-10$이 근이어야 한다.

$2a-10 \ge 0$ $\qquad\qquad \therefore a \ge 5$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 5이다.

49. 정답 20

[출제의도] 무리방정식 이해하기

$\sqrt{x^2-1}=x-\dfrac{1}{2}$, $x^2-1=x^2-x+\dfrac{1}{4}$

$x=\dfrac{5}{4}$는 무연근이 아니므로 $\alpha=\dfrac{5}{4}$

$\therefore\ 16\alpha=20$

50. 정답 40

$x+y=a,\ xy=b$라 하면

연립방정식은 $\begin{cases} a-\sqrt{a^2-2b}=-2 \\ a+2b=-3 \end{cases}$ 이다.

$2b=-a-3$이므로 $a-\sqrt{a^2+a+3}=-2$

$a+2=\sqrt{a^2+a+3}$

양변을 제곱하면 $a^2+4a+4=a^2+a+3$

$a=-\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{4}{3}$

이차방정식 $t^2+\dfrac{1}{3}t-\dfrac{4}{3}=0$은 두 실근이 존재하고

이 두 실근은 $\alpha,\ \beta$ 이다.

$\therefore\ -30\alpha\beta=-30\left(-\dfrac{4}{3}\right)=40$

51. 정답 60

무리방정식

$\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2$의 양변을 제곱하면

$x+y-2\sqrt{(x+y)(x-y)}+x-y=4$

이때, $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=64$이므로

$2x-2\cdot 8=4 \qquad \therefore x=10$

$y^2=x^2-64=100-64=36$

$\therefore y=\pm 6$

그런데 $x=10,\ y=-6$이면 $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2$를 만족하지 않으므로 $x=10,\ y=6$이다.

$\therefore \alpha=10,\ \beta=6$

$\therefore \alpha\beta=60$

[다른 풀이]

$\sqrt{x+y}=s,\ \sqrt{x-y}=t$로 놓으면

$\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2$에서

$s-t=2$ $\qquad\qquad$ ……㉠

$x^2-y^2=64$에서 $\sqrt{x^2-y^2}=8$

$\sqrt{x+y}\,\sqrt{x-y}=8$

$\therefore st=8$ $\qquad\qquad$ ……㉡

㉠에서 $s=t+2$를 ㉡에 대입하면

$(t+2)t=8,\ t^2+2t-8=0$

$(t+4)(t-2)=0 \quad \therefore t=2(\because t>0)$

㉠에서 $s=4$

$\sqrt{x+y}=s=4$에서 $x+y=16$ $\qquad\qquad$ ……㉢

$\sqrt{x-y}=t=2$에서 $x-y=4$ $\qquad\qquad$ ……㉣

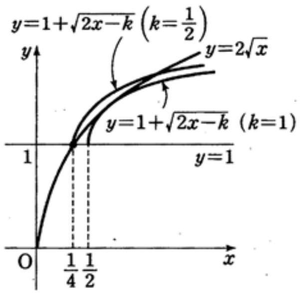
㉢, ㉣을 연립하면 $x=10,\ y=6$

$\therefore \alpha=10,\ \beta=6$

$\therefore \alpha\beta=60$

52. 답 18

그림에서 k의 값의 범위를 구해보면



$y=1+\sqrt{2x-k}$가 점 $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$을 지날 때

$k=\dfrac{1}{2}$

$y=1+\sqrt{2x-k}$가 $y=2\sqrt{x}$와 접할 때

$\sqrt{2x-k}=2\sqrt{x}-1$에서

$2x-k=4x+1-4\sqrt{x}$

이항하여 정리하면 $2x+1+k=4\sqrt{x}$

제곱하여 정리하면 $4x^2+4(k+1)x+(k+1)^2=16x$

$4x^2+4(k-3)x+(k+1)^2=0$

$\dfrac{D}{4}=4(k-3)^2-4(k+1)^2=4(-8k+8)=0$

따라서, $k=1$일 때 점$(1,2)$에서 접한다.

따라서, 두 점에서 만나기 위한 조건은 $\dfrac{1}{2}\le k<1$이고,

$12(a+b)=18$

53. 정답 2 $\qquad$ **이해 능력 – 방정식과 부등식**

$f(x)=t$라 두면 $2t+1=\sqrt{13-4t}$

$(2t+1)^2=13-4t$

$4t^2+8t-12=0$

$t=-3$ 또는 $t=1$

$-|x-1|+4=1$에서 $|x-1|=3$

$\therefore\ \ x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 실근의 합은 2이다.

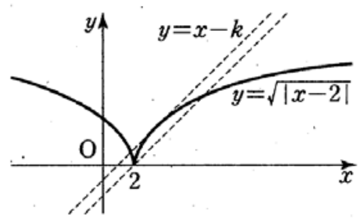
54. [출제의도] 무리방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{f(2x)-x}=A$라 하면 $A^2-2=A,\ A=2(\because A \geqq 0)$

$\therefore f(2x)-x=4,\ f(t)=\dfrac{1}{2}t+4$이므로 $t=-2,\ 8$

따라서 $x=-1,\ 4$이므로 모든 실근의 합은 3이다.

55. 정답 9



그림에서 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 직선 $y=x-k$가 $(2,0)$을 지나는 경우와 $y=\sqrt{x-2}$ 의 그래프에 접하는 경우의 두 가지가 있다.

(i) 직선 $y=x-k$가 $(2,0)$을 지나는 경우 $k=2$

(ii) $y=\sqrt{x-2}$ 의 그래프와 직선 $y=x-k$가 접하는 경우

$x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$에서

$D=(2k+1)^2-4(k^2+2)=4k-7=0$이므로 $k=\dfrac{7}{4}$

$\therefore\ 4a+b=7+2=9$

56. 정답 ③

(i) $f(x)\geqq 0$일 때, 주어진 방정식은

$f(x)-2=\sqrt{4-f(x)}\ \cdots$ ㉠

양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2-4f(x)+4=4-f(x)$

$\{f(x)\}^2-3f(x)=0$

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=3$

$f(x)=0$이면 ㉠에서

$-2=2$가 되어 모순

$\therefore\ f(x)=3$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$은 서로 다른 두 점에서 만나고 교점의 x좌표를 $\alpha.\beta$라 하면 방정식 $f(x)=3$의 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.

(ii) $f(x)<0$일 때, 주어진 방정식은

$-f(x)-2=\sqrt{4-f(x)}\ \cdots$ ㉠

양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2+4f(x)+4=4-f(x)$

$\{f(x)\}^2+5f(x)=0$

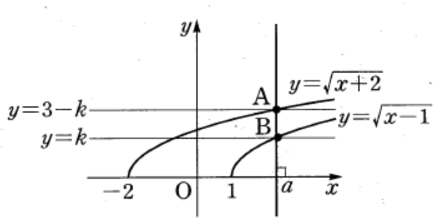
$f(x)<0$이므로 $f(x)=-5$이고, 이는 방정식 ㉠을 만족한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-5$는 점 $(0,-5)$에서 접하므로 방정식 $f(x)=-5$의 실근은 $x=0$이다.

(i)(ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $x=\alpha,\beta,0$의 3개이다.

57. 답 ③

[해설] 무리방정식의 활용



위의 그림과 같이 직선 AB가 x축과 만나는 점의 x좌표를 a라 하면

$\sqrt{a+2}=3-k,\ \sqrt{a-1}=k$

$\therefore \sqrt{a+2}+\sqrt{a-1}=3$

$\sqrt{a+2}=3-\sqrt{a-1}$ 의 양변을 제곱하면

$a+2=9-6\sqrt{a-1}+(a-1)$

정리하면 $\sqrt{a-1}=1$

$\therefore a=2$

$\sqrt{a+2}=3-k$에 $a=2$를 대입하면

$2=3-k\quad \therefore k=1$

58. ①

A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

α 는 방정식 $\sqrt{6-x}=\sqrt{x+1}+1$의 해이고,

β 는 방정식 $\sqrt{6-x}=\sqrt{x+1}-1$의 해이다.

$\sqrt{6-x}=\sqrt{x+1}+1 \iff \sqrt{6-x}-\sqrt{x+1}=1$

$\sqrt{6-x}=\sqrt{x+1}-1 \iff \sqrt{6-x}-\sqrt{x+1}=-1$

이므로 α, β는 모두 방정식 $(\sqrt{6-x}-\sqrt{x+1})^2=1$의 해이다.

$(\sqrt{6-x}-\sqrt{x+1})^2=1$을 정리하면

$6-x+x+1-2\sqrt{(6-x)(x+1)}=1$

$\sqrt{(6-x)(x+1)}=3$

양변을 제곱하면 $-x^2+5x+6=9,\ \ x^2-5x+3=0$

두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에서

$\therefore \alpha+\beta=5$

59. 정답 ⑤ 수학 내적 문제 해결 능력 - 방정식과 부등식

$\overline{CD}=x$로 놓으면 $\overline{AD}=x+1$, $\overline{BD}=x+3$이고

$\angle ADC=\theta$라 할 때, $\angle ADB=\pi-\theta$이므로 두 삼각형 ADC와 ADB에 각각 코사인법칙을 적용하면

$$\cos\theta=\frac{x^2+(x+1)^2-13}{2x(x+1)}\quad\cdots\cdots\cdots ㉠$$

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{(x+1)^2+(x+3)^2-76}{2(x+1)(x+3)}\quad\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로

$$\frac{(x+1)^2+(x+3)^2-76}{2(x+1)(x+3)}=\frac{-x^2-(x+1)^2+13}{2x(x+1)}$$

$$\frac{2x^2+8x-66}{2(x+1)(x+3)}=\frac{-2x^2-2x+12}{2x(x+1)}$$

$x(2x^2+8x-66)=(x+3)(-2x^2-2x+12)$

$x^3+4x^2-18x-9=0$

$(x-3)(x^2+7x+3)=0$

$\therefore\ \ x=3\ \ (\because\ \ x>0)$

$\therefore\ \ \overline{BC}=2x+3=9$

60. 정답 ④

$x^2+1=2\sqrt{x^2+1-a}$ 에서

$x^2+1=t\ \cdots\cdots$ ㉠

라 하면

$t=2\sqrt{t-a}\ \cdots\cdots$ ㉡

주어진 방정식이 서로 다른 4개의 실근을 가지려면 ㉠에 의해

$t>1$에

서 ㉡의 방정식의 t가 1보다 큰 서로 다른 2개의 실근을 가져야 한다.

㉡의 양변을 제곱하면

$t^2=4(t-a)$

$f(t)=t^2-4t+4a$라 하면 방정식 $f(t)=0$이 1보다 큰 서로 다른 두

실근을 가져야 한다. 대칭축이 $t=2$이고, 판별식을 D라하면

$\frac{D}{4}=4-4a>0 \quad \therefore a<1$ …… ㉢

$f(1)=1-4+4a>0$, $4a>3$

$\therefore a>\frac{3}{4}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $\frac{3}{4}<a<1$

61. 답 ①

주어진 방정식에서 $x^2+5x=t$로 놓으면

$\sqrt{f(t)+4}=t-1$

위 식의 양변을 제곱하면

$f(t)+4=t^2-2t+1$

$\therefore f(t)=t^2-2t-3$

이 때, 주어진 그림에서 $t=-1$또는 $t=4$인데 $t=-1$은 무연근이므로 $t=4$이다.

따라서 $x^2+5x=4$에서 $x^2+5x-4=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 근의 합은 -5이다.

62. 정답 ③

$f(x)=\sqrt{f(x)}+2$에서 $f(x)\ge 2$ …… ㉠

한편, $\{f(x)-2\}^2=f(x)\Leftrightarrow\{f(x)-1\}\{f(x)-4\}=0$

$\therefore f(x)=1$ 또는 $f(x)=4$

㉠으로부터 $f(x)=4$ …… ㉡

㉡과 문제의 그래프로부터

$a>4$일 때 : 3개의 실근

$a=4$일 때 : 2개의 서로 다른 실근

$0<a<4$일 때 : 1개의 실근을 갖는다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

63. 답 ④

[해설] 방정식 $x+\sqrt{x+2}=a$의 한 근이 2이므로 대입하면

$2+\sqrt{2+2}=a \quad \therefore a=4$

이 값을 방정식 $a+\sqrt{x+2}=x$에 대입하면

$\sqrt{x+2}=x-4$

위 식의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2-8x+16$

$x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=7$

따라서 $x=2$는 무연근이므로 근은 7이다.

이때, 근이 $x=7$인 분수방정식은

$\frac{(x+2)(x-7)}{x+2}=0$이므로 $b=-2$, $c=7$ ($\because b<c$)

$\therefore a+b+c=4+(-2)+7=9$

정답 및 풀이

1. 정답 ④

$f(x)=x^3+ax+b<0$의 해가 $x<-1$이면

$f(-1)=0$이므로

$-1-a+b=0$

$\therefore\ b=a+1$

$f(x)=x^3+ax+a+1=(x+1)(x^2-x+1+a)<0$

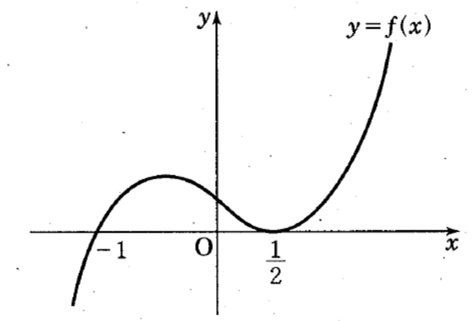
$g(x)=x^2-x+1+a$로 놓으면

ⅰ) $g(x)>0$이면 주어진 부등식의 해는 $x<-1$

$D<0$에서 $1-4(1+a)<0,\ a>-\dfrac{3}{4}$

ⅱ) $g(x)=0$이 중근을 가질 때,

즉 $g(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$이면 주어진 부등식의 해는 $x<-1$



$g(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}+a$

$\dfrac{3}{4}+a=0 \qquad \therefore\ a=-\dfrac{3}{4}$

ⅰ),ⅱ)에서 $a\geqq-\dfrac{3}{4}$이므로 a의 최솟값은 $-\dfrac{3}{4}$이다.

2. 정답 ④

ⅰ) $a<0$일 때,

$x(x-a)(x-1)^2<0$의 해는

$a<x<0$

따라서, 자연수가 존재하지 않는다.

ⅱ) $0\le a<1$일 때,

$x(x-a)(x-1)^2<0$의 해는

$0<x<a$

따라서, 자연수가 존재하지 않는다.

ⅲ) $a\ge 1$일 때,

$x(x-a)(x-1)^2<0$의 해는

$0<x<1,\ 1<x<a$

따라서, 해집합 안에 자연수가 4개 존재하려면 그 자연수는 2, 3, 4, 5이어야 한다.

따라서, $5<a\le 6$

최댓값은 6이다.

3. 정답 ③

$x^3-2x^2-5x+6>0$

$\Leftrightarrow(x+2)(x-1)(x-3)>0$

$\Leftrightarrow-2<x<1,\ x>3$ ······ ㉠

$(x-a)(x-a-2)\le 0$

$\Leftrightarrow a\le x\le a+2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수 해가 1개뿐이기 위한 a의 값의 범위는 $-1\le a+2<0,\ -1<a\le 0,\ 4\le a+2<5$에서

$-3\le a<-2,\ -1<a\le 0,\ 2\le a<3$이므로

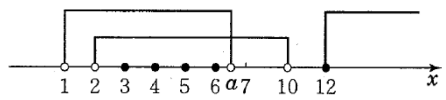
정수 a는 $-3,\ 0,\ 2$로 모두 3개다.

4. 정답 13

부등식 $(x-2)(x-10)<0$의 해는 $2<x<10$이고 주어진연립부등식

의 정수해가 4개 뿐이려면 다음 그림에서 $6<a\leqq 7$이므로 $p+q=13$

이다.



5. 정답 13

$(x+1)^2(x-2)(x-7)\le 0$

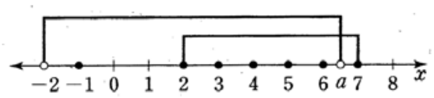
$\Leftrightarrow x=-1,\ 2\le x\le 7$ ······ ㉠

$(x+2)(x-a)<0\Leftrightarrow-2<x<a$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수의 개수가 6개일 때, 이들의 정수는

$-1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$의 6개일 때이다.

$\therefore\ 6<a\le 7$



$\therefore\ \alpha+\beta=6+7=13$

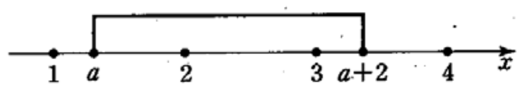
6. 정답 ①

$A=\{x\mid(x+1)(x-a)(x-a-2)\le 0,\ 1<a<3,\ x$는 정수$\}$

$B=\{x\mid b\le x\le 2b\le 0,\ b>0,\ x$는 정수$\}$

(ⅰ) $1<a<2$일 때, $A\cap B$의 원소는 2, 3이어야 하므로

$b\le 2,\ 2b\ge 3$을 만족해야 한다. $\therefore\ \dfrac{3}{2}\le b\le 2$

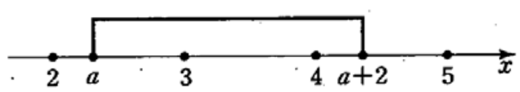


(ⅱ) $a=2$일 때 $A\cap B$의 원소는 2, 3 또는 3, 4이어야 하므로 $b\le 2,\ 3\le 2b<4$ 또는 $2<b\le 3,\ 2b\ge 4$를 만족해야 한다.

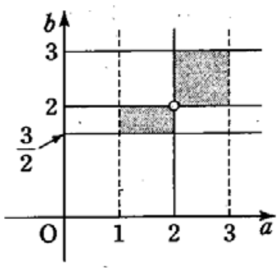
$\therefore\ \dfrac{3}{2}\le b<2$ 또는 $2<b\le 3$

(ⅲ) $2<a<3$일 때, $A\cap B$의 원소는 3, 4이어야 하므로

$b\le 3,\ 2b\ge 4$를 만족해야 한다. $\therefore\ 2\le b\le 3$



따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $(a,\ b)$의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같고 구하는 넓이 S는 $S=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$



7. 36 계산능력 - 방정식과 부등식

$\frac{4x}{x-1} \leq 3$ 의 양변에 $(x-1)^2$을 곱하면

$4x(x-1) \leq 3(x-1)^2,\ x \neq 1$

$(x+3)(x-1) \leq 0$, $x \neq 1$ $\quad \therefore -3 \leq x < 1$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수는 $-3, -2, -1, 0$이므로 $k=-6$ 이다.

$\therefore k^2 = 36$

8. 정답 5

$x-4 \leqq \frac{20}{x-3}$

$\Leftrightarrow x-4-\frac{20}{x-3} \leqq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-3)-20}{x-3} \leqq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-7x-8}{x-3} \leqq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-8)}{x-3} \leqq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x-8) \leqq 0,\ x \neq 3$

따라서, 주어진 부등식의 해는

$x \leqq -1$ 또는 $3 < x \leqq 8$ 이므로

자연수 x 는 $4, 5, 6, 7, 8$ 의 5개다.

9. 정답 ①

[출제의도] 분수부등식 이해하기

주어진 식의 양변에 $(x-1)^2(x-2)^2$ 을 곱하면

$(x-1)(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leqq 0$

$-\sqrt{2} \leqq x < 1$ 또는 $\sqrt{2} \leqq x < 2$

이를 만족하는 정수 x 는 $-1, 0$ 이다.

$\therefore$ 2 개

10. 정답 11

$\frac{x-6}{x-5} < \frac{x-7}{x-6}$ 에서

$1-\frac{1}{x-5} < 1-\frac{1}{x-6}$

$\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-5} < 0$

$\frac{1}{(x-5)(x-6)} < 0$

$(x-5)(x-6) < 0$

$5 < x < 6$

$\therefore a+b = 5+6 = 11$

11. 답 ③

(i) 진수 조건에서 $\frac{x(x-5)}{(x-3)^2} > 0$이므로

$x(x-5) > 0$이고 $x \neq 3$

$\therefore x < 0$ 또는 $x > 5$

(ii) $\log \frac{x(x-5)}{(x-3)^2} \leq 0$에서 $\frac{x(x-5)}{(x-3)^2} \leq 1$이므로

$\frac{x(x-5)}{(x-3)^2} - 1 = \frac{x^2-5x-x^2+6x-9}{(x-3)^2}$

$= \frac{x-9}{(x-3)^2} \leq 0$

$\therefore x-9 \leq 0$이고 $x \neq 3$

$\therefore x < 3$ 또는 $3 < x \leq 9$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는 $x < 0$ 또는 $3 < x \leq 9$

따라서, 구하는 모든 자연수 x의 값들의 합은

$6+7+8+9 = 30$

12. 답 18

[해설] $\frac{(x-20)(x-10)}{x-12} \leq 0$이므로

$(x-20)(x-10)(x-12) \leq 0$, $x \neq 12$

$\therefore x \leq 10$ 또는 $12 < x \leq 20$

따라서 주어진 분수부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수는 18 (개)이다.

13. 답 ③

[해설] $\frac{2}{x+1} + x \geq 2$에서

$\frac{2}{x+1} + x - 2 \geq 0,\ \frac{2+(x-2)(x+1)}{x+1} \geq 0$

$\frac{x^2-x}{x+1} \geq 0$

$x(x-1)(x+1) \geq 0,\ x \neq -1$

$\therefore -1 < x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$

따라서, 정수 x의 최솟값은 0이다.

14. 정답 31

$\frac{(x-1)(x-a)}{(x-5)} \leqq 0$에서

$(x-1)(x-a)(x-5) \leqq 0,\ x \neq 5$

집합 A의 원소의 개수가 5이기 위해서는 $a > 5$이어야 한다. 집합 A는

$A = \{x \mid x \leqq 1$ 또는 $5 < x \leqq a$, x는 자연수 $\}$

이므로 5개의 원소는 1, 6, 7, 8, 9이다.

따라서 구하는 합은

$1+6+7+8+9 = 31$

15. [출제의도] 분수부등식과 고차부등식의 연립부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3} \geq 0$에서 좌변을 통분하여 정리하면

$(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0,\ x \neq 1,\ x \neq 3$

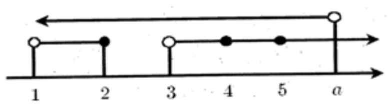
$\therefore 1 < x < 2$ 또는 $x > 3 \cdots$ ㉠

$(x-a)(x^2-x+1) < 0$에서

항상 $x^2-x+1>0$이므로

$(x-a)(x^2-x+1) < 0 \Leftrightarrow (x-a) < 0 \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡의 공통범위에서 조건을 만족하는 a의 범위를 구하면 $5 < a \leq 6$이므로 최댓값은 6이다.



16. 답 23

모든 실수 x에 대하여 $(x-10)^2 \geq 0$

$(x-a)^2 \geq 0$이므로 $\frac{(x-10)^2(x-a)^3}{x-1} < 0$에서

$\frac{x-a}{x-1} < 0$(단, $x \neq 10$)

$\therefore\ (x-1)(x-a) < 0$ (단, $x \neq 10$)

이 때, 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x가 20개이려면 $a > 1$이어야 하고, 부등식의 해는 $1 < x < a$ (단, $x \neq 10$)

즉, 20개의 자연수는 2, 3, 4, $\cdots$, 9, 11, 12, $\cdots$ 22이므로 $a = 23$

17. 정답 10

이해력 – 방정식과 부등식 [3점]

$\frac{(x^3+1)(x^2-1)}{(x^3-1)(x+2)} > 0$

$\frac{(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x+2)} > 0$

이고 모든 실수 x에 대하여

$x^2-x+1>0,\ x^2+x+1>0$

이므로

$(x+1)^2(x+2) > 0$ (단, $x \neq 1$)

$\therefore\ x > -2$ (단, $x \neq -1,\ x \neq 1$)

따라서 구하는 원소는 $0, 2, 3, 4, \cdots, 9, 10$으로 10개이다.

18. 정답 ①

$A = \{x \mid x^3-7x-6>0\}$

$= \{x \mid (x+1)(x+2)(x-3)>0\}$

$= \{x \mid -2 < x < -1$ 또는 $x > 3\}$

$B = \left\{x \,\middle|\, \frac{x+2}{x-5} \leq 0\right\}$

$= \{x \mid (x+2)(x-5) \leq 0,\ x \neq 5\}$

$= \{x \mid -2 \leq x < 5\}$

$\therefore\ A \cap B = \{x \mid -2 < x < -1$ 또는 $3 < x < 5\}$

따라서 정수 x는 4이므로 구하는 개수는 1이다.

19. 답 48

$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+4} > 0$에서

$\frac{(x+4)+2(x+1)}{(x+1)(x+4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{3(x+2)}{(x+1)(x+4)} > 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x+4) > 0,$

$x \neq -4,\ x \neq -1$

$\therefore A = \{x \mid -4 < x < -2$ 또는 $x > -1\}$

한편,

$A \cup B = \{x \mid x > -4\},\ A \cap B = \{x \mid -1 < x \leq 6\}$이 되려면

$B = \{x \mid -2 \leq x \leq 6\}$이어야 하므로

$x^2+px+q \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 6$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-6) \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2-4x-12 \leq 0$

$\therefore p=-4,\ q=-12 \qquad \therefore\ pq = 48$

20. 14

진수 조건과 밑 조건에 의해 $x > 0,\ x \neq 1$이고, 밑변환 공식에 의해

주어진 부등식은

$\log_2 x - \frac{4}{\log_2 x} < 3$

$\log_2 x = X\ (\neq 0)$로 치환하면 $X - \frac{4}{X} < 3$

양변에 X^2을 곱해서 정리하면

$X(X+1)(X-4) < 0$

$\therefore X < -1$또는 $0 < X < 4$

$\log_2 x < -1$ 또는 $0 < \log_2 x < 4$

$\therefore 0 < x < \frac{1}{2}$ 또는 $1 < x < 16$

따라서 구하는 자연수 x의 개수는 14이다.

21. 16

$\frac{(x^2-4x+3)(x^2-x+2)}{|x-1|(x^2-11x+28)} \leqq 0$

양변에 $|x-1|(x-4)^2(x-7)^2$ 을 곱하면

$(x-1)(x-3)(x-4)(x-7) \leq 0$

$x \neq 1,\ x \neq 4,\ x \neq 7$

$\therefore 1 < x \leqq 3$ 또는 $4 < x < 7$

$\therefore\ x = 2, 3, 5, 6$

따라서 구하는 합은 $2+3+5+6 = 16$ 이다.

22. 정답 20

[출제의도] 연립부등식의 정수해 구하기

부등식 $x^4-50x^2+49 \leq 0$을 풀면,

$(x+7)(x+1)(x-1)(x-7) \leq 0$이므로

$-7 \leq x \leq -1$ 또는 $1 \leq x \leq 7$이다.

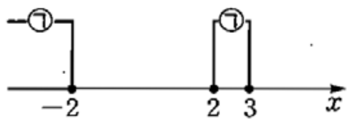
부등식 $\frac{(x-5)(x+1)}{x-3} \geq 0$을 풀면,

$-1 \leq x < 3$ 또는 $x \geq 5$이다.

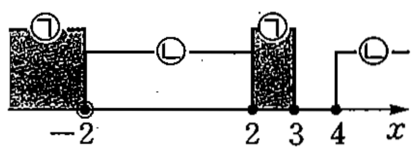
그러므로 두 부등식을 모두 만족하는 범위는
$x=-1$ 또는 $1 \le x < 3$ 또는 $5 \le x \le 7$이므로
정수 $x=-1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 7$이다.
따라서, 모든 정수 x의 합은 20이다.

23. ③
$x^3-2x^2-5x+6 \ge 0$ 에서 $(x-1)(x^2-x-6) \ge 0$
$(x-1)(x+2)(x-3) \ge 0$
$\therefore\ -2 \le x \le 1,\ x \ge 3$ $\cdots$ ㉠
$\dfrac{x-2}{|x+1|} \le \dfrac{1}{2}$에서 $2x-4 \le |x+1|$ (단, $x \ne -1$)
(ⅰ) $x>-1$일 때 $2x-4 \le x+1,\ x \le 5$ $\quad\therefore\ -1<x \le 5$
(ⅱ) $x<-1$일 때 $2x-4 \le -x-1,\ x \le 1$ $\quad\therefore\ x<-1$
$\therefore\ x<-1,\quad -1<x \le 5$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $M=5,\quad m=-2$
$\therefore\ M+m=3$

24. 답 2
$x^3-3x^2-4x+12 \le 0$에서
$(x-2)(x+2)(x-3) \le 0$이므로
$A=\{x\,|\,x \le -2 \text{ 또는 } 2 \le x \le 3\}$ $\cdots\cdots$ ㉠



한편, $x-6 \ge \dfrac{kx-4k-12}{x+2}$를 이항하여 정리하면
$\dfrac{x^2-4x-kx+4k}{x+2} \ge 0$에서 $\dfrac{(x-4)(x-k)}{x+2} \ge 0$
$\therefore (x+2)(x-4)(x-k) \ge 0,\ x \ne -2$ $\cdots\cdots$ ㉡
(ⅰ) $k<-2$이면 $A \cap B$의 원소의 개수는 무수히 많다.
(ⅱ) $-2 \le k < 2$이면 $A \cap B=\phi$이 된다.
(ⅲ) $k=2$이면 $A \cap B=\{2\}$가 되어 조건을 만족한다.



(ⅳ) $k>2$이면 $A \cap B$의 원소의 개수는 무수히 많다.
이상에서 구하는 k의 값은 2이다.

25. 정답 ⑤
$\dfrac{x-1}{x^2-2x+2} \ge 0$에서 $\dfrac{x-1}{(x-1)^2+1} \ge 0$ $\quad\therefore\ x \ge 1$ $\cdots$ ㉠
$\dfrac{x^2-4}{|x|-5} \le 0$에서
(i) $x \ge 0$일 때 $\dfrac{x^2-4}{x-5} \le 0$
$(x^2-4)(x-5) \le 0,\ x \ne 5$ $\quad\therefore\ 2 \le x < 5$
(ii) $x<0$일 때, $\dfrac{x^2-4}{-x-5} \le 0$
$(x^2-4)(x+5) \ge 0,\ x \ne -5$ $\quad\therefore\ -5<x \le -2$
$\therefore\ -5<x \le -2$ 또는 $2 \le x < 5$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 연립부등식의 해는 $2 \le x < 5$
따라서, 정수 x의 값의 합은 $2+3+4=9$이다.

26. 정답 ④
$\dfrac{x-6}{(x-1)(x-4)} \ge 0$에서
$(x-1)(x-4)(x-6) \ge 0,\ x \ne 1,\ x \ne 4$
$\therefore\ 1<x<4$ 또는 $x \ge 6$ $\cdots$㉠
$x=\sqrt{a(3x-2a)}$ 에서
$x^2-3ax+2a^2=0,\ (x-a)(x-2a)=0$
$\therefore\ x=a$ 또는 $x=2a$
(ⅰ) $x=a$만 ㉠을 만족할 때,
$4 \le 2a < 6 \Leftrightarrow 2 \le a < 3$이면 조건을 만족한다.
(ⅱ) $x=2a$만 ㉠을 만족할 때
$\dfrac{1}{2}<a \le 1 \Leftrightarrow 1<2a \le 2,$
$4 \le a < 6 \Leftrightarrow 8 \le 2a < 12$
이면 조건을 만족한다.
따라서 주어진 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 집합 S는
$S=\left\{a\ \middle|\ \dfrac{1}{2}<a \le 1,\ 2 \le a < 3,\ 4 \le a < 6\right\}$
이고, 구하는 자연수 a의 값의 합은 $1+2+4+5=12$

27. 답 ②
[해설] 분수부등식
ㄱ. $\dfrac{x-1}{x(x-2)^2} \le 0$에서 $x(x-1) \le 0,\ x \ne 0,\ x \ne 2$
$\therefore 0<x \le 1$ $\quad\therefore N(2,\ 1)=1$ (참)
ㄴ. $\dfrac{x-a}{x(x-a)^2} \le 0$에서 $x(x-a) \le 0,\ x \ne 0,\ x \ne a$
$\therefore 0<x<a$ $\quad\therefore N(a,\ a)=a-1$(참)
ㄷ. [반례] $\dfrac{x-4}{x(x-2)^2} \le 0$의 해는 $0<x<2$ 또는 $2<x \le 4$이므로 $N(2,\ 4)=3$이지만
$\dfrac{x-2}{x(x-4)^2} \le 0$의 해는 $0<x \le 2$이므로 $N(4,2)=2$이다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

28. 정답 ④
$[x]([x]-2)([x]+1)=0$에서
$[x]=0$ 또는 $[x]=-1$ 또는 $[x]=2$이다.
$\therefore\ -1 \le x < 1$ 또는 $2 \le x < 3$
같은 해를 갖는 부등식은 $\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} \le 0$
따라서 $\alpha+\beta=4,\ \gamma+\delta=1$이므로
$\alpha+\beta-\gamma-\delta=3$이다.

29. 정답 ③

그래프에서 $f(x)=a(x-2)(x+2)$라고 할 수 있으므로

$\frac{f(x+1)}{f(x-1)}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+1)}\le 1$라고 할 수 있다.

부등식 $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+1)}\le 1$을 풀면

$\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+1)}-1\le 0$

$\frac{x^2+2x-3-(x^2-2x-3)}{(x-3)(x+1)}\le 0$

$\frac{4x}{(x-3)(x+1)}\le 0$

$4x(x-3)(x+1)\le 0$

$A=\{x\mid x<-1, 0\le x<3\}$ 이다.

집합 $B=\{x\mid -5<x<5\}$ 이므로 교집합에 속하는 정수의 개수는 $-4, -3, -2, 0, 1, 2$ 로 6개다.

30. 정답 ④

$\frac{1}{f(x)+2}-\frac{1}{f(x)-2}\geqq 0$에서

$\frac{-4}{\{f(x)+2\}\{f(x)-2\}}\geqq 0$

$\{f(x)+2\}\{f(x)-2\}\leqq 0,\ f(x)\ne 2,\ f(x)\ne -2$

$\therefore -2<f(x)<2$

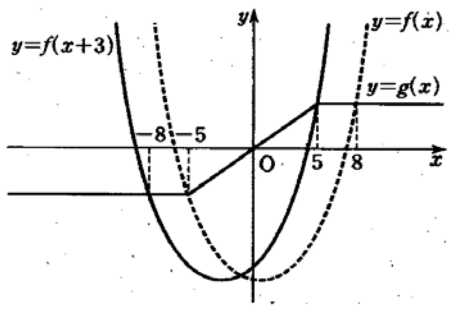
함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $-1<x<5,\ x\ne 2$

따라서 구하는 합은 $0+1+3+4=8$이다.

31. 정답 18

$A=\{x\mid -20\le x\le 20,\ x$는 정수$\}$

$y=f(x+3)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.



(ⅰ) $g(x)>0$일 때, $f(x+3)\le g(x)$이므로 $0<x\le 5$

(ⅱ) $g(x)>0$일 때, $f(x+3)\ge g(x)$이므로 $x\le -8$

$\therefore\ B=\{x\mid x\le -8$ 또는 $0<x\le 5\}$

따라서

$A\cap B=\{x\mid -20\le x\le -8$ 또는 $0<x\le 5,\ x$는 정수$\}$

이므로 원소의 개수는 18이다.

32. 답 ③

[해설] $A=\left\{x\mid \left|\frac{x-a}{x}\right|>2\right\}$ 에서

ⅰ) $\frac{x-a}{x}>2$ 일 때,

$\frac{x-a-2x}{x}>0$, $\frac{-x-a}{x}>0$

$x(x+a)<0$

$\therefore\ -a<x<0$

ⅱ) $\frac{x-a}{x}<-2$ 일 때,

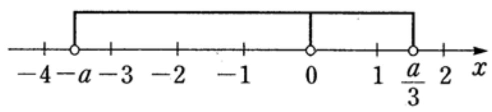
$\frac{x-a+2x}{x}<0$, $\frac{3x-a}{x}<0$

$x(3x-a)<0$

$\therefore 0<x<\frac{a}{3}$

위의 경우에서

$A=\left\{x\mid -a<x<0\ \text{또는}\ 0<x<\frac{a}{3}\right\}$



집합 A의 원소 중 정수가 4개가 되려면 위의 그림과 같아야 하므로

$-4\le -a<-3$

$\therefore\ 3<a\le 4$

33. 정답 20

$\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-3}<0$

$(x-3)(x-6)<0$

$\therefore 3<x<6$

따라서, 부등식을 만족시키는 자연수 x는 4, 5이므로 그 곱은 20이다.

34. 정답 12 **수학내적 문제해결능력–방정식과 부등식**

$\frac{15}{x-4}+2x>-5$에서

$\frac{15}{x-4}+2x+5>0$

$\frac{2x^2-3x-5}{x-4}>0$

$\frac{(2x-5)(x+1)}{x-4}>0$

$(x+1)(2x-5)(x-4)>0$

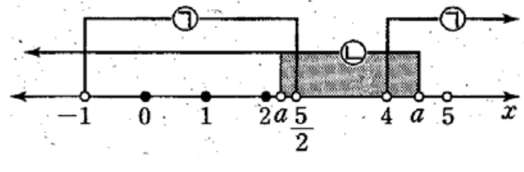
$\therefore\ -1<x<\frac{5}{2}$ 또는 $x>4$ …… ㉠

$x^3-ax^2+2x-2a<0$에서

$x^2(x-a)+2(x-a)<0$

$(x^2+2)(x-a)<0$

$\therefore\ x<a$ …… ㉡



㉠, ㉡을 만족하는 정수가 3개일 때,

$a>2$이고 $a\le 5$

$\therefore\ 2<a\le 5$

$\therefore\ a=3,\ 4,\ 5$

따라서, 구하는 합은 12이다.

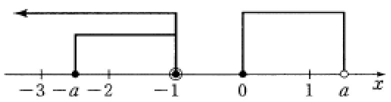
35. ①

부등식 $\dfrac{x}{(x+1)(x-a)} \le 0$ 에서

$x(x+1)(x-a) \le 0,\ x \ne -1,\ x \ne a$

부등식 $x^2+(a+1)x+a \le 0$에서 $(x+1)(x+a) \le 0$

$a>1$의 범위에서 단 한 개의 정수는 $x=-2$이므로



$-3 < a \le -2 \qquad \therefore 2 \le a < 3$

36. 5

$1+\dfrac{k}{x-k}-\dfrac{1}{x-1} \le 0$

$\dfrac{(x-k)(x-1)+k(x-1)-(x-k)}{(x-k)(x-1)} \le 0$

$\dfrac{x^2-2x+k}{(x-k)(x-1)} \le 0$

$\dfrac{(x-1)^2+k-1}{(x-k)(x-1)} \le 0$

$k-1 \ge 0 \qquad \therefore 1<x<k$

$\therefore k=5$

37. ①

$\dfrac{(x-20)(x-10)}{x-k} \le 0$에서

$(x-20)(x-10)(x-k) \le 0,\ x \ne k$

(i) $k=1,\ 2,\ \cdots 9$일 때

$x<k$ 또는 $10 \le x \le 20$이므로

$f(k)=k-1+11=k+10=15 \qquad \therefore k=5$

(ii) $k=10$일 때

$x \le 20,\ x \ne 10$이므로 $f(10)=19$

(iii) $k=11,\ 12,\ \cdots 19$일 때

$x \le 10$ 또는 $k<x \le 20$이므로

$f(k)=k-1+11=k+10=15 \qquad \therefore k=15$

(iv) $k=20$일 때

$x \le 10$이므로 $f(20)=10$

(v) $k=21,\ 22,\ \cdots$일 때

$x \le 10$ 또는 $20 \le x < k$이므로

$f(k)=10+k-20=k-0=15 \qquad \therefore k=25$

따라서 $f(k)=15$를 만족시키는 모든 k의 값의 합은

$5+15+25=45$

38. ⑤ 연역적 추론 능력(증명) – 방정식과 부등식

ㄱ. (참) $k=1$일 때 $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} \le 0$에서 $x-2 \le 0,\ x \ne 1$

$\therefore A_1=\{2\}$

$k=2$ 일 때 $\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-2)^2} \le 0$ 에서

$(x-1)(x-4) \le 0,\ x \ne 2$

$\therefore A_2=\{1,\ 3,\ 4\}$

$\therefore A_1 \cup A_2=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$\therefore n(A_1 \cup A_2)=4$

ㄴ.(참) k가 짝수일 때 $\dfrac{(x-1)(x-2k)}{(x-k)^k} \le 0$에서

$(x-1)(x-2k) \le 0,\ x \ne k$이므로

$A_k=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1,\ k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 2k\}$

$A_{k+1}=\{1,\ k+2,\ k+3,\ \cdots,\ 2(k+1)\}$

$A_k \cup A_{k+1}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1,\ k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 2(k+1)\}$

$\therefore n(A_k \cup A_{k+1})=2k+1$

ㄷ.(참) k가 1보다 큰 홀수일 때 $\dfrac{(x-1)(x-2k)}{(x-k)^k} \le 0$에서

$(x-1)(x-k)(x-2k) \le 0,\ x \ne k$이므로

$A_k=\{1,\ k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 2k\}$

$A_{k+1}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k,\ k+2,\ \cdots,\ 2(k+1)\}$

$A_k \cup A_{k+1}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2(k+1)\}$

$\therefore n(A_k \cup A_{k+1})=2k+1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

39. 정답 420

[출제의도] 분수부등식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

A 구간의 평균 속력을 $x\ (x>20)$ 라 하자.

전체 구간에서의 평균 속력이 100 이상이므로 전체 구간을 주행하는데 걸리는 시간은 $\dfrac{6}{100}$시간 이하여야 한다. 따라서

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{100}+\dfrac{3}{x-20} \le \dfrac{6}{100}$

$x>20$ 이므로 $x^2-120x+800 \ge 0$

$\therefore\ x \ge 60+20\sqrt{7}$

A 구간의 평균 속력의 최솟값은 $60+20\sqrt{7}$

$\therefore\ ab=420$

정답 및 풀이

1. 정답 ④

계산 능력 - 삼각함수

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이면 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$이므로

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

2. 정답 ③

$b=\sin 65^\circ=\sin(20^\circ+45^\circ)$

$=\sin 20^\circ\cos 45^\circ+\cos 20^\circ\sin 45^\circ$

$=a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos 20^\circ\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

즉, $\sqrt{2}\,b=a+\cos 20^\circ$ 이므로

$\cos 20^\circ=\sqrt{2}\,b-a$

[다른 풀이]

$\sin 20^\circ+\cos 20^\circ=\sqrt{2}\sin(20^\circ+45^\circ)=\sqrt{2}\sin 65^\circ$ 이므로

$a+\cos 20^\circ=\sqrt{2}\,b$

$\therefore \cos 20^\circ=\sqrt{2}\,b-a$

3. ⑤

$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=2$ 에서 $\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=2$

$\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=2,\ \tan\theta+1=2-2\tan\theta$

$\therefore \tan\theta=\frac{1}{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

4. ①

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{9}=3$

[다른 풀이]

$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$에서 정리하면

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\quad\therefore \sec\theta=3$$

5. 정답 ②

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 2\beta)$

$=-\frac{1}{2}(2\cos^2\alpha-2\cos^2\beta)=-\cos^2\alpha+\cos^2\beta$

$=-\left(1-\frac{1}{9}\right)+\frac{4}{9}=-\frac{4}{9}$

6. 답 ②

$\cos\theta=\frac{1}{3}$에서

$1-2\sin^2\theta=\frac{1}{3}$

$\sin^2\theta=\frac{1}{3}\qquad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 정답 ②

주어진 식$=\frac{2\sin 2\theta\cos 2\theta}{-\sin 2\theta}$

$=-2(2\cos^2\theta-1)=-2\left(\frac{2}{9}-1\right)=\frac{14}{9}$

8. [출제의도] 배각의 공식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\sin 2\theta=\frac{5}{4}\quad\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

9. 정답 ②

$\tan y=\tan\{(x+y)-x\}=\frac{\tan(x+y)-\tan x}{1+\tan(x+y)\tan x}=\frac{4-2}{1+4\cdot 2}=\frac{2}{9}$

[다른 풀이]

$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$이므로

$4=\frac{2+\tan y}{1-2\tan y},\ 4(1-2\tan y)=2+\tan y$

$9\tan y=2\quad\therefore \tan y=\frac{2}{9}$

10. 정답 ④

$f^{-1}(2)=\alpha,\ f^{-1}(3)=\beta$라 하면 $f(\alpha)=2,\ f(\beta)=3$이다.

$\therefore\ \tan\alpha=2,\ \tan\beta=3$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5}{-5}=-1$

$0\le x<\frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha,\ \beta$는 모두 예각이다.

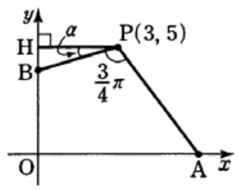
$\therefore \alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}\quad\left(\because\ 0\le\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0\le\beta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ f^{-1}(2)+f^{-1}(3)=\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$

11. 정답 13

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하고

$\angle \mathrm{BPH}=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$이므로



$a=\overline{\mathrm{OA}}$

$=3+5\tan\left(\alpha+\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=3+5\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=3+5\cdot\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=3+5\cdot\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}\right)=13$

26. 정답 ④

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{3}{4}$

$8\tan\theta=3-3\tan^2\theta$

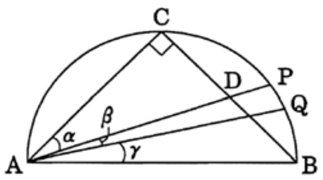
$3\tan^2\theta+8\tan\theta-3=0$

$(3\tan\theta-1)(\tan\theta+3)=0$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{1}{3}$ $(\because \tan\theta>0)$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

13. ③



$\angle\mathrm{CAP}=\alpha$, $\angle\mathrm{PAQ}=\beta$, $\angle\mathrm{QAB}=\gamma$라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ 이고 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\tan\gamma=\dfrac{1}{5}$ 이므로

$$\tan(\alpha+\gamma)=\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}}=\frac{7}{9}$$

$$\therefore\ \tan\beta=\tan\left\{\frac{\pi}{4}-(\alpha+\gamma)\right\}$$

$$=\frac{1-\tan(\alpha+\gamma)}{1+\tan(\alpha+\gamma)}=\frac{1-\dfrac{7}{9}}{1+\dfrac{7}{9}}=\frac{1}{8}$$

14. 답 ② 삼각함수의 합성

$3\sin x+4\cos x=t$로 놓으면

$t=5\sin(x+\alpha)$ (단, $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$)이므로 $-5\le t\le 5$이다.

$g(t)=t^2+2t=(t+1)^2-1$이라 하면

$t=-1$ 일 때, 최솟값은 -1 이고

$t=5$ 일 때, 최댓값은 35 이다.

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 34이다.

15. 정답 ③

$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ 로부터 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

($\because$ α는 제 1사분면의 각)

$\tan\beta=-\dfrac{1}{2}$ 로부터 $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

$\cos\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ($\because$ β는 제 2사분면의 각)

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)+\dfrac{3}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{1}{5}\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

16. 정답 ⑤

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\theta-\sin\theta)$

이제 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}$, $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ 이고

$(\cos\theta-\sin\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$ 이므로

$\cos\theta-\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

그런데, $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 일 때, $\cos\theta<0<\sin\theta$ 이므로

$\cos\theta-\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

$\therefore \cos 2\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

17. 정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 합성을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

이므로 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$ 이다.

따라서, $\theta+\dfrac{\pi}{6}=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ $\theta=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}$ 이다. 그런데, $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $n=1$이고 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$이다.

$\therefore\ 2\cos\theta\cos 2\theta=2\cos\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{4\pi}{3}=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

18. 답 ①

$f(x)=2\sin x+\cos x$

$= \sqrt{5}\sin(x+\theta)$ (단, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$)

$\theta \le x+\theta \le \pi+\theta$ 이므로 $x+\theta = \frac{\pi}{2}$ 일 때, 최댓값을 가지고,

$x+\theta = \pi+\theta$ 일 때, 최솟값을 가지므로

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\beta = \pi$ $\quad \therefore\ \alpha+\beta = \frac{3}{2}\pi - \theta$

$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\cos\theta$

$= -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

19. 답 ⑤

$x = 2\cos\theta$, $y = \sin\theta$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$로 놓으면

$x^2 + 2xy = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta$

$= 2(\cos2\theta + 1 + \sin2\theta)$

$= 2\left\{\sqrt{2}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right\}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$0 \le \theta \le 2\pi$일 때 $\frac{\pi}{4} \le 2\theta + \frac{\pi}{4} \le 4\pi + \frac{\pi}{4}$이므로

$2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$, 즉 $2\theta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{9}{4}\pi$일 때 ㉠의 값은 최대이다.

$\therefore (x+2y)^2 = (2\cos\theta + 2\sin\theta)^2$

$= 4(\cos\theta + \sin\theta)^2$

$= 4(\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta)$

$= 4(1 + \sin2\theta) = 4\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

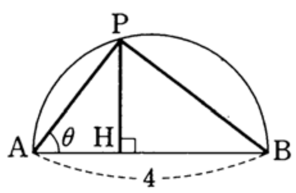
$= 4 + 2\sqrt{2}$

20. 답 ⑤

$\angle \mathrm{PAB} = \theta \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\overline{\mathrm{AP}} = 4\cos\theta$, $\overline{PH} = 4\cos\theta \cdot \sin\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{PH}}$



$= (4\cos\theta)^2 + 4\cos\theta \cdot \sin\theta$

$= 16\cos^2\theta + 2\sin2\theta$

$= 8(1 + \cos2\theta) + 2\sin2\theta$

$= 8 + 8\cos2\theta + 2\sin2\theta$

$= 8 + \sqrt{68}\sin(2\theta + \alpha)$ $(\because \tan\alpha = 4)$

$\le 8 + \sqrt{68} = 8 + 2\sqrt{17}$ $(\because \sin(2\theta+\alpha) \le 1)$

21. 정답 46

$f(x) + g(x) = 3\sin x + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$

$= 3\sin x + 2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6}\right) + 2$

$= 4\sin x + \sqrt{3}\cos x + 2$

$= \sqrt{19}\sin(x+\alpha) + 2$ $\left(\text{단, } \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\therefore\ M = 2 + \sqrt{19}$, $m = 2 - \sqrt{19}$

$\therefore\ M^2 + m^2 = (2+\sqrt{19})^2 + (2-\sqrt{19})^2$

$= 4 + 4\sqrt{19} + 19 + 4 - 4\sqrt{19} + 19 = 46$

22. 답 ① 삼각함수의 곱을 합으로 고치는 공식.

$\triangle$ABC 에서 $\angle A = 30^\circ$ 이므로 $B + C = 150^\circ$

$\therefore \cos B\sin C$

$= \frac{1}{2}\{\sin(B+C) - \sin(B-C)\}$

$= \frac{1}{2}\{\sin150^\circ - \sin(B - (150^\circ - B))\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \sin(2B - 150^\circ)\right\}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin(2B - 150^\circ)$

한편, $0^\circ < B < 150^\circ$ 에서

$-150^\circ < 2B - 150^\circ < 150^\circ$ 이므로

$-1 \le \sin(2B - 150^\circ) \le 1$

$-\frac{1}{4} \le \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin(2B - 150^\circ) \le \frac{3}{4}$

$\therefore -\frac{1}{4} \le \cos B\sin C \le \frac{3}{4}$

따라서 $\cos B\sin C$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.

23. ②

$f(x) = \frac{\cot x - \tan x + 2\sqrt{3}}{\tan x + \cot x}$의 분자, 분모에

$\sin x\cos x$를 곱하여 정리하면

$f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$

$= \cos2x + \sqrt{3}\sin2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

따라서, 함수 $f(x)$는 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 즉 $x = \frac{\pi}{6}$일 때 최댓값을 갖고,

구하는 값은 $pf(p) = \frac{\pi}{6} \cdot 2 = \frac{\pi}{3}$

24. 정답 ① 추론능력 (증명) − 삼각함수

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2}{1 - \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{2}} = \boxed{3}$$

$$\tan(\alpha_3 + \alpha_4) = \frac{\tan\alpha_3 + \tan\alpha_4}{1 - \tan\alpha_3 \cdot \tan\alpha_4} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \boxed{\frac{7}{11}}$$

$\therefore\ \tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \tan\{(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4)\}$

$= \frac{\tan\{(\alpha_1 + \alpha_2) + \tan(\alpha_3 + \alpha_4)\}}{1 - \tan\{(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \tan(\alpha_3 + \alpha_4)\}}$

$$= \frac{3+\frac{7}{11}}{1-3\cdot\frac{7}{11}} = \boxed{-4}$$

25. 정답 ③

$\angle POA=\alpha$, $\angle POB=\beta$ 라면

$\angle QOC=\pi-(\alpha+\beta)$ 이므로

$$\frac{\overline{QC}\,(\overline{OA}+\overline{OB})}{\overline{PA}+\overline{PB}}=\frac{\sin(\pi-(\alpha+\beta))(\cos\alpha+\cos\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=2(\cos\frac{\alpha+\beta}{2})^2=\cos(\alpha+\beta)+1$$

$$=-\cos(\pi-(\alpha+\beta))+1$$

$$=1-\overline{OC}=\overline{CY}$$

$$\therefore\ \frac{\overline{QC}\,(\overline{OA}+\overline{OB})}{\overline{PA}+\overline{PB}}=\boxed{\overline{CY}}$$

26. 답 ⑤

$$\triangle ABO=\triangle ACO=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot r=ar$$

$$\triangle BCO=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\sin\theta\cdot r=2ar\sin\theta$$

$$\therefore \triangle ABC=\triangle ABO+\triangle ACO+\triangle BCO$$

$$=\boxed{2ar(1+\sin\theta)}$$

한편 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=2a$, $\angle BAC=2\theta$ 이므로 삼각형 ABC 의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4a^2\sin 2\theta$ 이다.

즉, $\boxed{2ar(1+\sin\theta)}=2a^2\sin 2\theta$ 이므로

$$r=\frac{a\sin 2\theta}{1+\sin\theta}$$

$f(\theta)=\dfrac{\sin 2\theta}{1+\sin\theta}$ 라 하면

$$f'(\theta)=\frac{2\cos 2\theta(1+\sin\theta)-\sin 2\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}$$

$f'(\theta)=0$ 에서

$$2(1-2\sin^2\theta)(1+\sin\theta)-2\sin\theta(1-\sin^2\theta)$$

$$=-2(1+\sin\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta-1)=0$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 $f(\theta)$ 는 $\sin\theta=\boxed{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ 일 때 최대이므로 구하는 원의 넓이의 최댓값은

$$\pi a^2\left(\frac{\sin 2\theta}{1+\sin\theta}\right)^2=(10\sqrt{5}-22)\pi a^2$$

27. 정답 ①

원점에서 원$(x-\sqrt{2})^2+y^2=1$에 그은 접선의 식은 $y=x$이므로 $y=3x$, $y=x$가 x축의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha 3$, $\tan\beta=1$

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{3-1}{1+3\times 1}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ a+b=3$

28. 정답 ①

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

직선 l의 기울기는 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ 이고 $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 이다.

직선 m의 기울기는 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 이고

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}}=(\sqrt{5}-2)^2 \text{ 이므로}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{5}-2\ \left(\because\ \tan\frac{\theta}{2}>0\right)$$

그러므로 직선 m의 방정식은 $y=(\sqrt{5}-2)x$이다.

따라서 직선 m과 곡선 $y=\dfrac{1}{4}x^2$의 교점은

$$(\sqrt{5}-2)x=\frac{1}{4}x^2$$

$$\therefore\ x=4(\sqrt{5}-2)\ (\because\ x\neq 0)$$

29. 정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 계산하기

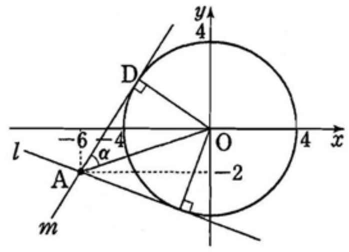
$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{\sqrt{14}}{4} \text{ 이므로}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{4-\sqrt{14}}{12}$$

30. ⑤ 이해능력 – 삼각함수

원 C는 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 4이므로 그림과 같이 점 A$(-6,-2)$에서 원에 그은 두 접선 l, m이 이루는 각을 θ라 하면



$\theta=2\angle OAD$이다.

이제 $\angle OAD=\alpha$라 하면

$\overline{AO}=2\sqrt{10}$, $\overline{AD}=\sqrt{40-16}=2\sqrt{6}$ 이므로

$$\sin\alpha=\frac{4}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore \sin\theta=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=2\times\frac{\sqrt{10}}{5}\times\frac{\sqrt{15}}{5}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

31. 정답 ④

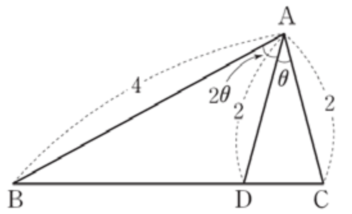
원의 반지름의 길이가 1이므로 ∠CAB $=2\theta$로 놓으면

$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$

$$\tan A=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \overline{BC}=\overline{AB}\tan A=5\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$$

32. 답 28



∠CAD $=\theta$, ∠DAB $=2\theta$로 놓으면 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이의 합과 같으므로

$\dfrac{1}{2}\times4\times2\times\sin3\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times2\times\sin2\theta+\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin\theta$

$\therefore 2\sin3\theta=2\sin2\theta+\sin\theta\cdots\cdots$ ㉠

$\sin3\theta=\sin\theta\cos2\theta+\cos\theta+\sin2\theta$

$=\sin\theta(2\cos^2\theta-1)+2\cos^2\theta\ \sin\theta$

$=\sin\theta(4\cos^2\theta-1)$

이를 ㉠에 대입하면

$2\sin\theta(4\cos^2\theta-1)=4\sin\theta\cos\theta+\sin\theta$

그런데 $\sin\theta\neq0\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로 $8\cos^2\theta-4\cos\theta-3=0$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore a=1, b=7, c=4\qquad \therefore abc=28$

33. 정답 ①

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이고 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{5}{9}}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \sin\theta\cos2\theta=\sin\theta(2\cos^2\theta-1)$

$=\dfrac{2}{3}\left(2\times\dfrac{5}{9}-1\right)=\dfrac{2}{27}$

34. 정답 ③ 계산능력 – 삼각함수

$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이므로

$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-=2\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-1=\dfrac{3}{5}$

$\therefore\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-1=-\dfrac{7}{25}$

35. 정답 ③

$$\begin{aligned}f(x)&=2\sin x-2\left(\sin x\cos\frac{4\pi}{3}+\cos x\sin\frac{4\pi}{3}\right)\\&=2\sin x-2\left(-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\\&=3\sin x+\sqrt{3}\cos x\\&=2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\cos x\right)\\&=2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

따라서, 주기는 2π이고 최댓값은 $2\sqrt{3}$이므로

$a^2+b^2=4+12=16$

36. 정답 ③ 계산능력 – 삼각함수

ㄱ. (참) $f(x)=3+4\sin x\cos x=3+2\sin2x$

따라서, 주기는 π이다.

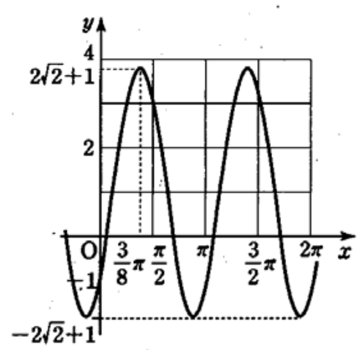
ㄴ. (거짓) $f(x)=3+2\sin2x$에서 최댓값은 $3+2=5$이다.

ㄷ. (참) $f(x)=3+2\sin2x$에서 최솟값은 $3+(-2)=1$이다.

37. 정답 ③

$$\begin{aligned}f(x)&=3\sin^2x+4\sin x\cos x-\cos^2x\\&=-2(\cos^2x-\sin^2x)+2(2\sin x\cos x)+1\\&=-2\cos2x+2\sin2x+1\\&=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1\end{aligned}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. (참)함수 $f(x)=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$이다.

ㄴ. (참)함수 $f(x)$는 $2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$일 때,

즉, $x=\dfrac{3\pi}{8}$일 때, 최댓값 $2\sqrt{2}+1$을 가진다.

ㄷ. (거짓) 함수 $f(x)=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$의 최댓값은 $2\sqrt{2}+1$

이고, 최솟값은 $2\sqrt{2}-1$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 2이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

38. 정답 ④

$P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $Q(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2})$

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{14}}{4}$

$\alpha=\frac{\pi}{6}-\beta$

$\sin2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos2\beta=2\cos^2\beta-1=\frac{3}{4}$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\frac{\pi}{6}-\beta-\beta)=\sin(\frac{\pi}{6}-2\beta)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3-\sqrt{21}}{8}$

39. 정답 ⑤

통분하여 제곱공식, 배각공식, 반각공식을 적용하면

$\frac{1}{1+\sin^2x}+\frac{1}{3+\cos^2x}=\frac{3+\cos^2x+1+\sin^2x}{3+\cos^2x+3\sin^2x+\sin^2x\cos^{2x}}$

$=\frac{5}{4+2\sin^2x+\frac{1}{4}\sin^22x}$

$=\frac{5}{4+2\times\frac{1-\cos2x}{2}+\frac{1}{4}(1-\cos^2x)}$

$=\frac{20}{-\cos^22x-4\cos2x+21}$

$-1\le\cos2x\le1$이므로

$16\le-\cos^22x-4\cos2x+21=-(\cos2x+2)^2+25\le24$

$\therefore\ \frac{20}{24}\le\frac{20}{-\cos^22x-4\cos2x+21}\le\frac{20}{16}$

따라서, 최솟값은 $\frac{5}{6}$이다.

[다른 풀이]

$\sin^2x+\cos^2x=1$에서 $p=\sin^2x\geqq0$, $1-p=\cos^2x\geqq0$

이라 하면

$\frac{1}{1+\sin^2x}+\frac{1}{3+\cos^2x}=\frac{1}{1+p}+\frac{1}{4+p}=\frac{4-p+1+p}{(1+p)(4-p)}$

$=\frac{5}{4+3p-p^2}\,(0\le p\le1)$

에서 분모가 최대일 때를 구해도 좋다.

40. 정답 25

$\cos\theta=x$, $\sin\theta=y$로 놓으면 $x^2+y^2=1$

이때 $a^2x+3y=a^2-3a-3$ 과 원이 교점을 가지면 실근이 존재한다.

원의 중심 $(0,0)$과 직선 $a^2x+3y=a^2-3a-3$과의 거리는

$\frac{|a^2-3a-3|}{\sqrt{a^4+9}}$ 이고 이것이 반지름의 길이보다 작거나 같으면 교점을 가지므로

$|a^2-3a-3|\le\sqrt{a^4+9}$

$a^4-6a^3+3a^2+18a+9\le a^4+9$

$0\le6a^3-3a^2-18a=3a(2a^2-a-6)=3a(a-2)(2a+3)$

$\therefore\ -\frac{3}{2}\le a\le0$ 또는 $2\le a$

$\therefore\ 4\alpha^2+4\beta^2+4\gamma^2=9+0+16=25$

[다른 풀이]

삼각함수의 합성을 이용한다.

$\sqrt{a^4+9}\sin(\theta+\phi)=a^2-3a-3$이 실근을 가지려면

$|a^2-3a-3|\le\sqrt{a^4+9}$

$a^4-6a^3+3a^2+18a+9\le a^4+9$

$0\le6a^3-3a^2-18a=3a(2a^2-a-6)=3a(a-2)(2a+3)$

$\therefore\ -\frac{3}{2}\le a\le0$ 또는 $2\le a$

$\therefore\ 4\alpha^2+4\beta^2+4\gamma^2=9+0+16=25$

41. 답 ③ 삼각함수의 덧셈정리

변 BC의 길이를 x, $\angle\mathrm{PBC}=\theta$로 놓으면

$\tan\theta=\frac{2-\sqrt{2}}{x}$ ········· ㉠

$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{x}$ ········· ㉡

그런데 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\theta}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

이므로 ㉠, ㉡을 대입하면

$\frac{1+\frac{2-\sqrt{2}}{x}}{1-\frac{2-\sqrt{2}}{x}}=\frac{2+\sqrt{2}}{x}$

$\frac{x+2-\sqrt{2}}{x-2+\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{x}$

$x^2+(2-\sqrt{2})x=(2+\sqrt{2})x-2$

$x^2-2\sqrt{2}x+2=0$

$(x-\sqrt{2})^2=0\quad\therefore x=\sqrt{2}$

42. 정답 ② 수학 내적 문제 해결 능력 – 삼각함수

$\angle\mathrm{ROQ}'=\theta$라 하면 $\angle\mathrm{P}'\mathrm{OP}=\theta$이고, 삼각형 ORQ'에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{OQ}'}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\pi}{3}}$

$\overline{\mathrm{OR}}=\frac{5\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}$

삼각형 ORQ'의 넓이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OR}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}'}\sin\theta$

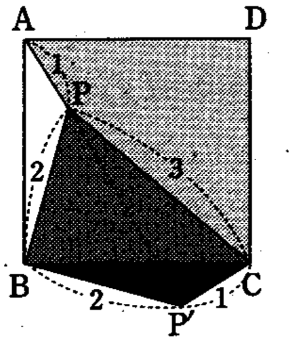
$$= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right)} \cdot \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta} \cdot \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{300 - 75\sqrt{3}}{26}$$

$\therefore\ a = 300,\ b = -75 \quad \therefore\ a + b = 225$

43. 정답 ③



오른쪽 그림에서

$\angle PBP' = \angle PBC + \angle CBP'$

$= \angle PBC + \angle ABP$

$= \frac{\pi}{2}$

$\therefore \overline{PP'} = 2\sqrt{2}$, $\angle P'PB = \frac{\pi}{4}$ 또

삼각형 PP'C 에서

$\overline{PP'}^2 + \overline{P'C}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로 $\angle PP'C = \frac{\pi}{2}$

따라서 $\angle PP'B = \alpha$, $\angle CPP' = \beta$ 라 하면

$\tan\alpha = 1$, $\tan\beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 $\angle BPC = \theta$ 라 할 때,

$$\tan\theta = \tan(\alpha+\beta) = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{4}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{18 + 8\sqrt{2}}{14}$$

$$= \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}$$

44. 정답 ③

$$f(x) = \cos^2 x + \sin x\cos x + 1 = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}$$

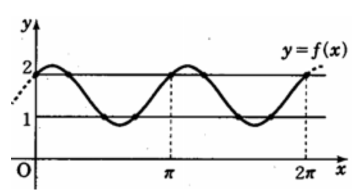
ㄱ. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$이므로

함수 $f(x)$의 주기도 π이다. (참)

ㄴ. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$일 때,

함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{3 + \sqrt{2}}{2}$이다. (거짓)

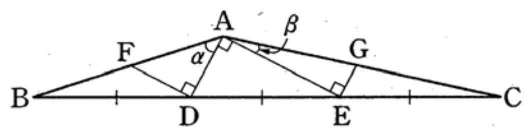
ㄷ. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} \le f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}$이므로 $[f(x)]$는 1 또는 2이다.

따라서 $f(x) = [f(x)]$인 x의 개수는 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = 1$, $y = 2$와 만나는 교점의 개수와 같으므로 9이다. (참)

45. 답 ⑤ 삼각함수의 덧셈정리.



점 D에서 $\overline{AD}$에 수직인 직선을 그어 $\overline{AB}$ 와의 교점을 F 라 하고, 점 E 에서 $\overline{AE}$에 수직인 직선을 그어 $\overline{AC}$ 와의 교점을 G라 하자.

삼각형의 중점연결정리에 의해

따$\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AE}$, $\overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{AD}$

ㄱ. $\tan\alpha = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{2\overline{AD}}$ (참)

ㄴ. $\tan\beta = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{2\overline{AE}}$ 이므로

$\tan\alpha\ \tan\beta = \frac{\overline{AE}}{2\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{AD}}{2\overline{AE}} = \frac{1}{4}$ (참)

ㄷ. $\alpha + \beta = 60^\circ$ 이므로 $\tan(\alpha+\beta) = \sqrt{3}$

$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \sqrt{3}$

ㄴ. 에서 $\tan\alpha\ \tan\beta = \frac{1}{4}$ 이므로

$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

46. 정답 125

t초 후의 P, Q의 좌표는

$P(\cos 2t,\ \sin 2t),\ Q(4 + 2\cos t,\ 2\sin t)$

$\overline{PQ}^2 = (4 + 2\cos t - \cos 2t)^2 + (2\sin t - \sin 2t)^2$

$= 16 + 4\cos^2 t + \cos^2 2t + 16\cos t - 4\cos t\cos 2t$

$\quad - 8\cos 2t + 4\sin^2 t - 4\sin t\sin 2t + \sin^2 2t$

$= 21 + 16\cos t - 8\cos 2t - 4\cos t\cos 2t - 4\sin t\sin 2t$

$= 21 + 12\cos t - 8(2\cos^2 t - 1) = -16\cos^2 t + 12\cos t + 29$

$\cos t = y\ (-1 \le y \le 1)$로 놓으면

$\overline{PQ}^2 = -16y^2 + 21y + 29 = -16\left(y - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{125}{4}$

$y = \frac{3}{8}$일 때, $\overline{PQ}$의 최댓값은 $\frac{5\sqrt{5}}{2}$이다.

$\therefore\ L = \frac{5\sqrt{5}}{2},\ 4L^2 = 125$

47. 정답 ②

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기
두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ, 점 $(6,\,2)$ 와 원점을 지나는 직선이 x축과 이루는 예각의 크기를 γ 라 하자.

$\alpha<\beta$ 일 때, $\dfrac{\theta}{2}+\alpha=\gamma$, $\dfrac{\theta}{2}+\gamma=\beta$ 이므로

$\alpha+\beta=2\gamma$ 이고 $\tan\gamma=\dfrac{1}{3}$ 이다.

$\tan(\alpha+\beta)=\tan 2\gamma=\dfrac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}=\dfrac{3}{4}$

48. 정답 17 수학 내적 문제 해결 능력 - 삼각함수
$\overline{\mathrm{AP}}=\cos\theta$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\cos 2\theta$

$\therefore 24\overline{\mathrm{AP}}-8\overline{\mathrm{AQ}}=24\cos\theta-8\cos 2\theta$

$=24\cos\theta-8(2\cos^2\theta-1)$

$=-16\cos^2\theta+24\cos\theta+8$

$=-16\left\{\cos^2\theta-\dfrac{3}{2}\cos\theta+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}+9+8$

$=-16\left(\cos\theta-\dfrac{3}{4}\right)^2+17$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ 일 때, 최댓값 17을 갖는다.

49. 답 ④
직선 $y=2x$와 $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α,β라 $\tan\alpha=2$, $\tan\beta=1$이고, 직선 $y=x$와 $y=2x$가 이루는 예각을 θ라 하면 $\theta=\alpha-\beta$이다.

$\tan\theta(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2-1}{1+2\cdot1}=\dfrac{1}{3}$

또, $\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$ 에서 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}=6\tan\dfrac{\theta}{2}$

$\tan^2\dfrac{\theta}{2}+6\tan\dfrac{\theta}{2}$

$\tan^2\dfrac{\theta}{2}+6\tan\dfrac{\theta}{2}-1=0$

$\therefore \tan\dfrac{\theta}{2}=-3+\sqrt{10}$

$$\therefore m=\tan\left(\beta+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\tan\beta+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\beta\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1+(-3+\sqrt{10})}{1-(3+\sqrt{10})}=\frac{-2+\sqrt{10}}{4-\sqrt{4}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

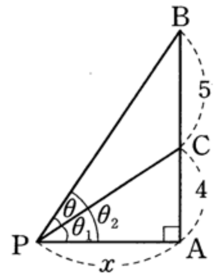
50. 정답 ③
[출제의도] 삼각함수의 배각의 공식 활용하기
호 AD 에 대한 원주각이 α 이므로 $\angle\mathrm{AOD}=2\alpha$ 이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로 $\tan 2\alpha=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=2$ 이다.

$\tan\alpha=t\,(t>0)$ 라 하면 $\tan 2\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2}=2$ 이다.

$\therefore\ t^2+t+1=0$ 에서 $\tan\alpha=t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

51. 답 15 삼각함수의 덧셈정리
$\angle\mathrm{APC}=\theta_1$, $\angle\mathrm{APB}=\theta_2$,
$\overline{\mathrm{AP}}=x$ 로 놓으면



$\tan\theta_1=\dfrac{4}{x}$, $\tan\theta_2=\dfrac{9}{x}$

$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)$

$=\dfrac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\cdot\tan\theta_1}$

$=\dfrac{\frac{9}{x}-\frac{4}{x}}{1+\frac{9}{x}\cdot\frac{4}{x}}=\dfrac{5}{x+\frac{36}{x}}$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\dfrac{36}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{36}{x}}=12$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{5}{x+\frac{36}{x}}\leq\dfrac{5}{12}$

θ 가 최대일 때 $\tan\theta$ 의 값도 최대가 되고, 등호는 $x=\dfrac{36}{x}$, 즉 $x=6$ 일 때 성립한다.

따라서 삼각형 BPC 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6=15$

52. 정답 11
[출제의도] 반각의 공식을 이용하여 계산하기

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ 이고 $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}}=\dfrac{1}{9}$ 이므로

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$ ......㉠

$\cos\beta=\dfrac{12}{13}$ 이고 $\tan^2\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\frac{1}{13}}{\frac{25}{13}}=\dfrac{1}{25}$ 이므로

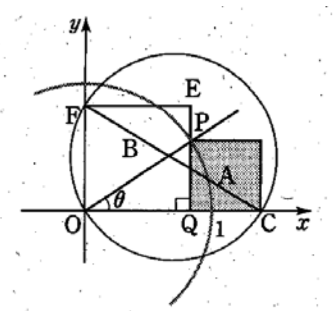
$\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{5}$ ......㉡

따라서, ㉠, ㉡에 의하여

$\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{15}}=\dfrac{8}{14}=\dfrac{4}{7}$ 이므로 $p+q=11$

53. 정답 50

정사각형 A, B가 모두 내부에 있는 원 중심에서 반지름이 가장 작은 원은 $0<\theta\le\frac{\pi}{4}$일 때, 그림과 같이 선분 CF를 지름으로 하는 원이다.



점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이므로 두 점 C와 F의 좌표는 각각$(\cos\theta+\sin\theta, 0), (0, \cos\theta)$ 이므로

$\overline{CF}=\sqrt{\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+1}$

따라서 원 $C(\theta)$의 넓이는

$$\left(\frac{1}{2}\overline{CF}\right)^2\pi=\frac{\pi}{4}(\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+1)$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\cos2\theta+\sin2\theta+\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{8}(2\sin2\theta+\cos2\theta)+\frac{3\pi}{8}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{8}\pi\sin(2\theta+\alpha)+\frac{3\pi}{8}$$
$$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

따라서 $C(\theta)$의 넓이는 $2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ 일 때 최대가 되므로

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$ 에서

$$\cos^2\theta=\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

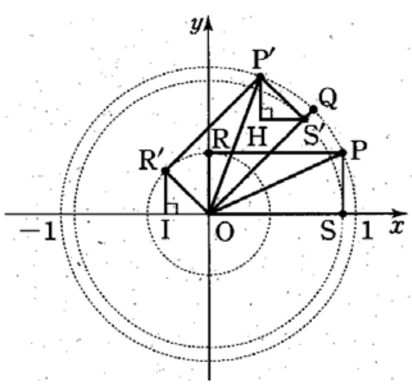
따라서 $a=5$, $b=10$ 이므로 $ab=50$ 이다.

54. 정답 ④

$\angle P'OS=\alpha+\beta$이고, $\overline{OP'}=1$이므로

$P'(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$이고 $S(\cos\alpha, 0)$이므로

$S'(\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta)$



$R(0, \sin\alpha)$, $\angle R'OS=\frac{\pi}{2}+\beta$이므로

$R'\left(\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right), \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right)$에서

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\sin\beta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\beta$

이므로 $R'(-\sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\cos\beta)$이고

$\triangle P'HS'\equiv\triangle R'IO$ (ASA합동)이므로 $\overline{HS'}=\overline{IO}$

따라서, P'의 x좌표는 S'의 x좌표에서 왼쪽으로 선분 IO의 길이만큼 이동한 것이므로

$\cos(\alpha+\beta)=e-\overline{IO}=e+g=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

55. 16

$\angle DAC=\alpha$라 하면

$\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$ 이므로 $3\theta+3\alpha=180^\circ$

$\therefore\ \alpha=60^\circ-\theta$

$\overline{BC}=x$, $\overline{AD}=y$라 하면 $\triangle ABC$와 $\triangle ADC$는 한 원에 내접하므로

사인법칙에서 $\frac{x}{\sin2\theta}=\frac{y}{\sin2\alpha}$

$x:y=5:8$에서 $\frac{y}{x}=\frac{\sin2\alpha}{\sin2\theta}=\frac{8}{5}$

$\sin2\alpha=\sin(120^\circ-2\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta$

$\therefore\ \frac{\sin2\alpha}{\sin2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cot2\theta+\frac{1}{2}=\frac{8}{5}$

$\cot2\theta=\frac{11}{5\sqrt{3}}$, $\tan2\theta=\frac{5\sqrt{3}}{11}$

$\therefore\ p+q=11+5=16$

56. ⑤ 연역적 추론 능력(증명) - 삼각함수

$\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ 라 하면

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$ 이므로

$a=2\sin A$, $b=2\sin B$, $c=2\sin C$ 이고,

$A+B+C=\pi$ 이다.

$$b\cos B+c\cos C=2\sin B\cos B+2\sin C\cos C$$
$$=\sin2B+\sin2C$$
$$=2\sin(B+C)\cos(B-C)$$

ㄱ. (거짓) $a=1$ 일 때 $\sin A=\frac{1}{2}$ 즉, $A=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$B+C=\frac{5}{6}\pi$ 이다.

$2\sin(B+C)\cos(B-C)$

$=2\sin\frac{5}{6}\pi\cos(B-C)=\cos(B-C)$ 그러므로

$B=C=\frac{5}{12}\pi$ 일 때, 최댓값을 갖는다. $\therefore\ S(1)=1$

ㄴ. (참) $a=\sqrt{2}$ 일 때 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 즉, $A=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$B+C=\frac{3}{4}\pi$ 이다.

$2\sin\frac{3}{4}\pi\cos(B-C)=\sqrt{2}\cos(B-C)$ 그러므로

$B=C=\frac{3}{8}\pi$ 일 때, 최댓값을 갖는다. $\therefore\ S(\sqrt{2})=\sqrt{2}$

ㄷ. (참) 예각삼각형 ABC 에서 a 가 정해지면

$\sin A = \frac{a}{2}$ (일정)이고, $B+C=\pi-A$ 이므로

$2\sin(B+C)\cos(B-C)$ 는 $B=C$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$S(a) = 2\sin(B+C) = 2\sin(\pi-A) = 2\sin A = a$

그러므로 $0 < a_1 < a_2 \le 2$ 이면 $S(a_1) < S(a_2)$ 이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

1. 답 ⑤

$\sin 3\theta = \cos 4\theta$에서

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) = \cos 4\theta$

$\therefore\ 4\theta = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right)$ (단, n은 정수)

(i) $4\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - 3\theta$

$7\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta = \frac{2n}{7}\pi + \frac{\pi}{14}$

(ii) $4\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 3\theta$

$\therefore\ \theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$의 범위에서 모든 해를 구하면 $\frac{\pi}{14}$, $\frac{5}{14}\pi$

$\therefore\ \frac{\pi}{14} + \frac{5}{14}\pi = \frac{3}{7}\pi$

2. 정답 ②

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x = \sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ 또는 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{2}\right)$ 또는 $\left(x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2\pi}{3}\right)$

따라서 삼각 방정식을 만족하는 모든 x 의 합은 3π 이다.

3. 정답 ⑤

주어진 방정식의 양변을 제곱하면

$1 + 8\sin x + 16\sin^2 x = 10 + 8\sin x$

$16\sin^2 x = \frac{9}{16}$

$\sin x = -\frac{3}{4}$인 x는 무연근이므로 $\sin\alpha = \frac{3}{4}$

$\therefore\ \sin\alpha\cos 2\alpha = \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) = -\frac{3}{32}$

4. 정답 ⑤

[출제의도] 삼각함수의 합성을 이용하여 삼각방정식의 해 구하기

$4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ 또는 $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ 에서

$x + \frac{\pi}{6} = \pi,\ 2\pi$ 또는 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$이므로

$x = 0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ 2\pi$ 이다.

따라서, 모든 해의 합은 $\frac{16}{3}\pi$ 이다.

5. 정답 ①

[출제의도] 삼각함수의 합 또는 차를 곱으로 변형하여 삼각방정식의 해 구하기

$2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{3}{2}x$ 이므로

$\cos\frac{3}{2}x = 0$ 또는 $\cos\frac{x}{2} = 1$ 이다.

$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{x}{2} = 0$이므로

$x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi$ 이다.

따라서 모든 해의 합은 $\frac{4}{3}\pi$ 이다.

6. 답 ⑤ 삼각방정식

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$이므로

$\sin 2x + \cos x = 0$에서 $2\sin x\cos x + \cos x = 0$

$\cos x(2\sin x + 1) = 0$

$\therefore \cos x = 0$ 또는 $\sin x = -\frac{1}{2}$ ⋯ ㉠

$\therefore x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$이므로

$\cos 2x + \sin x = 0$에서 $1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$

$\therefore \sin x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = 1$ ⋯㉡

$\therefore x = \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값은 $\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$이므로 모든 x의 값의 합은 $\frac{7}{2}\pi$이다.

7. 답 90

$\cos 2x + \sin x - 1 = 0$에서

$1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\sin x(2\sin x - 1) = 0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

(i) $\sin x=0$일 때

$x=n\pi\ (n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$

(ii) $\sin x=\dfrac{1}{2}$일 때

$x=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}\ (n=0, 1, \cdots, 9)$

$\therefore S=(1+2+\cdots+9)\pi+(1+2+\cdots+9)\pi=90\pi$

$\therefore\ \dfrac{S}{\pi}=90$

8. 정답 ⑤

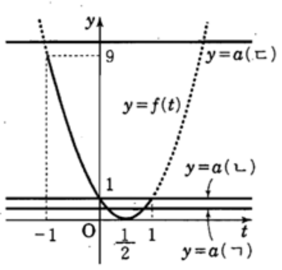
$2\cos 2x-4\cos x+3-a=0$에서

$4\cos^2 x-4\cos x+1-a=0$

$\cos x=t$라고 하면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 방정식은

$4t^2-4t+1-a=0$이다.

$f(t)=4t^2-4t+1$이라 하고, 함수 $y=f(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. $0<a<1$일 때, $0<t<1$인 t가 2개 존재하므로 x는 4개 존재한다. (참)

ㄴ. $a=1$일 때, $t=0,\ 1$이고

$\cos x=0$이면 $x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\cos x=1$이면 $x=0$

따라서 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $a>9$일 때, t의 값은 존재하지 않으므로 실근을 갖지 않는다. (참)

9. 답 ③ 삼각방정식

$\cos 2x-5\cos x+3=a(\cos x-2)$에서

$2\cos^2 x-1-5\cos x+3=a(\cos x-2)$

$2\cos^2 x-5\cos x+2=a(\cos x-2)$

$(\cos x-2)(2\cos x-1)=a(\cos x-2)$

$\therefore\ a=2\cos x-1\ (\because \cos x-2\ne 0)$

이때, $-1\le\cos x\le 1$이므로 주어진 삼각방정식의 해가 존재하려면 $-3\le a\le 1$

따라서 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$의 5개다.

10. 정답 ⑤

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 을 대입하면

$2\sin x-4\sin x(1-\sin^2 x)-(1-2\sin^2 x)+1=0$

정리하면 $\sin x(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$\sin x=0, \dfrac{1}{2}, -1$ 에서

$x=0, \pi, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}$

모든 근의 합은 $\dfrac{7\pi}{2}$

11. 정답 23

$\sin 4x-\sin 2x=2\cos\dfrac{4x+2x}{2}\ \sin\dfrac{4x-2x}{2}=2\cos 3x\sin x$

$\cos 4x+\cos 2x=2\cos\dfrac{4x+2x}{2}\ \cos\dfrac{4x-2x}{2}=2\cos 3x\cos x$

이므로 주어진 식에 대입하여 인수분해하면

$\cos 3x(\sin x-\cos x)=0$

$\Rightarrow \cos 3x=0$ 또는 $\sin x=\cos x$

주어진 범위 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le 3x\le\dfrac{3}{2}\pi$임을 고려하여

(i) $\cos 3x=0$일 때,

$3x=\dfrac{\pi}{2},\ 3x=\dfrac{3}{2}\pi\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6},\ x=\dfrac{\pi}{2}$

(ii) $\sin x=\cos x$일 때, $x=\dfrac{\pi}{4}$

따라서, 모든 해의 합은

$\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{11}{12}\pi$

$\therefore\ p+q=12+11=23$

12. 정답 77 수학 내적 문제 해결 능력 – 삼각함수

$\sin 4x\cos 3x+\cos 4x\sin 3x=\dfrac{1}{2}$에서

$\sin(4x+3x)=\dfrac{1}{2}\qquad \sin 7x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 7x=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 13)$

$x=\dfrac{n}{7}\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{42}\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 13)$

이므로

$\dfrac{\pi}{42},\ \dfrac{1}{7}\pi-\dfrac{\pi}{42},\ \dfrac{2}{7}\pi+\dfrac{\pi}{42},\ \dfrac{3}{7}\pi-\dfrac{\pi}{42},\ \cdots,\ \dfrac{13}{7}\pi-\dfrac{\pi}{42}$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{\pi}{42},\ \beta=\dfrac{13}{7}\pi-\dfrac{\pi}{42}$

$$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\dfrac{13}{7}\pi-\dfrac{\pi}{42}}{\dfrac{\pi}{42}}=77$$

13. 정답 ②

$\sin 2x-\cos 2x\le -1$

$\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le -1$

$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$0 < x \leq \pi$에서 $-\frac{\pi}{4} < 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$이므로

㉠에서

$\frac{5\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$

$\therefore\ \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi$

$\therefore\ b - a = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

정답 및 풀이

1. 정답 ②

(주어진 식)$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

2. 정답 ③

$$\lim_{x\to2}\frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(x+\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+\sqrt{2x}+2}{\sqrt{x}+2}$$
$$=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

3. 정답 ②

[출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$-x=t$ 로 치환하면

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}}=2$$

4. 답 ② 계산능력-함수의 극한과 연속성

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-5}+2}$$
$$=\frac{6}{2+2}=\frac{3}{2}$$

5. 답 ④

[해설] 함수의 극한

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to4}(x+4)(\sqrt{x}+2)=(4+4)(\sqrt{4}+2)=8\cdot4=32$$

6. [출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{(x+1)(\sqrt{2x+1}+1)}=1$$

7. 답 ③

[해설] 함수의 극한

$-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{1-2x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-1}}{1+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t}+2}=\frac{1}{2}$$

8. 정답 ①

[출제의도]함수의 극한값 구하기

$$\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)}{3(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{-1}{3(x+1)}=-\frac{1}{9}$$

9. 답 ②

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x-5}\right)=\lim_{x\to3}\left\{\frac{1}{x-3}\cdot\frac{x-3}{2(x-5)}\right\}=-\frac{1}{4}$$

10. ②

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2-x}\right)\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{-2x}{(2+x)(2-x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-2}{(2+x)(2-x)}=-\frac{1}{2}$$

11. 정답 ④

(주어진 식)$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+11)}{(x-1)(x^2+x+1)}=4$

12. ④

$f(x)=x^{10}+x^9+x^8$으로 놓으면 $f(1)=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{10}+x^9+x^8-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

따라서 $f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7$이므로 $f'(1)=27$이다.

13. 정답 ③

(주어진 식)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x+2)-(x^2-2x-2)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}=2$$

14. ③

(주어진 식)$=\lim_{x\to2}\frac{-(x^2-x-2)}{(x^2-x-2)(\sqrt{x+2}+x)}$

$=-\frac{1}{\sqrt{4}+2}=-\frac{1}{4}$

15. 정답 ④

(주어진 식) $=\lim_{x\to3}\frac{x^3-2x^2-9}{x^2-2x-3}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+x+3)}{(x-3)(x+1)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x^2+x+3}{x+1}=\frac{15}{4}$

16. 정답 ④ 이해력 - 함수의 극한과 연속성

$f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2-1=x-1$ 이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{f(\sqrt{x})}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$

17. 정답 ④

$\lim_{x\to9}\frac{f(x)}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{f(x)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim_{x\to9}\left\{\frac{f(x)}{x-9}\times(\sqrt{x}+3)\right\}=2(\sqrt{9}+3)=12$

18. 정답 ②

$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x^2+4x-1}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)(\sqrt{x^2+4x-1}+2)}{(x-1)(x+5)}$

$=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

19. ④

(주어진 식)

$=\lim_{x\to5}\frac{(25-x^2)(\sqrt{14-x}+\sqrt{4+x})}{(\sqrt{14-x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{14-x}+\sqrt{4+x})}$

$=\lim_{x\to5}\frac{(5-x)(5+x)(\sqrt{14-x}+\sqrt{4+x})}{14-x-(4+x)}$

$=\lim_{x\to5}\frac{(5-x)(5+x)(\sqrt{14-x}+\sqrt{4+x})}{2(5-x)}$

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to5}(5+x)(\sqrt{14-x}+\sqrt{4+x})$

$=\frac{1}{2}\cdot10\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})=30$

20. 정답 ①

분모→0이고 극한값이 수렴하고 있으므로

분자→0이어야 한다.

따라서 $9+3a+b=0$

$\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+a+3)(x-3)}{x-3}$ 이므로

$6+a=14$

$a=8,\ b=-33\ \therefore\ a+b=-25$

21. 정답 ⑤

$\lim_{x\to3}(x-3)=0$이고, $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{ax^2+b}=\frac{1}{6}$이므로

$\lim_{x\to3}(ax^2+b)=0$이다. 즉, $9a+b=0$이므로

$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{a(x^2-9)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{a(x+3)}=\frac{1}{6a}$이다. $a=1, b=-9$이므로

$a-b=10$이다.

22. 답 ②

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x^2+x+ax}}{x-1}=b$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다. 즉,

$\sqrt{3\cdot1^2+1}+a\cdot1=2+a=0\qquad\therefore\ a=-2$

$\therefore\ b=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x^2+x}-2x}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3x^2+x}-2x)(\sqrt{3x^2+x}+2x)}{(x-1)(\sqrt{3x^2+x}+2x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(3x^2+x)-(2x)^2}{(x-1)(\sqrt{3x^2+x}+2x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{-x^2+x}{(x-1)(\sqrt{3x^2+x}+2x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x^2+x}+2x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{-x}{\sqrt{3x^2+x}+2x}=\frac{-1}{2+2}=-\frac{1}{4}$

$\therefore\ ab=(-2)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

23. 정답 ①

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$에서

$1+a+b=0,\ a=-(1+b)$

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-(1+b)x+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-b)}{x-1}$

$=1-b$

$\therefore\ 1-b=-1\qquad b=2$

$\therefore\ a=-3$

$\therefore\ a-b=-3-2=-5$

24. 정답 ③

$\lim_{x\to2011+0}\frac{|x^2-2011^2|}{x-2011}$

$=\lim_{x\to2011+0}\frac{|x-2011||x+2011|}{x-2011}$

$=\lim_{x\to2011+0}|x+2011|=4022$

$\lim_{x\to-2011-0}\frac{|x^2-2011^2|}{x+2011}$

$$= \lim_{x \to -2011-0} \frac{|x-2011||x+2011|}{x+2011}$$

$$= \lim_{x \to -2011-0} (-|x-2011|) = -4022$$

따라서, $a=4022$, $b=-4022$ 이므로 $a+b=0$ 이다.

25. 정답 ④

$x \to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 2}(x^2-a)=0$에서 $4-a=0$ $\quad \therefore a=4$

$$\therefore b = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$$

$\therefore a+b=4+4=8$

26. 정답 4

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0}\left(2x^2+a+\frac{b}{x}\right) = -2$$

$\therefore a=-2,\ b=0$

$\therefore a^2+b^2=4$

27. 답 ②

[해설] $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-ax-b}{x^3-1}=4$에서 $x \to 1$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉, $1-a-b=0$이므로

$b=1-a$

대입하여 정리하면

$$(\text{준식}) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-a+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-a+1}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{2-a}{3} = 4$$

$\therefore a=-10,\ b=11$

$\therefore b-a=11-(-10)=21$

28. 답 ⑤

[해설] $x \to -1$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to -1}\{(ax+b)(-5x+2)\} = 7(-a+b)=0$

$\therefore a=b$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(ax+b)(-5x+2)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{a(x+1)(-5x+2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{a(-5x+2)}{x-1}$$

$$= \frac{7a}{-2} = 14$$

$\therefore a=-4,\ b=-4$

$\therefore ab=16$

29. 정답 ③

$x \to 2$일 때, (분모) $\to 0$이므로, (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\sqrt{2a+b}=3,\ 2a+b=9$

$\therefore b=-2a+9$ ……㉠

$$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{ax+9-2a-9}{(x-2)(\sqrt{ax+9-2a}+3}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{ax+9-2a}+3}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{a}{(\sqrt{ax+9-2a}+3} = \frac{a}{6} = 1$$

$\therefore a=6,\ b=-3$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a+b=6-3=3$

30. 정답 ②

$AX=-B$에서

$X=A^{-1}(-B)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

31. 정답 ②

$x \to 3$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

$\lim_{x \to 3}(x^2+ax+b) = 9+3a+b=0$

$\therefore b=-3a-9$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2+ax-3a-9}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3+a)}{x-3}$$

$$= 6+a = 4$$

$\therefore a=-2, b=-3$ $\quad \therefore ab=6$

32. 70

$\lim_{x \to b} \frac{ax-b}{x^2-b^2}=3$에서 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$ 이다.

$\therefore ab-b=0$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $a=1$

$$\lim_{x \to b} \frac{ax-b}{x^2-b^2} = \lim_{x \to b} \frac{x-b}{(x-b)(x+b)}$$

$$= \lim_{x \to b} \frac{1}{x+b} = \frac{1}{2b} = 3$$

$$\therefore b = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 60(a+b) = 60 \cdot \frac{7}{6} = 70$$

33. 답 ③

[해설] $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=2$에서 $x \to 1$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$이므로 $f(1) = 0$

$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 2$

$f(x) = x^3 + ax + b$에서 $f'(x) = 3x^2 + a$이므로

$f(1) = 0$에서 $a + b = -1$

$f'(1) = 2$에서 $3 + a = 2$

$\therefore a = -1,\ b = 0$

$\therefore ab = 0$

34. 정답 184

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - 2x^2}{x+1} = -1$이므로 상수 k에 대하여 $f(x) = 2x^2 - x + k$로 놓을 수 있다.

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2}$의 값이 존재하려면 $f(2) = 0$이어야 한다.

$f(2) = 8 - 2 + k = 0 \quad \therefore \quad k = -6$

$\therefore \quad f(x) = 2x^2 - x - 6$

$\therefore \quad f(10) = 184$

35. 답 6

$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1) f(1-x)}{x^2 - 1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x+1} \times \lim_{x \to 1} \frac{f(1-x)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{f(1-x)}{x-1}$

이때, $1 - x = t$로 놓으면 $x \to 1$일 때 $t \to 0$이므로

$\lim_{x \to 1} \frac{f(1-x)}{x-1} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{-t} = -\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 6$

36. 정답 ②

$\lim_{x \to n+0} \frac{[x]^2 + x}{[x]} = \frac{n^2 + n}{n} = n + 1 = 3$이므로 $n = 2$

37. 정답 ②

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+2)}{x} = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = -2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠으로부터 $f(2) = 8 + 4a + 2b = 0$

$\therefore \ b = -(2a+4) \quad \cdots\cdots$ ㉡

$\therefore \ \lim_{x \to 2} \frac{x^3 = ax^2 - 2(a+2)x}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)(x+a+2)}{x-2}$

$= 2(a+4) = -2$

$\therefore \ a = -5,\ b = 6$ ($\because$ ㉡)

$\therefore \ f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$

따라서, $y = f(x)$의 그래프는 ②번과 같다.

38. 정답 44

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 2x} = 2$이려면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차식이어야 한다.

$f(x) = 2x^2 + ax + b$라 하자.

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$으로 수렴하려면 $x \to 1$일 때,

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 + a + b = 0$

$b = -a - 2$

$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + ax - a - 2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x+2+a)}{x-1}$

$a = -1,\ b = -1$

따라서 $f(x) = 2x^2 - x - 1$이므로 $f(5) = 44$

39. 답 ①

분모가 0으로 수렴할 때 극한값이 존재한다면 분자도 0으로 수렴해야 한다.

$f(1) = f(2) = 0$이므로 이차함수 $f(x)$는 $f(x) = k(x-1)(x-2)$로 놓을 수 있다.

$\lim_{x \to 1} k(x-2) = -k = 2$에서 $k = -2$

$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \{-2(x-1)\} = -2$

40. 정답 ②

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$이므로

$f(x)$의 차수를 n이라 하면 $n \leq 2$이다.

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 5$이고, $x \to 0$일 때 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

따라서, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$이므로

$f(x) = ax^2 + bx$로 놓을 수 있다.

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx}{x}$

$= \lim_{x \to 0} (ax + b) = b$

이므로 $b = 5$

방정식 $ax^2 + 5x = x$의 한 근이 $x = -2$이므로

$4a - 10 = -2$에서 $4a = 8$

$\therefore \ a = 2$

따라서, $f(x) = 2x^2 + 5x$이므로

$f(1) = 7$

41. 답 28

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a\sqrt{x^2+3} - b}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{a\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - \frac{b}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = a$$

$\therefore\ a=8$ ……㉠

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a\sqrt{x^2+3}-b}{x-1}=k$에서 $x\to1$일 때

(분모) $\to0$이면 (분자) $\to0$이므로 $a\sqrt{1+3}-b=0$

$\therefore b=2a=16$ ……㉡

$\therefore\ k=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{8(\sqrt{x^2+3}-2)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{8(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\dfrac{16}{4}=4$ ……㉢

㉠, ㉠, ㉢에서 $a=8,\ b=16,\ k=4$

$\therefore a+b+k=28$

42. 답 12

[해설] 함수의 극한

$f(x)=ax(x-4)$ $(a>0)$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax(x-4)}{6x}=-2$에서 $\dfrac{-4a}{6}=-2$ $\therefore a=3$

따라서 $f(x)=3x(x-4)$이므로

$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x(x-4)}{x-4}=12$

43. 정답 36

$x-2=t$라 놓으면 $x\to2$일 때, $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{f(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{f(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{f(x-2)}\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x+4)$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{f(t)}\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x+4)$

$=3\cdot(2^2+2\cdot2+4)=36$

44. 정답 200 **이해 능력 – 함수의 극한과 연속성**

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{12x^2+6x+1}=\dfrac{1}{4}$에서 함수 $f(x)$는 다항함수 이므로

$f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x^2+x-6}=\dfrac{1}{5}$에서 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+x-6)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$

$12+2a+b=0$

$\therefore\ f(x)=3x^2+ax-(2a+12)$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(3x+a+6)}{(x-2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x+a+6}{x+3}$

$=\dfrac{a+12}{5}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore\ a=-11,\ b=10$

$\therefore\ f(10)=300-110+10=200$

45. 정답 670

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x^2)+f(x)-2010\}=0$ 이므로 $f(1)=1005$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\alpha$ 라 하면

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^2)+f(x)-2010}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^2)-f(1)+f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)+\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}\times2+\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=2\alpha+\alpha=2010$

$\therefore \alpha=670$

46. 답 13

(ⅰ) $26<x\le27$일 때, x보다 작은 자연수 중에 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23의 9개이므로 $f(x)=9$

이때, $x\le3f(x)=27$이므로

$g(x)=f(f(x))=f(9)=4$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to27-0}g(x)=4=\alpha$

(ⅱ) $27<x<28$일 때, x보다 작은 자연수 중에 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23의 9개이므로 $f(x)=9$

이때, $x>3f(x)=27$이므로 $g(x)=f(x)=9$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to27+0}g(x)=9=\beta$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha+\beta=4+9=13$이다.

47. 정답 ③

$\dfrac{t-1}{t+1}=x$라 치환하면

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t-1}{t+1}=\lim\limits_{t\to\infty}\left\{1+\dfrac{-2}{t+1}\right\}=1^{-0}$이므로

$\lim\limits_{t\to\infty}f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)=\lim\limits_{x\to1^{-0}}f(x)=2$ …㉠

$\dfrac{4t-1}{t+1}=y$라 치환하면

$\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{4t-1}{t+1}=\lim\limits_{t\to-\infty}\left\{4+\dfrac{15}{t+1}\right\}=4^{+0}$이므로

$\lim\limits_{t\to-\infty}f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)=\lim\limits_{y\to4^{+0}}f(x)=3$ …㉡

㉠, ㉡에 의하여 답은 5이다.

48. 답 ⑤ 함수의 극한

점 H의 좌표는 $(x,\ 0)$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}(\overline{OP}-\overline{OH})=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt{1+\dfrac{a}{x}}+1}=\dfrac{a}{2}$

즉, $\frac{a}{2}=5$이므로 $a=10$

49. ④

점 A 의 좌표는 A$(2,\ 2)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2-p,\ \overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{8-p^2}-p$

$\therefore \lim_{p\to 2-0}\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim_{p\to 2-0}\frac{\sqrt{8-p^2}-p}{2-p}$

$=\lim_{p\to 2-0}\frac{8-2p^2}{(2-p)(\sqrt{8-p^2}+p)}$

$=\lim_{p\to 2-0}\frac{2(2+p)}{(\sqrt{8-p^2}+p)}=\frac{2(2+2)}{\sqrt{4}+2}=2$

50. 답 ④ 함수의 극한의 활용

함수 $y=\sqrt{x^2-2x}\,(x\geq 2)$의 그래프가 x의 값이 한없이 커질 때 직선 $y=ax+b$에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x}-(ax+b)=0$이 성립한다.

따라서 $a>0$이고,

$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2-2x}-(ax+b)\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-2x)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-2x}+(ax+b)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(2+2ab)x-b^2}{\sqrt{x^2-2x}+(ax+b)}=0$

위의 등식이 성립하려면 $1-a^2=0,\ 2+2ab=0$

$\therefore a=1(\because a>0),\ b=-1$

$\therefore a+b=0$

51. ③ 이해능력 - 함수의 극한과 연속성

직선 AP의 기울기는 $\frac{t^2-1}{t-1}=t+1$이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\frac{1}{t+1}$이다.

직선 PQ의 방정식은 $y-t^2=-\frac{1}{t+1}(x-t)$이고 직선 AB의 방정식은 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1),\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이다.

따라서 직선 PQ와 직선 AB의 교점의 x좌표는

$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{t+1}(x-t)+t^2$ 에서 $x=-2t^2-4t-3$이다.

$\therefore \mathrm{Q}\left(-2t^2-4t-3,\ -\frac{1}{2}(-2t^2-4t-3)+\frac{3}{2}\right)$

또한, P $\to$ A이면 $t\to 1+0$이므로 $\lim_{t\to 1+0}(-2t^2-4t-3)=-9$,

$\lim_{t\to 1+0}\left\{-\frac{1}{2}(-2t^2-4t-3)+\frac{3}{2}\right\}=6$

$\therefore a=-9,\ b=6$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{6}{-9}=-\frac{2}{3}$

52. 정답 ①

두 점 $P,\ Q$의 좌표는 $P(\sqrt{2t},\ t),\ Q(\sqrt{2t+1},\ t)$이므로

$f(t)=\frac{1}{2}(\sqrt{2t+1}-\sqrt{2t})\cdot t$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\{f(t)\}^2}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(\sqrt{2t+1}-\sqrt{2t})^2}{4t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t(2t+1-2t)^2}{4(\sqrt{2t+2}+\sqrt{2t})^2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{4\left(\sqrt{2+\frac{1}{t}}+\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{32}$$

53. 정답 ⑤

ㄱ. (거짓) $x\to 1+0$일 때, $f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to 1+0}(f\circ f)(x)=f(2)=3$

ㄴ. (참) $x\to 0$일 때, $t=f(x)\to 2+0$이므로

$\lim_{x\to 0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to 2+0}f(t)=3$

ㄷ. (참) $x\to 1-0$일 때, $t=f(x)\to 3-0$이므로

$\lim_{x\to 1-0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to 3-0}f(t)=2$

$x\to 2+0$일 때, $t=f(x)\to 3-0$이므로

$\lim_{x\to 2-0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to 3-0}f(t)=2$

따라서 옳은 것은 ㄴ,ㄷ이다.

54. ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to +0}f(x+1)=0$ 이므로 $\lim_{x\to +0}f(x)f(x+1)=0$

$\lim_{x\to -0}f(x+1)=0$ 이므로 $\lim_{x\to -0}f(x)f(x+1)=0$

따라서, $\lim_{x\to 0}f(x)f(x+1)=0$이다. $\therefore$ 참

ㄴ. $\lim_{x\to 1-0}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 1-0}f(f(x))=f(1)=1$

$\lim_{x\to 1+0}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 1+0}f(f(x))=\lim_{x\to 1+0}f(x)=1$

$\therefore$ 참

ㄷ. $t=-2,\ 0$ 일 때, $\lim_{x\to t+0}f(x)>\lim_{x\to t-0}f(x)$ 가 성립한다.

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

55. 답 ①

[해설] ㄱ. (참)

$\lim_{x\to +0}\{f(x)g(x)\}=\lim_{x\to +0}f(x)\cdot\lim_{x\to +0}g(x)=0\times(-1)=0$

$\lim_{x\to -0}\{f(x)g(x)\}=\lim_{x\to -0}f(x)\cdot\lim_{x\to -0}g(x)=0\times 1=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\{f(x)g(x)\}=0$

ㄴ. (거짓)

$\lim_{x\to -1+0}g(f(x))=\lim_{t\to 1-0}g(t)=0$

ㄷ. (거짓)

$$\lim_{x\to1+0} f(g(x))=f(1)=1$$

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

56. 정답 ④

이해력 – 함수의 극한과 연속성

$x\to2-0$ 일 때 $f(x)=2$ 이므로

$\lim_{x\to2-0}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to2-0}(f(f(x))=f(2)=3$

$x\to2+0$ 일 때 $f(x)\to3-0$ 이므로 $f(x)=t$ 라 하면

$\lim_{x\to2+0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to3-0}f(t)=2$

$\therefore \lim_{x\to2-0}(f\circ f)(x)-\lim_{x\to2+0}(f\circ f)(x)=3-2=1$

57. 정답 ⑤

$g(t)=\begin{cases}1 & (t\le0)\\ t+1 & (t>0)\end{cases}$ 이므로 $\lim_{t\to+0}g(g(t))=\lim_{s\to1+0}g(s)=2$

58. 정답 16

$\lim_{x\to8+0}g(x)$ 이면 $x=8.1$을 생각하자

$f(8.1)=4$ 그러면 $x>2f(x)$이다.

따라서, $\alpha=4$

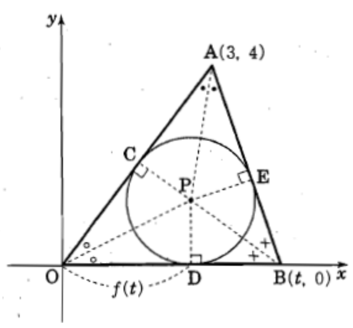
$\lim_{x\to8-0}g(x)$ 이면 $x=7.9$를 생각하자.

$f(7.9)=4$ 그러면 $x<2f(x)$이다.

따라서, $\beta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \dfrac{4}{\frac{1}{4}}=16$

59. 정답 ①



점 P는 $\triangle AOB$의 내심이므로

$\triangle POD\equiv\triangle POC$,

$\triangle PDB\equiv\triangle PEB$,

$\triangle ACP\equiv\triangle AEP$

점 P의 x좌표가 $f(t)$이므로

$\overline{OD}=\overline{OC}=f(t)$

$\overline{AC}=\overline{AE}=5-f(t)$ ($\because\overline{OA}=5$)

$\overline{BD}=\overline{BE}=t-f(t)$

$\therefore\overline{AB}=\sqrt{(3-t)^2+4^2}$

$=5-f(t)+t-f(t)$

$\therefore f(t)=\dfrac{t+5-\sqrt{t^2-6t+25}}{2}$

$=\dfrac{8t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}}$

$\therefore\lim_{t\to\infty}f(t)=4$

60. 정답 30

$mx=\sqrt{x}$ 에서 $x=0$또는 $x=\dfrac{1}{m^2}$ 이므로

$A\left(\dfrac{1}{m^2},\ \dfrac{1}{m}\right)$

점 $A\left(\dfrac{1}{m^2},\ \dfrac{1}{m}\right)$을 지나고 직선 OA에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{m}\left(x-\dfrac{1}{m^2}\right)+\dfrac{1}{m}$

$y=0$일 때, $x=1+\dfrac{1}{m^2}$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{m^4}+\frac{1}{m^2}}}{1+\frac{1}{m^2}}=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m^2+1}$$

$\therefore\ 30\lim_{m\to+0}\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=30\lim_{m\to+0}\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{m^2+1}=30$

61. 답 20

점 P의 좌표를 $(t,\ 1-t)$라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(1-t)^2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OP}}=1-\overline{\mathrm{OP}}=1-\sqrt{t^2+(1-t)^2}$

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(1-t)^2+(-1+t)^2}=\sqrt{2}(1-t)$

점 P가 점 A에 한없이 가까워지면 $t\to1-0$이므로

$$\lim_{t\to1-0}\frac{\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim_{t\to1-0}\frac{\sqrt{2}(1-t)}{1-\sqrt{t^2+(1-t)^2}}$$

$$=\lim_{t\to1-0}\frac{\sqrt{2}(1-t)\left\{1+\sqrt{t^2+(1-t)^2}\right\}}{\left\{1-\sqrt{t^2+(1-t)^2}\right\}\left\{1+\sqrt{t^2+(1-t)^2}\right\}}$$

$$=\lim_{t\to1-0}\frac{\sqrt{2}(1-t)\left\{1+\sqrt{t^2+(1-t)^2}\right\}}{2t(1-t)}$$

$$=\lim_{t\to1-0}\frac{\sqrt{2}\left\{1+\sqrt{t^2+(1-t)^2}\right\}}{2t}=\sqrt{2}$$

따라서 $\alpha=\sqrt{2}$ 이므로 $10\alpha^2=20$

62. 정답 ②

점 $P(t,t^2)(t>0)$과 $Q(0,2)$을 지나는 직선l의 기울기가

$\dfrac{t^2-2}{t-0}=\dfrac{t^2-2}{t}$ 이므로 직선 m의 방정식은

$y=-\dfrac{t}{t^2-2}x+2$이다.

위의 방정식과 $y=x^2$을 연립하여 정리하면

$x^2+\dfrac{t}{t^2-2}x-2=0$

$$x=\frac{-\frac{t}{t^2-2}+\sqrt{\left(\frac{t}{t^2-2}\right)^2+8}}{2}$$

따라서 점 R의 x좌표는 $\dfrac{-\frac{t}{t^2-2}+\sqrt{\left(\frac{t}{t^2-2}\right)^2+8}}{2}$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}S(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{-\frac{t}{t^2-2}+\sqrt{\left(\frac{t}{t^2-2}\right)^2+8}}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

63. 정답 ①

직선 OP의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x$

직선 AP의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{1-t^2}-1}{t}x+1$

두 점 Q, R의 y좌표는 각각

$\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$, $\frac{\sqrt{1-t^2}-1}{t}+1$이므로

$$\lim_{t\to 1-0}\frac{\overline{RB}}{\overline{QB}}=\lim_{t\to 1-0}\frac{\frac{\sqrt{1-t^2}-1}{t}+1}{\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 1-0}\frac{\sqrt{1-t^2}-(1-t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\lim_{t\to 1-0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

64. 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x-b^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{(x^2+ax)-(x+b^2)^2}{\sqrt{x^2+ax}+x+b^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(x^2+ax)-(x^2+2b^2x+b^4)}{\sqrt{x^2+ax}+x+b^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2b^2)x-b^4}{\sqrt{x^2+ax}+x+b^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2b^2)-\frac{b^4}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1+\frac{b^2}{x}}$$

$$=\frac{a-2b^2}{2}=0$$

$\therefore\ a=2b^2$

$\therefore\ b=\sqrt{\frac{a}{2}}$ ($\because\ a\geq 0,\ b\geq 0$)

따라서 관계를 나타내는 그래프는 ④이다.

65. 정답 131

과세 표준금액x에 대한 세금을 $f(x)$라 하면

$$f(x)=\begin{cases}0.08x & (x\leq 1200)\\ 0.17x-108 & (1200<x\leq 4600)\\ 0.26x-a & (4600<x\leq 8800)\\ 0.35x-b & (x>8800)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 연속이 되려면 $x=4600$만 원일 때와 $x=8800$만 원일 때 각각 좌극한과 우극한의 값이 같아야 하므로

$0.17\times 4600-108=0.26\times 4600-a$

$\therefore\ a=522$

$0.26\times 8800-522=0.35\times 8800-b$

$\therefore\ b=1314$

$\therefore\ \left[\frac{b}{10}\right]=131$

66. 정답 ③

ㄱ. $n=3$일 때, 직선 AP의 기울기는 $\frac{p^3-a^3}{p-a}=p^2+ap+a^2$

이고 점 T에서의 접선의 기울기는 $3t^2$이므로

$3t^2=p^2+ap+a^2$

$3(t^2-a^2)=p^2+ap-2a^2$

$3(t-a)(t+a)=(p-a)(p+2a)$

$p\to a$이면 $t\to a$이므로

$K_3=\lim_{p\to a}\frac{t-a}{p-a}=\lim_{p\to a}\frac{p+2a}{3(t+a)}=\frac{1}{2}$ ($\because\ a\neq 0$) ∴참

ㄴ. $n=2$일 때, 직선 AP의 기울기는 $\frac{p^2-a^2}{p-a}=p+a$이고 점 T에서의 접선의 기울기는 $2t$이므로

$2t=p+a$에서 $2(t-a)=p-a$

$\therefore\ K_2=\lim_{p\to a}\frac{t-a}{p-a}=\frac{1}{2}$ ∴참

ㄷ. $n=3$일 때, $a=0$이면 $3t^2=p^2$에서 $\frac{t^2}{p^2}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ K_3=\lim_{p\to 0}\frac{t-0}{p-0}=\frac{\sqrt{3}}{3}1\neq K$ (∵ㄴ에서) ∴ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

1. 답 ①

[해설] (ⅰ) $|x|>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x$

(ⅱ) $|x|<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로 $f(x)=-1$

(ⅲ) $x=1$일 때

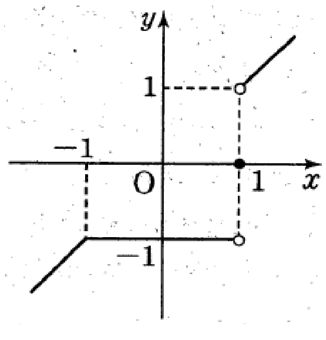
$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

$f(1)=0$

(ⅳ) $x=-1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$f(-1)=-1$



함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

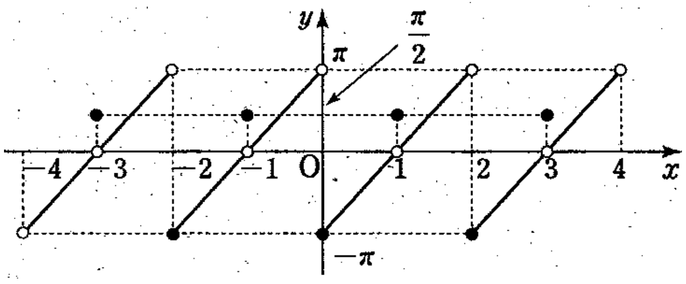
따라서, 실수 a의 개수는 1이다.

2. [출제의도] 함수의 연속성을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)$는 삼차항의 계수가 2인 삼차함수이고

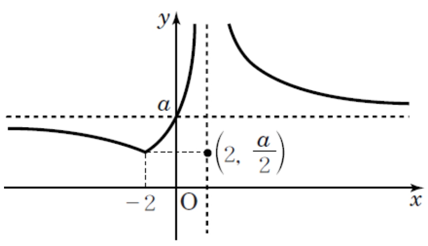
$f(-1)=f(0)=f(1)=0$이므로 $f(x)=2x(x-1)(x+1)$
$\therefore f(4)=120$

3. 정답 ② 발견적 추론 능력(추측) – 함수의 극한과 연속성
열린 구간 $(-4,\ 4)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 정수가 아닌 x의 값에서 연속이고 함수 $g(x)=\sin x$는 모든 실수에서 연속이므로 함수 $h(x)=(g\circ f)(x)$는 정수가 아닌 모든 x의 값에 대하여 연속이다.
한편, $h(-2)=\lim\limits_{x\to-2}h(x)$, $h(0)=\lim\limits_{x\to0}h(x)$, $h(2)=\lim\limits_{x\to2}h(x)$이므로 함수 $y=(g\circ f)(x)$는 $x=-2,\ 0,\ 2$에서 연속이다.
또, $h(-3)\neq\lim\limits_{x\to-3}f(x)$, $h(-1)\neq\lim\limits_{x\to-1}h(x)$, $h(1)\neq\lim\limits_{x\to1}h(x)$, $h(3)\neq\lim\limits_{x\to3}h(x)$이므로 함수 $y=(g\circ f)(x)$는 $x=-3,\ -1,\ 1,\ 3$에서 불연속이다. 따라서 열린 구간 $(-4,\ 4)$에서 함수 $y=(g\circ f)(x)$가 불연속인 x의 값의 개수는 4이다.

4. 답 ①
[해설] $a>0$이므로



ㄱ. $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=f(-2)=\dfrac{a}{2}$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이다. (참)
ㄴ. 위의 그림에서 함수 $f(x)$는 a의 값에 관계없이 $x=2$에서 불연속이다. (거짓)
ㄷ. 위의 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=a$와 오직 한 점에서 만난다.
따라서 방정식 $f(x)=a$는 한 개의 실근을 갖는다. (거짓)

5. 정답 ③
[출제의도] 함수의 연속성의 정의에 대해 알고 있는 가를 묻는 문제이다.
ㄱ. $\lim\limits_{x\to-0}[f(x)]=0$, $\lim\limits_{x\to+0}[f(x)]=0$, $[f(x)]=0$ (연속)
ㄴ. $\lim\limits_{x\to-0}[f(x)]=1$, $\lim\limits_{x\to+0}[f(x)]=0$ (불연속)
ㄷ. $\lim\limits_{x\to-0}[f(x)]=-1$, $\lim\limits_{x\to+0}[f(x)]=-1$, $[f(x)]=-1$
(연속)

6. 정답 ⑤
ㄱ. $g(x)=x-f(x)$라 하면 $g(x)$는 연속함수이다.
$g(-1)=-1-f(-1)=-1-1=-2$
$g(1)=1-f(1)=1-(-1)=2$
$\therefore\ g(-1)g(1)<0$
따라서, 방정식 $x-f(x)=0$은 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 1개의 실근을 가진다.
ㄴ. $g(x)=x^2f(x)$라 하면 $g(x)$는 연속함수이다.
$g(-1)=f(-1)=1$
$g(1)=f(1)=-1$
$\therefore\ g(-1)g(1)<0$
따라서, 방정식 $x^2f(x)=0$은 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 1개의 실근을 가진다.
ㄷ. $g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$라 하면 $g(x)$는 연속함수이다.
$g(-1)=f(f(-1))=f(1)=-1$
$g(1)=f(f(1))=f(-1)=1$
$\therefore\ g(-1)g(1)<0$
따라서, 방정식 $(f\circ f)(x)=0$은 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 1개의 실근을 가진다.

7. 답 ④
ㄱ. [반례] $f(x)=x-1$, $g(x)=x$이면 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$
이지만 $\lim\limits_{x\to1}g(x)\neq0$이다. $\therefore$ 거짓
ㄴ. $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha}\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}\times\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=0$ $\therefore$ 참
ㄷ. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 극한값이 존재하므로
$\lim\limits_{x\to\alpha}\{f(x)-f(\alpha)\}=0$이다. 따라서, $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$가 성립하므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 연속이다. $\therefore$ 참
따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

8. 정답 ③
ㄱ. $f(1)g(1)=0\cdot0=0$
$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)g(x)=1\cdot0=0$
$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)g(x)=0\cdot1=0$이므로
함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)
ㄴ. $\lim\limits_{x\to+0}f(g(x))=\lim\limits_{t\to+0}f(t)=1$
$\lim\limits_{x\to-0}f(g(x))=\lim\limits_{t\to1-0}f(t)=0$이므로
함수 $y=f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)
ㄷ. $g(f(1))=g(0)=0$
$\lim\limits_{x\to1+0}g(f(x))=\lim\limits_{t\to1+0}g(t)=0$

$\lim_{x\to 1-0} g(f(x)) = \lim_{t\to +0} g(t) = 0$ 이므로

함수 $y=g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

9. 정답 ④

ㄱ. (참) $x\to -1-0$일 때 $f(x)\to -1-0$이므로

$\lim_{x\to -1-0} g(f(x)) = \lim_{t\to -1-0} g(t) = 1$

ㄴ. (거짓) $x\to -1+0$일 때 $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to -1+0} g(f(x)) = g(-1) = 0$

$\therefore \lim_{x\to -1-0} g(f(x)) \neq \lim_{x\to -1+0} g(f(x))$ ($\because$ ㄱ)

즉, 함수 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이 아니다.

ㄷ. (참) $x\to -1-0$일 때 $g(x)\to 1-0$이므로

$\lim_{x\to -1-0} f(g(x)) = \lim_{t\to 1-0} f(t) = -1$

$x\to -1+0$일 때 $g(x)=-1+0$이므로

$\lim_{x\to -1+0} f(g(x)) = \lim_{t\to -1+0} f(t) = -1$

이때, $f(g(-1)) = f(0) = -1$이므로

$\lim_{x\to -1-0} f(g(x)) = \lim_{x\to -1+0} f(g(x)) = f(g(-1))$

따라서, 함수 $f(g(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.

10. 정답 ④

$f(x) = \begin{cases} a & (x\geq 1) \\ -a & (x<1) \end{cases}$이고 $g(f(x)) = \begin{cases} g(a) & (x\geq 1) \\ g(-a) & (x<1) \end{cases}$

$g(f(x))$가 실수 전체에서 연속이려면 $g(a)=g(-a)$가 성립하면 된다. 문제에서 임의의 실수 a에 대하여 $g(f(x))$가 실수 전체에서 연속이 되어야 하므로 함수 $g(x)$가 임의의 실수 a에 대하여 $g(a)=g(-a)$를 만족하여야 한다. 즉, 함수 $g(x)$가 우함수이어야 한다.

따라서 우함수인 것은 ㄱ,ㄷ이다.

11. 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to -1+0} g(f(x)) = \lim_{t\to -2+0} g(t) = 2$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1+0} f(x)g(x) = (-2)\cdot 0 = 0$

$\lim_{x\to 1-0} f(x)g(x) = 2\cdot 0 = 0$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)g(x) = 0$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to +0} f(g(x)) = \lim_{t\to 2-0} f(t) = 0$

$\lim_{x\to -0} f(g(x)) = \lim_{t\to -2+0} f(t) = 0$

$\therefore f(g(0)) = \lim_{x\to 0} f(g(x)) = 0$

따라서 함수 $y=f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

12. ④

ㄱ. (참) $\lim_{x\to +0} f(x)g(x) = \lim_{x\to +0} f(x) \lim_{x\to +0} g(x) = 0\times(-1) = 0$

$\lim_{x\to -0} f(x)g(x) = \lim_{x\to -0} f(x) \lim_{x\to -0} g(x) = 0\times 1 = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$

ㄴ. (거짓) $x\to +0$일 때, $g(x)=-1$이고 $x\to -0$일 때, $g(x)=1$이다.

$\lim_{x\to +0} f(g(x)) = f(-1) = 1$

$\lim_{x\to -0} f(g(x)) = f(1) = -1$

이므로 $\lim_{x\to 0} f(g(x))$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. (참) $x\to 1+0$일 때, $f(x)=0$이고

$x\to 1-0$일 때, $f(x)\to 1-0$이다.

$\lim_{x\to 1+0} g(f(x)) = g(0) = -1$

$\lim_{x\to 1-0} g(f(x)) = \lim_{t\to 1-0} g(t) = -1$

$g(f(1) = g(-1) = -1$

이므로 함수 $y=g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

13. ③

ㄱ. $\lim_{x\to -1-0} f(f(x)) = f(1) = -1$

$\lim_{x\to 1+0} f(f(x)) = f(1) = -1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to -1+0} f(f(x)) = \lim_{t\to -0} f(t) = -1$

$\lim_{x\to 1-0} f(f(x)) = \lim_{t\to +0} f(t) = 1$ (거짓)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서

$\lim_{x\to -1-0} f(f(x)) = \lim_{x\to -1+0} f(f(x)) = -1$이고

$f(f(-1)) = f(0) = -1$이므로 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

14. 정답 ④

[출제 의도] 함수의 극한과 연속성 이해하기

$g(f(x)) = \begin{cases} x+1 & (-2\leq x\leq -1) \\ 0 & (-1<x<0) \\ -1 & (x=0) \\ 0 & (0<x<1) \\ -x+1 & (1\leq x\leq 2) \end{cases}$ 이므로

ㄱ. $\lim_{x\to -1} g(f(x)) = 0$ (거짓)

ㄴ. $g(f(x)) = g(1) = -1$ 이고,

$\lim_{x\to +0} g(f(x)) = \lim_{x\to -0} g(f(x)) = 0$ 이므로

$g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다. (참)

ㄷ. 함수 $g(f(x))$는 1과 2 사이에서 연속이고 $g(f(1))=0$, $g(f(2))=-1$이므로 중간값의 정리에 의해 방정식 $g(f(x)) = -\frac{1}{2}$의 실근이 1과 2사이에 적어도 하나 존재한다. (참)

15. 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to +0} f(x)\times \lim_{x\to -0} f(x) = 0\cdot 1 = 0$

$\lim_{x\to1+0} f(x)\times \lim_{x\to1-0} f(x)=0\cdot0=1$ $\therefore$ 참

ㄴ. $\lim_{x\to1+0} f(f(x))=\lim_{t\to-0} f(t)=1$,

$f(\lim_{x\to1+0} f(x))=f(0)=0$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. $\lim_{x\to+0} f(f(x))=\lim_{t\to+0} f(t)=0$,

$\lim_{x\to-0} f(f(x))=\lim_{t\to1-0} f(t)=0$

$f(f(0))=f(0)=0$ $\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ,ㄷ 이다.

16. 답 ①

ㄱ. $\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2=c$라 하면 $c\ge0$이고

$\lim_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|=\sqrt{c}$ 이다. $\therefore$ 참

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}2 & (x\ge0)\\1 & (x<0)\end{cases}$은 $(f\circ f)(x)=2$이므로

모든 실수에서 연속이지만 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. [반례] $f(x)=2$, $g(x)=[x]$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)이면 $f(x)$, $(f\circ g)(x)$는 모든 실수에서 연속이지만 $g(x)$는 x가 정수일 때 불연속이다. $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

17. 정답 5

함수 $f(x)$가 연속이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b-2\sqrt{x^2+4x-1}}{x-1}=3$$

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b-2\sqrt{x^2+4x-1})=0$이다.

따라서 $1+a+b=0$, $b=-a-1$이다.

$$\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2+ax-(a+1)}{x-1}+\frac{\sqrt{x^2+4x-1}-2}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}+\frac{x^2+4x-5}{(x-1)\sqrt{x^2+4x-1}+2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{(x+a+1)+\frac{x+5}{\sqrt{x^2+4x-1}+2}\right\}$$

$$=a+\frac{7}{2}=3$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 20ab=20\cdot\frac{1}{4}=5$$

18. 정답 ③

(ⅰ) $0<\theta\le\frac{\pi}{4}$일 때, $\overline{\mathrm{PA}}=x\ (0<x\le1)$라 하고, $\frac{g_n(\theta)}{f(\theta)}$를 x로 나타낸 함수를 $I(x)$라 하면

$I(x)=\frac{\sqrt{(n-1)^2+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+\frac{n^2-2n}{x^2+1}}$ 이므로 θ가 증가하면 x도 증가하므로 $I(x)$가 감소한다.

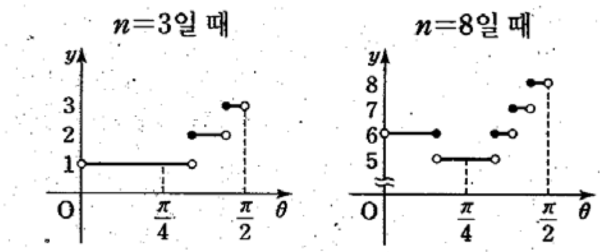
$$\therefore\ \sqrt{\frac{n^2-2n+2}{2}}\le I(x)<n-1$$

(ⅱ) $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때, θ가 증가하면 $f(\theta)$는 감소하고 $g_n(\theta)$는 증가하므로 $\frac{g_n(\theta)}{f(\theta)}$는 증가한다.

$$\therefore\ \sqrt{\frac{n^2-2n+2}{2}}<I(x)<\sqrt{n^2+1}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때, $\frac{g_n(\theta)}{f(\theta)}$는 연속함수이므로

$y=\left[\frac{g_n(\theta)}{f(\theta)}\right]$의 그래프는 다음과 같다.



따라서, 불연속점의 개수는 각각 2, 4이므로 $h(3)+h(8)=2+4=6$

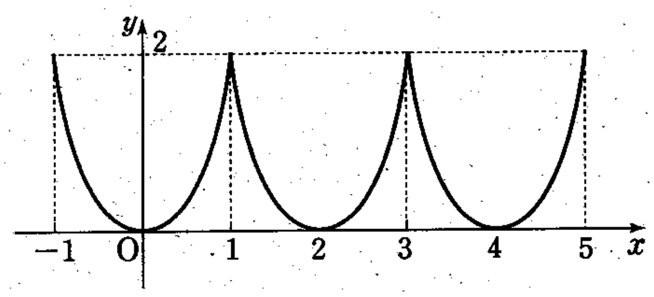
따라서 불연속점의 개수는 각각 2, 4이므로 $h(3)+h(8)=2+4=6$

19. 정답 30

(가), (나), (다)의 조건에 의하여

함수의 그래프는 y 축과 $x=1$ 에 대칭인

다음과 같은 그래프이다.



$y=[f(x)]$ 는 $f(x)$ 의 값이 1 을 만족시키는 x 개수는 20 , $f(x)=2$ 를 만족시키는 x 의 개수는 10 이므로

불연속이 되는 x 의 개수는 30 이다.

20. 답 ②

[해설] 함수의 연속성

정수 n에 대하여

(ⅰ) $x=10^n$일 때,

$$f(x)=[\log10^n]+\left[\log\frac{100}{10^n}\right]=n+(2-n)=2$$

(ⅱ) $10^n<x<10^{n+1}$일 때,

$f(x)=[\log x]+[2-\log x]$

$=2+[\log x]+[-\log x]=2+n+(-n-1)=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=10^n$일 때 함수 $f(x)$는 불연속이다.

따라서 모든 a $(0<a<100)$의 값의 합은

$$10+1+\frac{1}{10}+\cdots=\frac{10}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{9}$$

21. 정답 24

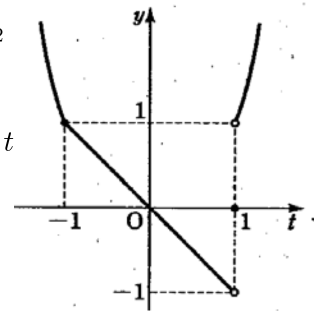
$x\neq 4$일 때, $\log(x-4)^2=t$라 하면

(ⅰ) $|t|>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{t^{2n}-t}{t^{2n-2}+1}=t^2$

(ⅱ) $|t|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{t^{2n}-t}{t^{2n-2}+1}=-t$

(ⅲ) $t=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{t^{2n}-t}{t^{2n-2}+1}=0$

(ⅳ) $t=-1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{t^{2n}-t}{t^{2n-2}+1}=1$



$$f(x)=\begin{cases}\{\log(x-4)^2\}^2 & \left(x<4-\sqrt{10},\ 4-\dfrac{1}{\sqrt{10}}<x<4,\right.\\ & \left.\quad 4<x<4+\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ x>4+\sqrt{10}\right)\\ -\log(x-4)^2 & \left(4-\sqrt{10}<x<4-\dfrac{1}{\sqrt{10}},\right.\\ & \left.\quad 4+\dfrac{1}{\sqrt{10}}<x<4+\sqrt{10}\right)\\ 0 & (x=4\pm\sqrt{10})\\ 1 & \left(x=4\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)\end{cases}$$

따라서, $x=4\pm\sqrt{10}$, $x=4$에서 불연속이므로

$(4+\sqrt{10})(4-\sqrt{10})\times 4=24$

22. 정답 15개 수학 내적문제 해결능력–함수의 극한과 연속성

주어진 함수가 불연속인 경우는 $0<x<2\pi$에서 $y=\tan 4x$가 불연속인 경우 또는 $\sin x=0$또는 $\cos 2x=0$또는 $\tan 4x=0$인 경우이다.

(ⅰ) $y=\tan 4x$는 $4x=\dfrac{2n-1}{2}\pi$

즉, $x=\dfrac{2n-1}{8}\pi$에서 불연속이므로

$x=\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{5}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi,\ \dfrac{9}{8}\pi,\ \dfrac{11}{8}\pi,\ \dfrac{13}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi$

∴ 8개

(ⅱ) $\sin x=0$에서 $x=n\pi$이므로 $x=\pi$ ∴ 1개

(ⅲ) $\cos 2x=0$에서 $2x=\dfrac{2n-1}{2}\pi$

즉, $x=\dfrac{2n-1}{4}\pi$이므로

$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ ∴ 4개

(ⅳ) $\tan 4x=0$에서 $4x=n\pi$ 즉, $x=\dfrac{n}{4}\pi$이므로

$x=\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\ \dfrac{\pi}{2},\ \left(\dfrac{3}{4}\pi\right),\ (\pi),\ \left(\dfrac{5}{4}\pi\right),\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \left(\dfrac{7}{4}\pi\right)$ ∴ 2개

따라서, 주어진 함수가 불연속이 되는 점은 15개다.

23. 정답 8

$f(x)g(x)=\begin{cases}(x-4)(x^2-2) & (x\geq a)\\ (x-4)(4x+10) & (x<a)\end{cases}$이므로 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 모든 실수에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a+0}(x-4)(x^2-2)=(a-4)(a^2-2)$

$\lim\limits_{x\to a-0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a-0}(x-4)(4x+10)=(a-4)(4a+10)$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)g(x)=f(a)g(a)$

$(a-4)(a^2-2)=(a-4)(4a+10)$

$(a-4)(a^2-4a-12)=0$

$9a-4)(a-6)(a+2)=0$

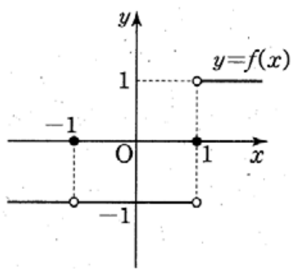
따라서 구하는 합은

$4+6-2=8$

24. 답 ⑤

ㄱ. (참) $f(x)=\begin{cases}1 & (x>1)\\ -1 & (-1<x<1\text{또는 }x<-1)\\ 0 & (x=\pm 1)\end{cases}$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\therefore \lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=-1$

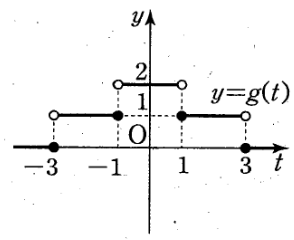
ㄴ. (참) 함수 $f(x)$의 그래프는 열린 구간 $(-3,\ 1)$에서 불연속점이 1개이므로 $g(-1)=1$

ㄷ. (참) 함수 $f(x)$의 그래프는 $-1<t<1$일 때 열린 구간 $(t-2,\ t+2)$에서 불연속점은 2개다.

$\therefore \lim\limits_{t\to 1-0}g(t)=2$

[참고]

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



25. 정답 ③

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $h(x)$도 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $h(1)=0\cdot 1=0$

$\lim\limits_{x\to 1+0}h(x)=0\cdot 1=0,\ \lim\limits_{x\to 1-0}h(x)=0\cdot 0=0$

따라서 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $h(1)=0\cdot 0=0$

$\lim\limits_{x\to1+0} h(x)=\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{|x-1|}{x-1}=1$

$\lim\limits_{x\to1-0} h(x)=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{|x-1|}{1-x}=1$

따라서 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

26. 답 ①

[해설] $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{bx^{2n+1}+2x+1}{x^{2n}+1}$

$$=\begin{cases}\dfrac{-b-1}{2} & (x=-1)\\ 2x+1 & (|x|<1)\\ \dfrac{b+3}{2} & (x=1)\\ bx & (|x|>1)\end{cases}$$

(i) $\lim\limits_{x\to1-0} h(x)=\lim\limits_{x\to1-0} f(x)g(x)$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2x+1)(x^2-ax+1)}{x-1}$

$x\to1-0$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to1-0}(2x+1)(x^2-ax+1)=3(2-a)=0$에서

$a=2$이다.

$\therefore \lim\limits_{x\to1-0} h(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(2x+1)(x-1)=0$

(ii) $\lim\limits_{x\to1+0} h(x)=\lim\limits_{x\to1+0} f(x)g(x)$

$=\lim\limits_{h\to1+0}\dfrac{bx(x-1)^2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+0} bx(x-1)=0$

(i), (ii)에서 $\lim\limits_{x\to1}h(x)=0$

이때, 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$h(1)=2\times\dfrac{b+3}{2}=0,\ \therefore b=-3$

$\therefore a+b=2+(-3)=-1$

27. 정답 ⑤ 수학 내적문제 해결 능력 - 함수의 극한과 연속성

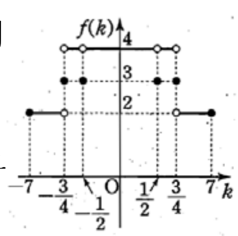
반지름의 길이가 1이고 중심의 좌표가 (3, 1)인 원에 접하는 접선의 방정식을 $y=kx$라 하면

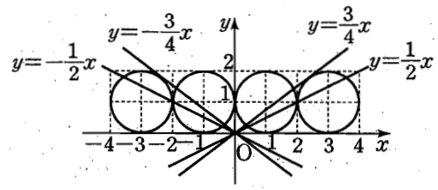
$\dfrac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1,\ 9k^2-6k+1=k^2+1$

$k(4k-3)=0$ $\qquad\therefore k=0$ 또는 $k=\dfrac{3}{4}$

또, 직선 $y=kx$가 점 (2, 1)을 지날 때 k의 값은 $k=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 함수 $f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.





ㄱ. (참) 함수 $f(k)$의 그래프에서 불연속인 점은 4개다.

ㄴ. (참) $\lim\limits_{k\to a+0} f(k)\neq\lim\limits_{k\to a-0} f(k)$인 실수 a는 $a=\pm\dfrac{3}{4}$으로 2개다.

ㄷ. (참) $-7\le k\le7$인 실수 k에 대하여 $f(k)\ge2$이므로 $f(f(k))=2$이다.

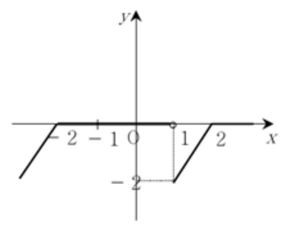
따라서, 함수 $y=f(f(k))$는 연속함수이다.

28. ②

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1+0}\{f(x)+f(-x)\}=-1+1=0$

$\therefore$ 참

ㄴ. $g(x)=f(x)-|f(x)|$라고 하면



$$g(x)=\begin{cases}2x+4 & (x\le-2)\\ 0 & (-2<x<1)\\ 2x-4 & (1\le x<2)\\ 0 & (x\ge2)\end{cases}$$

따라서 $g(x)=f(x)-|f(x)|$는 $x=1$에서만 불연속이다. $\therefore$ 참

ㄷ. $a=-1$일 때, $f(x)f(x-a)=f(x)f(x+1)$은 실수 전체에서 연속이다. $\therefore$ 거짓

29. 답 ⑤

ㄱ. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0+\sqrt{\dfrac{1}{2}-0}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1+\sqrt{-\dfrac{1}{2}-(-1)}$

$=-1+\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

이므로 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$ (참)

ㄴ. n에 정수일 때, $f(n)=n+\sqrt{n-n}=n$ (참)

ㄷ. 정수 n에 대하여

$\lim\limits_{x\to n+0} f(x)=\lim\limits_{x\to n+0}(n+\sqrt{x-n})=n$

$\lim\limits_{x\to n-0} f(x)=\lim\limits_{x\to n-0}(n-1+\sqrt{x-n+1})$

$=n-1+1=n$

따라서 $\lim\limits_{x\to n}f(x)=f(n)$이 성립하므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 연속이다. 또한, x가 정수가 아닐 때 함수 $f(x)$는 연속이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

30. 정답 ①

ㄱ. 임의의 자연수 n에 대하여 두 함수 $y=x^{2n+1}+1,\ y=x^{2n}+1$은 모두 연속함수이고, $x^{2n}+1\neq0$이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f_n(x)$는 연속함수이다. (참)

ㄴ. $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+1}$에서

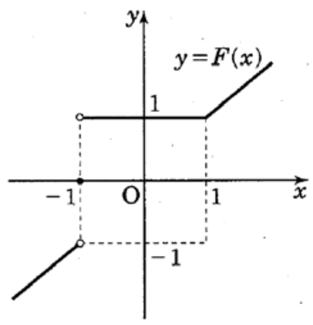
i) $|x|>1$일 때, $F(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x+\dfrac{1}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=x$

ii) $|x|<1$일 때, $F(x)=\dfrac{0+1}{0+1}=1$

iii) $F(1)=1$

iv) $F(-1)=0$

함수 $y=F(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $F(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 1+0}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

$\lim_{x\to 1-0}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\dfrac{1-1}{x-1}=0$

따라서 $\lim_{x\to 1}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

31. ① 연역적 추론 능력(증명) - 함수의 극한과 연속성

ㄱ. (거짓) $8<x<16$일 때, $3<\log_2 x<4$이므로

$\lim_{x\to 16-0} f(x)=3$

$16<x<32$일 때, $4<\log_2 x<5$이므로

$\lim_{x\to 16+0} f(x)=4$

그러므로 $\lim_{x\to 16} f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다.

ㄴ. (참) 정수 n에 대하여

$2^{n-1}<x<2^n$일 때, $n-1<\log_2 x<n$이므로

$\lim_{x\to 2^n-0} f(x)=n-1$

$2^n<x<2^{n+1}$일 때, $n<\log_2 x<n+1$이므로

$\lim_{x\to 2^n+0} f(x)=n$

즉, $\lim_{x\to 2^n} f(x)$의 극한값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2^n$ 에서 불연속이다.

그러므로 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항은 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$의 5개다.

ㄷ. (거짓) ㄴ에 의해 수열 $\{a_n\}$은 $2^4, 2^3, 2^2, \cdots$이다. 즉, 첫째항이 2^4이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

$\therefore a_n=2^{5-n}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{5-n}=\dfrac{2^4}{1-\dfrac{1}{2}}=2^5=32$

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

32. 정답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0} f(g(x))=\lim_{g(x)\to -1+0} f(g(x))=0$

$\lim_{x\to 1-0} f(g(x))=f(1)=0$

즉, $\lim_{x\to 1} f(g(x))$가 존재한다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to +0} g(f(x))=\lim_{f(x)\to -1+0} g(f(x))=1$

$\lim_{x\to -0} g(f(x))=\lim_{f(x)\to -1+0} g(f(x))=1$

$g(f(0))=g(0)=1$

즉, $x=0$에서 함수 $g(f(x))$는 연속이다. (참)

ㄷ. (i) $x=-1$일 때

$\lim_{x\to -1+0} f(x)g(x)=0\times 1=0$

$\lim_{x\to -1-0} f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

$f(-1)g(-1)=0\times 0=0$

이므로 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $x=0$일 때

$\lim_{x\to +0} f(x)g(x)=(-1)\times 1=-1$

$\lim_{x\to -0} f(x)g(x)=(-1)\times 1=-1$

$f(0)g(0)=0\times 1=0$

이므로 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $x=1$일 때

$\lim_{x\to 1+0} f(x)g(x)=0\times(-1)=0$

$\lim_{x\to 1-0} f(x)g(x)=0\times 1=0$

$f(-1)g(-1)=0\times 1=0$

이므로 $x=1$에서 연속이다.

(iv) $x=2$일 때

$\lim_{x\to 2+0} f(x)g(x)=1\times 0=0$

$\lim_{x\to 2-0} f(x)g(x)=3\times 0=0$

이므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, 함수 $y=f(x)g(x)$의 그래프의 불연속점은 2개이다. (참)

33. 답 ⑤

[해설] n이 정수일 때, $x=n$ 에서 연속성을 조사하면

ㄱ. $f(n)+g(n)=1+0=1$

$\lim_{x\to n+0}\{f(x)+g(x)\}$

$=\lim_{x\to n+0} f(x)+\lim_{x\to n+0} g(x)$

$=0+1=1$

$\lim_{x\to n-0}\{f(x)+g(x)\}$

$=\lim_{x\to n-0} f(x)+\lim_{x\to n-0} g(x)$

$=1+0=1$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$ 는 모든 실수에서 연속이다.

ㄴ. $f(n)g(n)=1\cdot 0=0$

$\lim\limits_{x\to n+0}\{f(x)g(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to n+0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to n+0} g(x) = 0\cdot 1= 0$

$\lim\limits_{x\to n-0}\{f(x)g(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to n-0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to n-0} g(x) = 1\cdot 0= 0$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

ㄷ. $f(g(n))+g(g(n)) = f(0)+g(0)$

$= 1+0 = 0$

$\lim\limits_{x\to n+0}\{f(g(x))+g(g(x))\}$

$= \lim\limits_{t\to 1-0} f(t) + \lim\limits_{t\to 1-0} g(t) = 1+0 = 1$

$\lim\limits_{x\to n-0}\{f(g(x))+g(g(x))\}$

$= \lim\limits_{t\to +0} f(t) + \lim\limits_{t\to +0} g(t) = 0+1 = 1$

따라서 함수 $f(g(x))+g(f(x))$는 모든 실수에서 연속이다.

이상에서 모든 실수에서 연속인 함수는 ㄱ,ㄴ,ㄷ 이다.

34. [출제의도] 함수의 연속을 이해하고 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to +0} f(f(x)) = \lim\limits_{t\to -1+0} f(t) = 0$이고

$\lim\limits_{x\to -0} f(f(x)) = \lim\limits_{t\to 1-0} f(t) = 0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0} f(f(x)) = 0$

$f(f(0)) = 0$이므로 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $a\neq 0$일 때, $\lim\limits_{x\to a} f(x)f(-x) = -\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\}^2$

$a=0$일 때, $-\lim\limits_{x\to +0}\{f(x)\}^2 = -\lim\limits_{x\to -0}\{f(x)\}^2 = -1$

따라서 $-2<a<2$ 인 모든 실수 a 에 대하여 $\lim\limits_{x\to a} f(x)f(-x)$의 값이 존재한다. (참)

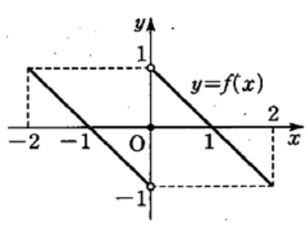
35. 정답 ⑤

ㄱ. $f(x)=t$라 하면

$\lim\limits_{x\to +0} g(f(x)) = \lim\limits_{t\to 1-0} g(t) = 0$

$\lim\limits_{x\to -0} g(f(x)) = \lim\limits_{t\to -1+0} g(t) = 0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = 0 \quad \therefore$ 참



ㄴ. $g(f(0)) = g(0) = 0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = g(f(0))$이 되어

$g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다. $\therefore$ 참

ㄷ. $g(f(x))=0$에서 $f(x)=t$라 하면 $g(t)=0$의 실근은 $t=0,\ 1$ 이다.

$f(x)=0$에서 $x=-1$또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$f(x)=1$에서 $x=-2$

따라서 $g(f(x))=0$의 실근의 개수는 4이다. $\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

36. 정답 ⑤

ㄱ. $x\to 1$일 때, $f(x)\to 2-0$이므로

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1}(g\circ f)(x) = 0$ (참)

ㄴ. $x\to 2+0$일 때, $f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+0}(g\circ f)(x) = g(1) = 2$

$x\to 2-0$일 때, $f(x)\to +0$이므로

$\lim\limits_{x\to 2-0}(g\circ f)(x) = 2$

$x=2$일 때 $f(2)=0$이므로

$g(f(2)) = g(0) = 2$

따라서 $\lim\limits_{x\to 2}(g\circ f)(x) = g(f(2)) = 2$이므로 함수

$\lim\limits_{x\to 1}(g\circ f)(x)$는 $x=2$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 $x=2$에서 불연속이므로 $x=2$와 $f(x)=2$인 x, 즉 $x=1$에서 함수 $(g\circ f)(x)$의 연속성을 조사해 보면 된다.

i) $x=2$에서 함수$(g\circ f)(x)$는 연속이다. ($\because$ ㄴ)

ii) $\lim\limits_{x\to 1}(g\circ f)(x) = 0$ ($\because$ ㄱ)이고 $(g\circ f)(1) = 0$이므로

$x=1$에서 함수 $(g\circ f)(x)$는 연속이다.

그러므로 구간 $[0, 3]$에서 함수 $(g\circ f)(x)$는 연속이다. (참)

37. 답 ③

[해설] ㄱ. 임의의 유리수 x에 대하여

$f(x)+g(x) = x+0 = x$

임의의 무리수 x에 대하여

$f(x)+g(x) = 0+x = x$

$\therefore f(x)+g(x) = x$

따라서, $f(x)+g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. 임의의 유리수 x에 대하여 $g(x)=0$이므로

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$

임의의 무리수 x에 대하여 $g(x)=x$이므로

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = 0$

$\therefore (f\circ g)(x) = 0$

따라서, $(f\circ g)(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. 임의의 유리수 x에 대하여 $f(x)=x$이므로

$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$

임의의 무리수 x에 대하여 $f(x)=0$이므로

$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$

따라서, $(f\circ f)(x)$는 모든 실수 x에서 연속이 아니다.

따라서, 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

38. 정답 ④

[출제 의도] 함수의 극한과 연속성 이해하기

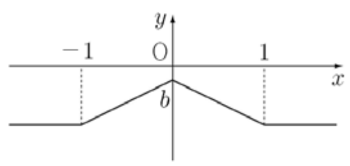
$$f(x)=\begin{cases} -a|x|+b & (|x|<1) \\ \dfrac{-a-1+b}{2} & (|x|=1) \\ -1 & (|x|>1) \end{cases}$$

ㄱ. 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$이다.

$\therefore\ a-b=1$ (참)

ㄴ. (반례) $a=-1$, $b=-2$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 -2이다. (거짓)

ㄷ. $a<1$일 때, $b<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. (참)



39. ④

임의의 정수 n에 대하여

ㄱ. $f(n)g(n)=0\cdot n=0$

$\lim\limits_{x\to n-0} f(x)g(x)=1\cdot(n-1)=n-1$

$\lim\limits_{x\to n+0} f(x)g(x)=0\cdot n=0$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $n\neq 1$인 모든 정수에서 불연속이다.

ㄴ.$f(g(x))=f(n)=0$

$\lim\limits_{x\to n-0} f(g(x))=f(n-1)=0$

$\lim\limits_{x\to n+0} f(g(x))=f(n)=0$

따라서 함수 $f(g(x))$는 모든 정수에서 연속이다.

ㄷ.$g(f(n))=g(0)=0$

$\lim\limits_{x\to n-0} g(f(x))=\lim\limits_{t\to 1-0} g(t)=0$

$\lim\limits_{x\to n+0} g(f(x))=\lim\limits_{t\to +0} g(t)=0$

따라서 함수 $g(f(x))$는 모든 정수에서 연속이다.

40. 정답 ①

ㄱ. $(g\circ f)(1)=g(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 1+0} g(f(x))=\lim\limits_{x\to +0} g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1-0} g(f(x))=\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)=0$

따라서 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $(g\circ f)(1)=g(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 1+0} g(f(x))=\lim\limits_{x\to +0} g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1-0} g(f(x))=\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)=1$

따라서 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $(g\circ f)(1)=g(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 1+0} g(f(x))=\lim\limits_{x\to +0} g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1-0} g(f(x))=\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)=1$

따라서 $x=1$에서 불연속이다.

41. 정답 ②

ㄱ. $(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to +0} (f\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to +0} (f(f(x))=f(1)=1$

$\lim\limits_{x\to -0} (f\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to -0} (f(f(x))=f(1)=1$

$\therefore\ (f\circ f)(0)\neq \lim\limits_{x\to 0}(f\circ f)(x)$

$\therefore\ x=0$에서 불연속

ㄴ. $(g\circ g)(0)=g(g(0))=g(0)=0$

$\lim\limits_{x\to +0} (g\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to +0} (g(g(x))=\lim\limits_{t\to 1-0} g(t)=0$

$\lim\limits_{x\to -0} (g\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to -0} (g(g(x))=\lim\limits_{t\to -0} g(t)=0$

$\therefore\ (g\circ g)(0)=\lim\limits_{x\to 0}(g\circ g)(x)$

$\therefore\ x=0$에서 연속

ㄷ. $(h\circ h)(0)=h(h(0))=h(1)=1$

$\lim\limits_{x\to +0} (h\circ h)(x)=\lim\limits_{x\to +0} (h(h(x))=\lim\limits_{t\to +0} h(t)=0$

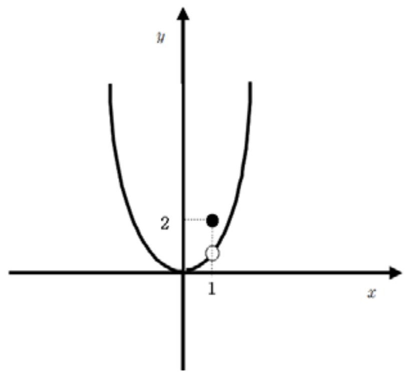
$\lim\limits_{x\to -0} (h\circ h)(x)=\lim\limits_{x\to -0} h(h(x))=h(1)=1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to +0}(h\circ h)(x)\neq \lim\limits_{x\to -0}(h\circ h)(x)$

$\therefore\ x=0$에서 불연속

따라서, $x=0$에서 연속인 것은 ㄴ뿐이다.

42. 정답 ③



ㄱ. 좌우 극한값이 1이므로 (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$를 a만큼 평행이동 시켜도 불연속 점이 존재하기 때문에 (거짓)

ㄷ. $h(x)=(x-1)f(x)$는 $x\neq 1$에서도 $x=1$에서도 $y=0$이 되기 때문에 연속 (참)

43. 정답 ③

$2^{x-1}=100-\frac{1}{2}x$의 양변에 2를 곱하여 정리하면

$2^x+x-200=0$

$f(x)=2^x+x-200$으로 놓으면 $f(x)$는 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가함수이다.

$f(7)=2^7+7-200=-65<0$

$f(8)=2^8+8-200=64>0$

이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(x)=0$은 $(7,\ 8)$에서 오직 한 개의 해를 갖는다.

$\therefore\ n=7$

44. 답 ① 이해력 - 함수의 극한과 연속성

$f(x)=a^x-x$라고 하면 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,2]$에서 연속이고,

$f(0)=a^0-0=1>0$이므로 $f(2)=a^2-2<0$

$a^2<0$

$\therefore -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$

$a > 1$이므로 $1 < a < \sqrt{2}$

45. 정답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x \to 1-0} f(f(x)) = \lim_{t \to +0} f(t) = 1$

$\lim_{x \to 1+0} f(f(x)) = \lim_{t \to 1+0} f(t) = 1$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(f(x)) = 1$ (참)

ㄴ. $b = 0$이면 $f(1) = 0$이다.

ㄱ에서 $\lim_{x \to 1} f(f(x)) = 1$이므로 함수 $f(f(x))$가 $x = 1$에서 연속이면 $f(f(1)) = f(0) = 1$이다.

따라서 $a = 1$이므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(f(x))$가 $x = 1$에서 연속이려면 $f(f(1)) = 1$이어야 한다.

(i) $b = f(1) = 0$일 때, ㄴ에서 $a = 1$이므로 순서쌍 (a, b)는 $(1, 0)$의 1개다.

(ii) $b = f(1) = 1$일 때, $f(f(1)) = f(1) = 1$이므로 순서쌍 (a, b)는 $(0, 1)$, $(1, 1)$의 2개이다.

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 및 풀이

1. 정답 ④ 이해력 - 함수의 극한

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(\sqrt[n]{3}-1)}{(n+1)(\sqrt[n]{2}-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)}$$

에서 $\frac{1}{n}=t$라 하면 $n\to\infty$일 때, $t\to0$이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{(1+2t)(3^t-1)}{(1+t)(2^t-1)}=\lim_{t\to0}\frac{(1+2t)\cdot\frac{3^t-1}{t}}{(1+t)\cdot\frac{2^t-1}{t}}=\frac{\ln3}{\ln2}=\log_2 3$$

2. ①

(주어진 식)

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(1-2^x)\cdot\ln3\cdot(1+\cos4x)}{1-\cos^2 4x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2}{\sin^2 4x}\cdot\frac{(1-2^x)}{x}\cdot\ln3\cdot(1+\cos4x)\right\}$$

$$=\frac{1}{4^2}\cdot(-\ln2)\cdot2\ln3=-\frac{\ln2\cdot\ln3}{8}$$

3. 정답 ②

$1-\cos x=t$라 하면 $x\to0$일 때, $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{1-\cos x}-1}{1-\cos x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}\times\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=1\times\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

4. 정답 ①

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to1}\frac{e(e^{\sqrt{x}-1}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{e}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{e^{\sqrt{x}-1}-1}{\sqrt{x}-1}\right\}=\frac{e}{2}\cdot1=\frac{e}{2}$$

5. 답 ①

[해설] $\cos2x=1-2\sin^2 x$ 이므로

$$\lim_{x\to0}(\cos2x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}(1-2\sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{(1-2\sin^2 x)^{\frac{1}{-2\sin^2 x}}\right\}^{\frac{-2\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=e^{-2}$$

6. 답 ④ 삼각함수의 극한

$$\lim_{x\to0}\frac{x\tan2x}{1-\cos3x}=\lim_{x\to0}\frac{x\tan2x(1+\cos3x)}{(1-\cos3x)(1+\cos3x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\tan2x(1+\cos3x)}{1-\cos^2 3x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{9x^2}{\sin^2 3x}\cdot\frac{\tan2x}{2x}\cdot\frac{2}{9}\cdot(1+\cos3x)$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{2}{9}\cdot(1+1)=\frac{4}{9}$$

7. 정답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x^2}-1}{\tan x\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{2x}{\sin2x}$$ 이므로

극한값은 $1\cdot1\cdot1=1$

8. ①

$$\lim_{h\to0}\frac{e^{(h-1)^2}-e^{h^2+1}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{h^2-2h+1}-e^{h^2+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e^{h^2+1}(e^{-2h}-1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-2e^{h^2+1}(e^{-2h}-1)}{-2h}$$

$$=\lim_{h\to0}(-2e^{h^2+1})\cdot\lim_{h\to0}\frac{e^{-2h}-1}{-2h}=-2e\cdot1=-2e$$

9. 답 ④

주어진 식을 변형하면

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}\cos x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}\cos x-1-\cos x+\cos x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x(e^{2x}-1)+(\cos x-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x(e^{2x}-1)}{2x}\times2+\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$=2\lim_{x\to0}\left(\cos x\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)-\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{x}{\cos x+1}\right)$$

$$=2\times1\times1-1^2\times0=2$$

10. ②

(주어진 식)

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)\sin x}{(1+\cos x)x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{(1+\cos x)x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\cos x)}\cdot\frac{\sin^3 x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\cos x)}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$$

$=\frac{1}{2}$

11. 답 ②

$\lim_{x\to\infty}\left\{x^2\ln\left(\cos\frac{2}{x}\right)\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\cos\frac{2}{x}\right)^{x^2}$

$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1-2\sin^2\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

$=\lim_{\theta\to0}\ln(1-2\sin^2\theta)^{\frac{1}{\theta^2}}\quad\left(\because\frac{1}{x}=\theta\right)$

$=\lim_{\theta\to0}\ln\left\{(1-2\sin^2\theta)^{\frac{1}{-2\sin^2\theta}}\right\}^{\frac{-2\sin^2\theta}{\theta^2}}$

$=\ln e^{-2}=-2$

12. 정답 ②

$x\to0$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야한다.

$\therefore 2a+b=0$ ...... ㉠

$\lim_{x\to0}\frac{ae^{2x}+ae^{-2x}+b}{x\sin x}=1$

$=\lim_{x\to0}\frac{ae^{2x}+ae^{-2x}+2a}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{a(e^{2x}+e^{-2x}-2)}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{a\cdot\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2}{\frac{\sin x}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{a\cdot\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)^2}{\frac{\sin x}{x}}$

$=\frac{a(1+1)^2}{1}=4a=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{1}{4}$

13. ⑤

$x\to0$ 일 때, (분모) $\to0$ 이고, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$가 수렴하므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=0$

ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{\sin f(x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{f(x)}{x}$

$=1\cdot1\cdot2=2$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{f(x)}{x}$

$=1\cdot1\cdot2=2$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{\ln(1+x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{f(x)}{x}$

$=1\cdot1\cdot2=2$ (참)

14. 답 ④

ㄱ. (참) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2x^2(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{2(1+\cos x)}=\frac{1}{4}$

ㄴ. (참) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

ㄷ. (거짓) $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}$에서 $2^x-1=t$라 하면

$x=\log_2(1+t)$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{2\log_2(1+t)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{1}{2\log_2(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{2\log_2 e}=\frac{1}{2}\ln e$

15. 정답 ⑤

$f(x)(e^{\frac{1}{3x}}-1)=g(x)$라 하면

$\lim_{x\to\infty}g(x)=6,\ f(x)=\frac{g(x)}{e^{\frac{1}{3x}}-1}$ 이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{g(x)}{e^{\frac{1}{3x}}-1}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3x}}{e^{\frac{1}{3x}}-1}\cdot3g(x)=3\times6=18$

16. 답 ②

$x-e=t$로 놓으면 $x\to e$일 때 $t\to0$이다.

$\therefore\lim_{x\to e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=\lim_{t\to0}\ln\left(\frac{t+e}{e}\right)^{\frac{1}{t}}$

$=\lim_{t\to0}\ln\left\{\left(\frac{t}{e}+1\right)^{\frac{e}{t}}\right\}^{\frac{1}{e}}$

$=\lim_{t\to0}\frac{1}{e}\ln\left(\frac{t}{e}+1\right)^{\frac{e}{t}}$

$=\frac{1}{e}\ln e=\frac{1}{e}=e^{-1}$

다른 풀이

$f(x)=\ln x$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\lim_{x\to e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$$

$$=f'(e)=\frac{1}{e}=e^{-1}$$

17. 정답 ③

$f(x)=e^{3x}-1$의 역함수는 $x=e^{3y}-1$, $y=\dfrac{1}{3}\ln(1+x)$이므로

$g(x)=\dfrac{1}{3}\ln(1+x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{\frac{1}{3}\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{kx}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot 3k$$

$$=3k\lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{kx}\cdot\frac{1}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$=3k\times 1\times 1=3k$$

$\therefore$ (주어진 식)$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}3k=165$

18. 답 ⑤

주어진 식에서 x는 0이 아니면서 한없이 0에 가까워지는 값이므로

$x\to+0$일 때, $\cos x\to 1-0$이고, $x\to-0$일 때, $\cos x\to 1-0$이므로 $|\cos x|<1$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\cos^n x=1+\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\cos x}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\cos x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\cos x}\cdot\frac{1}{1-\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x^2}{\cos x}\right)^2\cdot\frac{1+\cos x}{\cos x}\right\}$$

$$=1^2\cdot\frac{1+1}{1}=2$$

19. 정답: ①

$1-x=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이다.

$$\lim_{x\to 1}\ln x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\ln(1-t)^{\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\ln(1-t)^{\frac{1}{-t}}\right\}^{-1}=\ln e^{-1}=-1$$

20. 답 ③

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\left(\frac{2}{x}+4\right)}{\ln\left(\frac{4}{x}+2\right)}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{2+4x}{x}}{\ln\frac{4+2x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(2+4x)-\ln x}{\ln(4+2x)-\ln x}=1$$

21. ⑤

(주어진 식)$=\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\left(2+\frac{\sin 3x}{x\cdot\cos 3x}\right)\cdot\frac{\ln(4x+1)}{x}\right\}$

$=(2+3)\cdot 4=20$

22. 정답 ③ 추론 능력(추측) - 함수의 극한

$a_1=2$, $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{na_n}$에서

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$a_3=1+\frac{1}{2a_2}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$a_4=1+\frac{1}{3a_3}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

따라서, $a_n=\dfrac{n+1}{n}$로 추정할 수 있다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times a_n\times a_{n+1}\times a_{n+2}\times\cdots\times a_{2n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n+3}{n+2}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

[참고]

$a_1=2$, $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{na_n}$의 일반항이 $a_n=\dfrac{n+1}{n}$임을 수학적귀납법으로 증명하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=\dfrac{1+1}{1}=2$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $a_k=\dfrac{k+1}{k}$로 가정하면

$$a_{k+1}=1+\frac{1}{ka_k}=1+\frac{1}{k+1}=\frac{k+2}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

23. 답 ⑤

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2\sin x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1-\sin x}{2\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2}{1-\sin x}}$$

$$=e^2$$

24. 정답 ③

[출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}+e^{x\sin 2x}-2}{x\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 2x}-1}{x\sin 2x}\times\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\times\frac{x}{\ln(1+x)}=1+2=3$$

25. 답 ③

$$f(n)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^2+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{x}}$$

$$=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(k)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=2$$

26. ② 이해 능력 – 미분법

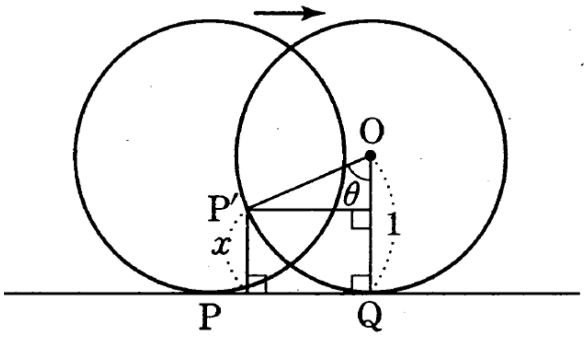
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2x)-f(1)}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2x)-f(1)}{2x}=2f'(1)$$

그런데 $f'(x)=e^x\cdot\ln(x^2+1)+e^x\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}$ 이므로

$f'(1)=e\ln 2+e=e(\ln 2+1)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(1+2x)-f(1)}{x}=2f'(1)=2e(\ln 2+1)$$

27. 정답 ④



그림에서 $\overline{PQ}=\overset{\frown}{P'Q}$ 이므로 부채꼴의 호의 길이에서

$\overline{PQ}=1\cdot\theta=\theta$

또, $x=1-\cos\theta$이므로

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{x}{\overline{PQ}^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\frac{1}{2}$$

28. 정답 ③

$$S(t)=\frac{1}{2}(a-3)\ln\frac{1}{2}(t-1)$$

$$\therefore \lim_{t\to 3+0}\frac{S(t)}{t-3}=\lim_{t\to 3+0}\frac{(a-3)\ln\frac{1}{2}(t-1)}{2(t-3)}$$

$$=\lim_{h\to +0}\frac{(a-3)\ln\left(1+\frac{1}{2}h\right)}{2h}$$

($\because$ $t-3=h$라 두면 $t=3+h$, $t\to 3+0$일 때 $h\to +0$)

$$=\lim_{h\to +0}\left\{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}h\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\frac{(a-3)}{4}\right\}$$

$$=\frac{a-3}{4}=5$$

$\therefore$ $a=23$

29. ④

$A\left(-\dfrac{1}{2a},\ 0\right)$, $B\left(\dfrac{1}{2a},\ 1\right)$이므로

$P\left(-\dfrac{1}{2a},\ \ln\left(1-\dfrac{3}{2a}\right)\right)$, $Q\left(\dfrac{1}{2a},\ e^{\frac{1}{a}}\right)$

$\therefore$ $\overline{AP}=-\ln\left(1-\dfrac{3}{2a}\right)$, $\overline{BQ}=e^{\frac{1}{a}}-1$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}}=\lim_{a\to\infty}\frac{-\ln\left(1-\frac{3}{2a}\right)}{e^{\frac{1}{a}}-1}$$ 에서

$\dfrac{1}{a}=t$라 하면 $a\to\infty$일 때 $t\to +0$이다.

$$(\text{주어진 식})=\lim_{t\to +0}\frac{-\ln\left(1-\frac{3t}{2}\right)}{e^t-1}$$

$$=\lim_{t\to +0}\frac{\ln\left(1-\frac{3t}{2}\right)}{-\frac{3t}{2}}\cdot\frac{\frac{3t}{2}}{e^t-1}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{t\to +0}\ln\left(1-\frac{3t}{2}\right)^{-\frac{2}{3t}}\cdot\frac{t}{e^t-1}=\frac{3}{2}$$

30. ④

$$\lim_{p\to +0}\frac{2\overline{PA}+\overline{AB}-2}{\overline{OP}}=\lim_{x\to +0}\frac{(\overline{PA}-1)+(\overline{PB}-1)}{\overline{OP}}$$

$$=\lim_{x\to +0}\frac{(e^{2p}-1)+(e^{4p}-1)}{p}$$

$=2+4=6$

31. 정답 ①

$\frac{1}{x}=t$라 하자

(주어진 식)$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(b+ct^2)}{t^a}=2$

$\lim_{t\to0}t^a=0$ 이므로 $\lim_{t\to0}\ln(b+ct^2)=\ln b=0$, $\therefore b=1$

(주어진 식)$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+ct^2)}{t^a}=2$에서 $a=2, c=2$

따라서 $a+b+c=5$

32. 정답 ③

[출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=\ln\sqrt[3]{x}$ 이므로 $g(x)=e^{3x}$이다.

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(g(x))}{g(x)-1}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{e^{3x}-1}=\frac{1}{3}$$

33. **정답** ③

[출제의도] 접선의 방정식과 함수의 극한을 이용하는 여러 가지 성질을 알 수 있는가를 묻는 문제이다.

접점을 $Q(t,\ 1+\ln t)$라 하면, 접선 l의 방정식은 다음과 같다.

$l: y=\frac{1}{t}(x-t)+1+\ln t=\frac{1}{t}x+\ln t$

따라서 두 점 P, R의 좌표는 $P(0,\ \ln t)$, $R(0,\ 1+\ln t)$이다.

ㄱ. $\overline{PR}=(1+\ln t)-\ln t=1$ (참)

ㄴ. $a=-t\ln t$에서 $a\to-0$이면, $t\to1+0$이므로

$$\lim_{n\to-0}S(a)=\lim_{t\to1+0}\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\ \text{(참)}$$

ㄷ. $a=-t\ln t$에서 $a\to-\infty$이면, $t\to+\infty$이므로

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{a}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{t}{2}}{-t\ln t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-1}{2\ln t}=0$$ 이다.(거짓)

34. **답** ⑤ 함수의 극한

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

따라서 적당한 다항함수 $h(x)$에 대하여 $f(x)=xh(x)$로 놓을 수 있다.

ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}h(x)=h(0)$

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}=h(0)$ ($\because$ ㄱ)

ㄷ. $\lim_{x\to0}\frac{\ln|1+f(x)|}{\ln|1-f(x)|}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln|1+f(x)|}{f(x)}}{\frac{\ln|1-f(x)|}{-f(x)}}\cdot(-1)=-1$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 극한값이 존재한다.

35. **정답** 40

(삼각형 ABC의 넓이)

=(삼각형 ABP의 넓이) +(삼각형 ACP의 넓이)

$\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\sin5\theta=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\sin2\theta+\frac{1}{2}\cdot4\cdot\overline{AP}\cdot\sin3\theta$

$\overline{AP}=\frac{12\sin5\theta}{3\sin2\theta+4\sin3\theta}$

$$\lim_{\theta\to0}\overline{AP}=\lim_{\theta\to0}\frac{12\sin5\theta}{3\sin2\theta+4\sin3\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{12\cdot\frac{\sin5\theta}{\theta}}{3\cdot\frac{\sin2\theta}{\theta}+4\cdot\frac{\sin3\theta}{\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{60\cdot\frac{\sin5\theta}{5\theta}}{6\cdot\frac{\sin2\theta}{2\theta}+12\cdot\frac{\sin3\theta}{3\theta}}$$

$$=\frac{60}{6+12}=\frac{10}{3}$$

$\lim_{\theta\to0}12\overline{AP}=12\times\frac{10}{3}=40$

36. **답** ③

$\angle RBA=\frac{\pi}{3}-\alpha$이므로 $\angle ARB=\frac{2}{3}\pi$

삼각형 ABR에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BR}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AR}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2$$

$\therefore S(\alpha)=\frac{1}{2}\overline{AR}\cdot\overline{BR}\cdot\sin\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{1}{2}\cdot2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot2\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

$$\therefore\lim_{\alpha\to+0}\frac{S(\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\sqrt{3}\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\alpha}$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$$

37. **답** ②

$\overline{OC}=x$라 하면

삼각형 OAB의 넓이 $S=\frac{1}{2}ab\sin5\theta$

삼각형 OAC의 넓이 $S_1=\frac{1}{2}ax\sin\theta$

삼각형 OBC의 넓이 $S_2=\frac{1}{2}bx\sin4\theta$

$S=S_1+S_2$이므로

$\frac{1}{2}ab\sin5\theta=\frac{1}{2}ax\sin\theta+\frac{1}{2}bx\sin4\theta$

$ab\sin5\theta=x(a\sin\theta+b\sin4\theta)$

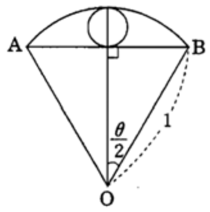
$$x=\frac{ab\sin5\theta}{a\sin\theta+b\sin4\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\overline{OC}=\lim_{\theta\to+0}\frac{ab\sin5\theta}{a\sin\theta+b\sin4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{5ab\frac{\sin5\theta}{5\theta}}{a\frac{\sin\theta}{\theta}+4b\frac{\sin\theta}{4\theta}}=\frac{5ab}{a+4b}$$

38. 정답 8

오른쪽 그림에서 원의 반지름의 길이를 r라 하면



$$\cos\frac{\theta}{2}+2r=1$$

$$\therefore\ r=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore\ l(\theta)=2\pi r=\pi\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\overline{AB}^2=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2=4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\pi\cdot\frac{\overline{AB}^2}{l(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\pi\cdot\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{\pi\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=4\lim_{\theta\to+0}\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=4\lim_{\theta\to+0}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=4\cdot2=8$$

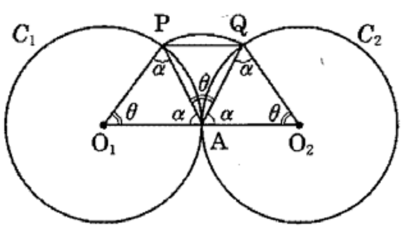
39. 정답 ⑤

$\angle O_1AP=\alpha$라 하면 $\angle QAO_2=\alpha$

$\angle O_1AP+\angle PAQ+\angle QAO_2=2\alpha+\theta=\pi$

$\angle O_1AP+\angle APO_1+\angle PO_1A=2\alpha+\angle PO_1A=\pi$

$\therefore\ \angle PO_1A=\angle AO_2Q=\theta$



따라서 $\triangle O_1AP$에서 코사인 법칙에 의해

$\overline{AP}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta$

$\overline{AP}=\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

따라서 부채꼴 APQ에서

$l(\theta)=\overline{AP}\times\theta=\sqrt{2(1-\cos\theta)}\cdot\theta$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{l(\theta)}{\theta^2}=\sqrt{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\theta}=\sqrt{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\theta\sqrt{1+\cos\theta}}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta}}=\sqrt{2}\times1\times\sqrt{\frac{1}{2}}=1$$

40. **답** 50 함수의 극한

점 M의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{\ln(1+2a)}{2}\right)$이므로 점 M을 지나고 선분 OP에 수직인 직선의 방정식은

$$y-\frac{\ln(1+2a)}{2}=-\frac{a}{\ln(1+2a)}\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

$y=0$을 대입하여 정리하면

$$m=\frac{\{\ln(1+2a)\}^2}{2a}+\frac{a}{2}=\frac{\{\ln(1+2a))^2+a^2}{2a}$$

또, $x=0$을 대입하여 정리하면

$$n=\frac{a^2}{2\ln(1+2a)}+\frac{\ln(1+2a)}{2}=\frac{\{\ln(1+2a)\}^2+a^2}{2\ln(1+2a)}$$

$$\therefore 100\lim_{a\to0}\frac{n}{m}=100\lim_{a\to0}\frac{a}{\ln(1+2a)}=100\cdot\frac{1}{2}=50$$

[다른 풀이]

선분 OP의 기울기는 $\frac{\ln(1+2a)}{a}$이므로 점 P가 원점에 한없이 가까워질 때, 선분 OP의 기울기의 극한값은

$$\lim_{a\to0}\frac{\ln(1+2a)}{a}=2$$

한편, $\frac{n}{m}$은 선분 OP에 수직인 직선의 기울기의 절댓값이므로

$$\lim_{a\to0}\frac{n}{m}=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 100\lim_{a\to0}\frac{n}{m}=100\cdot\frac{1}{2}=50$$

41. **정답** 50

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$라 하면 접선은 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$이므로

점 Q의 좌표는 $Q\left(\frac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$

직선 AP의 식은 $y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+1$이고, 점 R의 좌표는

$R\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ 0\right)$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\times\frac{\cos^2\theta-1+\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}=\frac{1}{2}\sin\theta\times\frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\theta}{2\theta^2\cos\theta}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 100\alpha=100\times\frac{1}{2}=50$$

42. 30

점 P의 좌표를 $P(\cos\theta,\sin\theta)$라고 하면

$Q(\ln(\sin\theta+1), \sin\theta)$ $R(\ln(\sin\theta+1), 0)$이고

이 때 직선 OP의 방정식은 $y=\tan\theta x$이므로 점 T의 좌표는 $T(\ln(\sin\theta+1), \tan\theta\ln(\sin\theta+1))$이다.

따라서 삼각형 ORT의 넓이 $S(\theta)=\frac{1}{2}\tan\theta\{\ln(1+\sin\theta)\}^2$이므로

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta\{\ln(1+\sin\theta)\}^2}{\theta^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to+0}\frac{\{\ln(1+\sin\theta)\}^2}{\theta^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{\{\ln(1+\sin\theta)\}}{\theta}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to+0}\left[\ln(1+\sin\theta)^{\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}}\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}=a$$

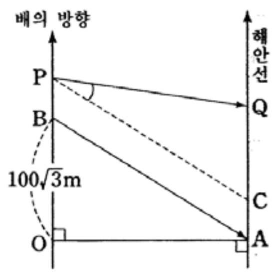
$$\therefore 60a=60\times\frac{1}{2}=30$$

43. **정답** ④

서치라이트가 회전하는 각속도는 $\frac{\pi}{6}$(rad/초)

지점 O에서 지점 B까지 가는 데 10초 걸렸으므로

$$\angle ABO=10\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$$



그림에서 $\overline{PC}$ // $\overline{BA}$ 일 때, $\angle QPC=\frac{\pi}{6}t$

$$\overline{CP}=\overline{BA}=\frac{\overline{OB}}{\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{100\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$=200$$

$$\therefore\ \overline{CQ}=\frac{\overline{CP}}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}t\right)}\cdot\sin\frac{\pi}{6}t$$

$$=\frac{200}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}t\right)}\cdot\sin\frac{\pi}{6}t$$

$$\therefore\ \lim_{t\to0}\frac{\overline{AQ}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\overline{AC}+\overline{CQ}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{10\sqrt{3}t+\frac{200}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}t\right)}\cdot\sin\frac{\pi}{6}t}{t}\right\}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{10\sqrt{3}+\frac{200}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}t\right)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{6}t}{t}\right\}$$

$$=10\sqrt{3}+400\cdot\frac{\pi}{6}=10\sqrt{3}+\frac{200}{3}\pi$$

44. 50 수학 내적 문제 해결 능력 - 함수의 극한

점 $R\left(\frac{t}{2},\ 0\right)$ 을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선과 만나는 점 S 의 y 좌표는 $y=\cos t$ 이고, 점 T 의 y 좌표는 $\frac{\cos 2t+1}{2}$ 이므로

$$\overline{ST}=\frac{1}{2}|\cos 2t+1-2\cos t|$$

$$=\frac{1}{2}|2\cos^2 t-1+1-2\cos t|=|\cos t(\cos t-1)|$$

P → A 이면 $t\to0$ 이고, $\cos t>0$ 이므로

$\overline{ST}=\cos t(1-\cos t)$

$$\therefore\ \lim_{t\to0}\frac{\overline{ST}}{\overline{OQ}^2}=\lim_{t\to0}\frac{\cos t(1-\cos t)}{t^2}$$

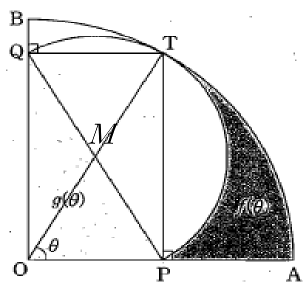
$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos t(1-\cos^2 t)}{t^2(1+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\cdot\lim_{t\to0}\frac{\cos t}{(1+\cos t)}$$

$$=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\alpha$$

$$\therefore\ 100\alpha=100\times\frac{1}{2}=50$$

45. 정답 50



점 T의 좌표를 $T(2\cos\theta, 2\sin\theta)$라 하고,직사각형 OPTQ에서 두 대각선 OT, PQ의 교점을 M이라 하자.

$f(\theta)=$(부채꼴OAT의 넓이)$-$(삼각형OPM의 넓이)
$-$(부채꼴MPT의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times2^2\times\theta-\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times1\times\sin\theta-\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta$$

$$=\theta-\cos\theta\sin\theta$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times2\sin\theta=2\cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore a=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta+f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{2\theta-\cos\theta\sin\theta}{2\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\theta}{\cos\theta\sin\theta}-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 100a=50$$

46. **정답** ④

[출제의도] 도형의 성질을 이용한 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

정$2n$다각형의 한 변의 길이는 $1-\cos\frac{\pi}{n}$이고, 정$2n$다각형의 중심에서 한 변까지의 길이를 l이라 하면

$\tan\frac{\pi}{2n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{l}$ 이므로, $l=\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2\tan\frac{\pi}{2n}}$ 이다.

따라서

$$S_n=2n\times\left\{\frac{1}{2}\times l\times\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right\}=\frac{n\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{2\tan\frac{\pi}{2n}}$$

$$=\frac{2n\times\sin^4\frac{\pi}{2n}}{\tan\frac{\pi}{2n}}$$ 이다.

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}n^2S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3\times\sin^4\frac{\pi}{2n}}{\tan\frac{\pi}{2n}}$$

$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin^4\pi x}{x^3\times\tan\pi x}$ ($\frac{1}{2n}=x$치환)

$=\frac{1}{4}\times\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)\times\lim_{x\to0}\frac{\sin\pi x}{\tan\pi x}$

$=\frac{1}{4}\times\pi^3\times1=\frac{1}{4}\pi^3$

47. 정답 ③

$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$이고 $g(x)=\begin{cases}1 & |f(x)|>1\\ \frac{1}{2} & |f(x)|=1\\ 0 & |f(x)|<1\end{cases}$ 이므로

$f(x)=1$, $f(x)=-1$인 x에 대해서만 연속성을 조사하면 된다.

$f(x)=1$에서 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$이므로 $x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

$f(x)=-1$에서 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$이므로 $x=\frac{7}{6}\pi$

이 세 위치에서 함수 $g(x)$의 좌우극한값과, 함숫값을 차례로 비교해보면 모두 불연속임을 알 수 있다.

정답 및 풀이

1. 정답 106

$\dfrac{f(k+1)-f(k)}{f(k+1)-k}=3k^2+2k+1$

$\therefore\ f(k+1)-f(k)=3k^2+2k+1$

구간 $[1, 10]$에서 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(10)-f(1)}{10-1}$

$=\dfrac{\{f(10)-f(9)\}+\{f(9)-f(8)\}+\cdots+\{f(2)-f(1)\}}{9}$

$=\dfrac{(3\cdot 9^2+2\cdot 9+1)+(3\cdot 8^2+2\cdot 8+1)+\cdots+(3\cdot 1^2+2\cdot 1+1)}{9}$

$=\dfrac{1}{9}\left(3\cdot\dfrac{9\cdot 10\cdot 19}{6}+2\cdot\dfrac{9\cdot 10}{2}+9\right)=106$

2. 답 ⑤ 다항함수의 미분법

함수 $f(x)=x^2+2x+3$의 $x=a_n$에서 $x=a_{n+1}$까지의 평균변화율은

$\dfrac{f(a_{n+1})-f(a_n)}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{a_{n+1}^2+2a_{n+1}+3-a_n^2-2a_n-3}{a_{n+1}-a_n}$

$=a_{n+1}+a_n+2 \quad \cdots$ ㉠

함수 $f(x)$의 $x=a_{n+2}$에서의 미분계수는

$f'(x)=2x+2$이므로 $f'(a_{n+2})=2a_{n+2}+2 \ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서

$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

$a_1=1,\ a_2=4$이므로 $a_{n+1}-a_n=3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=1+\frac{3\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1+\frac{1}{2}}$

$=1+2\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1+2=3$

3. 정답 130

$f'(x)=8x+3$ 이므로

$f'(a_n)=\dfrac{4(3n+2)^2+3(3n+2)-\{4(n+2)^2+3(n+2)\}}{(3n+2)-(n+2)}$

$8a_n+3=16n+19$

$\therefore\ a_n=2n+2$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+2\cdot 10=130$

4. 답 48

$f'(x)=3(x-3)^2$ 이므로

$f'(-1)=3(-4)^2=48$ 이다.

5. ⑤

$f'(x)=(3x^2-4)(x-2)+(x^3-4x+3) \qquad \therefore f'(2)=3$

6. 답 21

$f(1)=f(2)$에서 $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)+c$로 놓을 수 있다.

$f(4)=6(4a+b)+c,\ f(5)=12(5a+b)+c$에서 $b=-6a$

$\therefore\ f(x)=a(x-1)(x-2)(x-6)+c$

$x=1,\ x=4$를 대입하면 $c=5,\ a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-6)+5$

$f'(x)=\dfrac{1}{3}\{(x-2)(x-6)+(x-1)(x-6)+(x-1)(x-2)\}$

$f'(3)=\dfrac{1}{3}\{1\cdot(-3)+2\cdot(-3)+2\cdot 1\}=-\dfrac{7}{3}$

$\therefore\ |9f'(3)|=21$

7. 정답 ④

$(x^2+1)f(x)=x^3+2x+1$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)=4 \quad \therefore\ f(1)=2\ \cdots$ ㉠

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=3x^2+2$

$x=1$을 대입하면 $2f(1)+2f'(1)=5$

㉠에 의해 $2\cdot 2+2f'(1)=5$

$\therefore\ f'(1)=\dfrac{1}{2}$

8. 답 ④

조건에 의해 $f(0)=0,\ f(f(0))=f(0)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(f(x))}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(f(x))-f(f(0))}{f(x)}\times\frac{f(x)-f(0)}{x}\right\}$

$f(x)=t$라 하면 f는 미분가능하고, $f'(0)=2$이므로

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)\times f'(0)=2\times 2=4$

9. 정답 25

[출제의도] 함수의 극한의 정의를 이용하여 주어진 함수의 계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)}{h}=5$에서 $f(0)=0$이고, $2f'(0)=5$이므로 $b=0,\ a=\dfrac{5}{2}$ 이다.

10. 정답 ⑤

$x\neq b$ 이면 미분가능하므로 $x=b$ 에서 미분가능하도록 상수 $a,\ b$ 의 값을 정하면 된다.

먼저 $x=b$ 에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to b}f(x)=f(b)$

$\displaystyle\lim_{x\to b+0}f(x)=ab+1,\ \lim_{x\to b-0}f(x)=-b^2,\ f(b)=-b^2$ 이므로

$ab+1=-b^2$ …… ㉠
한편, $x>b$ 이면 $f'(x)=a$, $x<b$ 이면 $f'(x)=-2x$ 이므로
$a=-2b$…… ㉡
㉠, ㉡ 에서 $b=1$ ($\because b>0$), $a=-2$
$\therefore\ a+b=-2+1=-1$

11. 정답 36
[출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성의 개념 이해하기
$f(x)$가 $x=3$ 에서 연속이므로, $-\frac{1}{2}(3-a)^2+b=9$ ⋯ ①
또한 $f'(x)=\begin{cases}2x & (x\leqq 3)\\ -x+a & (x>3)\end{cases}$
$f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하므로 $a=9$ ⋯ ②
①, ② 에 의하여 $a=9$, $b=27$ $\therefore\ a+b=36$

12. 정답 44
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$
$f'(x)=(3x^2+1)(x^2+3)+(x^3+x+1)2x$
$f'(1)=4\cdot 4+3\cdot 2=22$
$\therefore\ 2f'(1)=44$

13. 정답 4 이해능력 – 다항함수의 미분법
$x-1=t$ 라 두면 $x\to 1$일 때, $t\to 0$이므로
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)+g(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}\left\{\frac{f(x-1)+g(x)}{x-1}\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+2}\left\{\frac{f(t)}{t}+\frac{g(1+t)-g(1)}{t}\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+2}\left\{\frac{f(t)}{t}+\frac{g(1+t)-g(1)}{t}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}+g'(1)\right\}=\frac{1}{2}(6+2)=4$$

14. 정답 25
$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}}{\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f(1)+f(1)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}}{\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$
$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f(1)}{\frac{3}{n}}+2\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$$
$=3f'(1)+2f'(1)=5f'(1)=25$
($\because$ $f'(x)=8x^3-3$에서 $f'(1)=5$)

15. **답** 9 다항함수의 미분법
$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-19)+\cdots+x(x-1)\cdots(x-18)$
에서
$f'(18)=18\cdot 17\cdot 16\cdot\ \cdots\ \cdot 1\cdot(-1)$
$f'(2)=2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot\ \cdots\ \cdot(-17)$
$\therefore\frac{f'(18)}{f'(2)}=\frac{18}{2}=9$

16. 정답 36
$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=7$에서 $x\to 1$일 때,
(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
$\therefore\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$ $\therefore f(1)=2$
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=7$$
또, $y=(x+1)^2f(x)$에서
$y'=2(x+1)f(x)+(x+1)^2f'(x)$이므로 $x=1$에서의 미분계수는
$y'_{x=1}2\cdot 2\cdot f(1)+2^2\cdot f'(1)=8+28=36$

17. 답 30
$f'(2)=a$ (a는 상수)로 놓으면
$f(x)=x^3+2ax^2+2x+2$이므로
$f'(x)=3x^2+4ax+2$
따라서, $a=f'(2)=12+8a+2$ 에서
$a=-2$
따라서, $f'(x)=3x^2-8x+2$이므로
$f'(-2)=12+16+2=30$

18. 정답 21
$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x^3-1}=4$ 에서
(분모) $\to 0$이면 (분자) $\to 0$이므로 $f(1)=3$
또, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}f'(1)=4$에서
$f'(1)=12$
$\therefore g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$
$\therefore\ g'(1)=3f(1)+1\cdot f'(1)=3\cdot 3+12=21$

19. 정답 ②

$\log\{(x+1)f(x)\}=\log(x+4)+\log(x^3+1)$

$=\log(x+4)(x^3+1)$

$(x+1)f(x)=(x+4)(x^3+1)$

$f(x)=(x+4)(x^2-x+1)$

$f'(x)=(x^2-x+1)+(x+4)(2x-1)$

$\therefore f'(2)=(4-2+1)+(2+4)(4-1)=21$

20. 정답 12

$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{a\{f(x)-f(a)\}-(x-a)f(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{a\{f(x)-f(a)\}}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)}{x-a}$

$=af'(a)-f(a)=a^2$ …… ㉠

$f(x)=px^2+qx+r$로 놓으면 ㉠으로부터

$a(2pa+q)-(pa^2+qa+r)=a^2$

$pa^2-r=a^2$이 모든 실수 a에 대하여 성립해야 하므로

$p=1,\ r=0$

$\therefore\ f(x)=x^2+qx$

$f(1)=a+q=5$로부터 $q=4$

$\therefore\ f(x)=x^2+4x$

$\therefore\ f(2)=2^2+4\cdot2=12$

21. 정답 12

$\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-3}{h}=2$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to0}f(5+h)-3=0$에서 $f(5)=3$

$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=f'(5)=2$

이 때, $y=f(x)\cdot f(x)$에서

$y'=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)=2f(x)f'(x)$

따라서 $x=5$에서 접선의 기울기는

$2f(5)f'(5)=2\times3\times2=12$

22. 정답 ④

[출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 미분계수 계산하기

$f(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{10}}{10}$ 이므로

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9$ 이다.

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^9}=\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{2^{10}-1}{2^9}=\frac{1023}{512}$

$\therefore\ q-p=1023-512=511$

23. 정답 ④

주어진 식에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)+f(0)f(0)=f(0)+f(0)$

$f(0)\{f(0)-1\}=0$

$\therefore f(0)=0$ ($\because\ f(0)\neq1$)

이때, $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$이므로

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)-f(x)f(h)\}-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(x)f(h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)\{1-f(x)\}}{h}$

$=1-f(x)$

24. 정답 19

다항함수 $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c$라 하면

㈎ $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=4$이므로 분자와 분모의 차수가 같아야 극한값이 존재하므로

(분모) : $ax^{n+3}+bx^{n+2}+\cdots$

(분자) : $(a^2x^{2n}+\cdots)-(ax^{2n}+\cdots)$ 이다.

따라서, 분모의 최고차수와 분자의 최고차수가 같아야 하므로

$2n=n+3$이므로 $n=3$

그리고 최고차수의 계수를 비교하면 $\frac{a^2-a}{a}=4$이므로

$\therefore a=5$

그러므로 $f(x)=5x^3+bx^2+cx+d$라고 할 수 있고,

$f'(x)=15x^2+2bx+c$

㈏ $\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=4$에 $f'(x)$를 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{15x^2+2bx+c}{x}=4$이고

분자의 $x\to0$이므로 $x\to0$일 때 분모의 $15x^2+2bx+c=0$이여야 하므로 $c=0$이다.

그러므로 $\lim_{x\to0}\frac{15x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(15x+2b)}{x}=2b=4$

$\therefore b=2$

$f'(x)=15x^2+4x$이므로

$f'(1)=15+4=19$

25. 정답 16

함수 $f(x)=\begin{cases}x^2(x-2) & (x\le2)\\ 2x^2+ax+b & (x>2)\end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능하면 실

수 전체에서 미분가능하다.

$x=2$에서 $f(x)$가 연속이어야 하므로

$0=2\cdot 2^2+a\cdot 2+b$

$\therefore\ 2a+b=-8$ …… ㉠

또, 두 함수 $y=x^2(x-2)$, $y=2x^2+ax+b$에서

$y'=2x(x-2)+x^2=3x^2-4x$, $y'=4x+a$이고 $x=2$에서의 미분계수가 존재해야 하므로

$3\cdot 2^2-4\cdot 2=4\cdot 2+a$

$\therefore\ a=-4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=0$

$\therefore\ f(4)=2\cdot 4^2-4\cdot 4=16$

26. 정답 17

$g(x)=\begin{cases}2a-f(x) & (x<b) & \cdots\cdots ㉠\\ a+f(x) & (x\ge b) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

$y=g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하려면 먼저 모든 실수 x에 대하여 연속이어야 하므로

$2a-f(b)=a+f(b)\ \ \therefore\ f(b)=\dfrac{a}{2}$ …… ㉢

㉠의 $x=b$에서의 미분계수 $-f'(b)$와

㉡의 $x=b$에서의 미분계수 $f'(b)$가 같아야 하므로

$-f'(b)=f'(b)$ $\therefore\ f'(b)=0$ ……㉣

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$이므로

㉣으로부터 $b=1\,(b\neq 0)$

㉢으로부터 $f(1)=8=\dfrac{a}{2}$ $\therefore\ a=16$

$\therefore\ a+b=16+1=17$

27. 답 ① 추론 능력(추측) - 다항함수의 미분법

ㄱ. (참) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

따라서, $g(a)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$이므로 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. (거짓) $f(x)=x$라 하면, $f'(x)=1>0$이지만

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\dfrac{x-a}{x-a}=1 & (x\neq a)\\ f'(a)=1 & (x=a)\end{cases}$

$\therefore g(x)=1$

따라서, $g(x)$는 구간 $(-\infty,\infty)$에서 증가하지 않는다.

ㄷ. (거짓) $f(x)=\begin{cases}x^3+x & (x\ge 0)\\ -x^2+x & (x<0)\end{cases}$라 하면

$f'(x)>0$

$a=0$이라 하면

(i) $x<0$일 때

$g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\dfrac{-x^2+x}{x}=-x+1$

(ii) $x=0$일 때

$g(0)=f'(0)=1$

(iii) $x>0$일 때

$g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\dfrac{x^3+x}{x}=x^2+1$

$\therefore g(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\ge 0)\\ -x+1 & (x<0)\end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases}2x & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$

따라서, $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

28. 정답 2

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하자.

임의의 양수 k에 대하여 $|f(x)|=k$의 모든 실근의 합이 0이어야 하므로 $f(x)=k$가 오직 하나의 실근을 가질 때, 그 근을 α라 하면 $x=-\alpha$는 $-f(x)=k$의 근이다.

$k=\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=-(-\alpha^3+a\alpha^2-b\alpha+c)$이므로

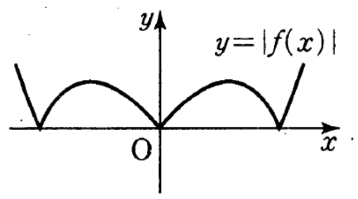
$a\alpha^2+c=0$

α^2이 충분히 큰 임의의 실수인 경우에도 이 식은 성립해야 하므로

$a=c=0$이다.

따라서, $f(x)=x^3+bx$는 원점에 대하여 대칭인 삼차함수이다.

$y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



직선 $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}$은 $y=-f(x)$의 그래프에 접하므로(그림참조)

직선 $y=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}$은 $y=f(x)$의 그래프에 접한다.

접점을 $(t,\ f(t))$라 하면 $f'(t)=3t^2+b$이므로 접선의 식은

$y-t^3-bt=(3t^2+b)(x-t)$

$y=(3t^2+b)x-2t^3$

$3t^2+b=-\dfrac{1}{4},\ -2t^3=-\dfrac{1}{4}$

$t=\dfrac{1}{2},\ b=-1$

$f(x)=x^3-x$

$f(|x|)=0$의 해는 $x=-1$또는 $x=0$또는 $x=1$

$\therefore\ |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=2$

29. 정답 ③

ㄱ. $f'(1)$이 존재하므로 함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하고, $x=1$에서 연속이다.

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$ $\therefore$ 참

ㄴ. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+=\lim_{h\to 0l}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

따라서 극한값이 존재한다. $\therefore$참

ㄷ. [반례] $f(x)=|x-1|$이면

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{h}=0$이지만

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$는 존재하지 않는다. $\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ 이다.

30. 정답 ③

[출제의도] 두 함수의 그래프를 이용하여 합성함수의 극한값 추론하기

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & (x\ge 0)\\ -\frac{1}{2}x^2 & (x<0)\end{cases}$ 이므로

ㄱ. $\lim_{x\to +0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{1}{2}x=0$

$\lim_{x\to -0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=\lim_{x\to -0}\left(-\frac{1}{2}x\right)=0$

$\therefore$ 참

ㄴ. $\lim_{x\to\sqrt{2}+0}g(f(x))=\lim_{t\to 1+0}g(t)=2$ 이고

$\lim_{x\to\sqrt{2}-0}g(f(x))=\lim_{t\to 1-0}g(t)=1$ 이므로

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $\lim_{x\to 1+0}g(g(x))=\lim_{t\to 2-0}g(t)=1$

$\lim_{x\to 1-0}g(g(x))=1$

$\lim_{x\to 1}g(g(x))=1$ 이고 $g(g(1))=1$ 이므로

$x=1$ 에서 연속이다. $\therefore$ 참

31. 정답 ②

사차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$에 대하여 조건 ㈎, ㈏에서 $f(2)=0,\ f'(2)=0$이므로

$f(x)=(x-2)^2(x+2)(x+k)$ (단, k는 상수)

로 놓을 수 있다.

$\therefore\ f'(x)=(x-2)\{4x^2+(3k+2)x+2k-4\}$

또, 조건 ㈎에서 $f'(-1)=0$이므로

$-3(4-3k-2+2k-4)=0$

$\therefore\ k=-2$

$\therefore\ f(x)=(x-2)^2(x+2)$

따라서 $f(4)=2^3\times 6=48$

32. 답 ⑤

$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$\therefore\ f'(\sqrt{2})=\frac{-2+1}{(2+1)^2}=-\frac{1}{9}$

33. 답 ③

ㄱ. (참) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-1}{x}=\ln 2$

ㄴ. (참) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

ㄷ. (거짓) $\lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))-\ln 2}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2^x+1)-\ln 2}{x}$

$h(x)=\ln(2^x+1)$이라 하면 $h(0)=\ln 2$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2^x+1)-\ln 2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$

이때, $h'(x)=\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}$이므로 $h'(0)=\frac{\ln 2}{2}$

34. 정답 ①

ㄱ. (참) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\times 2=2$

ㄴ. (거짓) $g(x)=e^{3x}$에서 $g'(x)=3e^{3x}$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{x}=\lim_{x\to 0}3\times\frac{e^{3x}-1}{3x}\times 3=9$

ㄷ. (거짓) $f(x)=\sin 2x$에서 $f'(x)=2\cos 2x$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-2\sin^2 x)-2}{x^2}$ ($\because\ \cos 2x=1-2\sin^2 x$)

$=-4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=-4$

35. 답 ⑤

$f(x)=e^x+e^{-x}$ 에서 $f'(x)=e^x-e^{-x}$ 이므로

$f'(a)=e^a-e^{-a}=\frac{15}{4}$

$4e^{2a}-15e^a-4=0,\ (e^a-4)(4e^a+1)=0$

$\therefore\ e^a=4$ ($\because\ e^a>0$)

$\therefore\ f(a)=e^a+e^{-a}=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

36. 정답 ② 이해력 – 미분법

ㄱ. (참) $x=t-\frac{1}{t}$에서 양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=1-\frac{0\cdot t-1\cdot 1}{t^2}=1+\frac{1}{t^2}$

ㄴ. (참) $y=t+\frac{1}{t}$에서 $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{t^2+1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

ㄷ. (거짓) $\frac{dy}{dx}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{2t\cdot(t^2+1)-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{1}{\frac{t^2+1}{t^2}}$$

$$=\frac{4t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{t^2}{t^2+1}=\frac{4t^3}{(t^2+1)^3}$$

37. 정답: ④

$f(x)$가 $x=0$에서 극값e를 가지므로

$f(0)=e,\ f'(0)=0$

또, $g(x)=f(x)e^x$에서 $g(0)=f(0)e^0=e$

$g'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x$이므로 $g'(0)=e$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{g(2h)-e}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(2h)-g(0)}{2h}\cdot 2$$

$$=2g'(0)=2e$$

38. 정답 ⑤

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x(2-x)e^{-x}=0$

$x(2-x)=0\ (\because e^{-x}>0)$

$\therefore x=0$또는 $x=2$

이때, $f(0)=0, f(2)=4e^{-2}$이므로 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘

따라서, 함수$f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $4e^{-2}$을 가지므로

$a=2,\ b=4e^{-2}$

$\therefore ab=2\cdot 4e^{-2}=\frac{8}{e^2}$

39. 답 ③

ㄱ. $y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3\sin x}{4\cos x}=\frac{3}{4}\tan x$

따라서 함수 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$의 주기는 π이다. (참)

ㄴ. $y=f(x)+g(x)=3\sin x+4\cos x$

$=5\sin(x+\alpha)\ \left(단,\ \sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\right)$

이때, $-5\le 5\sin(x+\alpha)\le 5$이므로

$-5\le f(x)+g(x)\le 5$

따라서 함수 $y=f(x)+g(x)$의 최댓값은 5이다. (참)

ㄷ. $y=f(x)g(x)=(3\sin x)(4\cos x)$

$=6(2\sin x\cos x)=6\sin 2x$

이때, $-6\le 6\sin 2x\le 6$이므로

$-6\le f(x)g(x)\le 6$

따라서 함수 $y=f(x)g(x)$의 최솟값은 -6이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

40. ④

ㄱ. $f(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$=f'(0)=g(0)$ (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=x^2$이면 $g(x)=\begin{cases} x & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

이므로 $g(x)=x$이고 $g'(0)=1$이다. (거짓)

ㄷ. $x\neq 0$일 때

$$g'(x)=\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

이때, $h(x)=xf'(x)-f(x)$라 하면

$h'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)$

$h'(x)=0$에서 $x=0\ (\because f''(x)>0)$

$x>0$일 때 $h'(x)>0$, $x<0$일 때 $h'(x)<0$이므로 $h(x)$는 $x=0$에 서 극소이자 최소이고 최솟값 $y(0)=0$을 갖는다.

따라서 $x\neq 0$인 모든 x에 대하여 $h(x)>0$이므로 $g'(x)>0$ (참)

41. ④ 이해 능력 – 미분법

$f(x)=a\sin 2x+b\cos 3x$의 양변을 미분하면

$f'(x)=2a\cos 2x-3b\sin 3x$

$f''(x)=-4a\sin 2x-9b\cos 3x$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2a\cos\frac{\pi}{2}-3b\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}b=-6$$

$\therefore\ b=2\sqrt{2}$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4a\sin\frac{\pi}{2}-9b\cos\frac{3\pi}{4}=-4a+18=-6$$

$\therefore\ a=6$

$\therefore\ f(x)=6\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 3x$

$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=6\sin\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}\cos\frac{3}{4}\pi=6-2=4$$

1. 정답 ①

[출제의도] 함수가 증가하기 위한 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(1) $x\ge 2a$일 때, $f'(x)=3x^2+12x+15>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

(2) $x\le 2a$일 때, $f'(x)=3(x+5)(x-1)$이므로 함수 $f(x)$가 증

가하려면 $2a \le -5$, $a \le -\frac{5}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$이다.

2. 정답 15

$y' = 3x^2 + 2x - 3$

$x = -2$일 때 $y' = 12 - 4 - 3 = 5$

점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 5이므로

$y - 0 = 5(x+2)$ $\therefore\ y = 5x + 10$

$\therefore\ a + b = 15$

3. 정답 16

$y = x^3 + 3x^2 + 4x$ 에서 $y' = 3x^2 + 6x + 4$ 이므로

$3x^2 + 6x + 4 = 4,\ 3x(x+2) = 0$

$\therefore\ x = 0$ 또는 $x = -2$

$x = 0$ 이면 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 $a = -2$, $b = -4$ 이다.

$\therefore\ 2ab = 16$

4. 정답 13

$f'(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + a$ 이므로

점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$y - \{t^3 - (a+2)t^2 + at\}$

$= \{3t^2 - 2(a+2)t + a\}(x - t)$

$x = 0$ 일 때 $y = g(t)$ 이므로

$g(t) - \{t^3 - (a+2)t^2 + at\} = \{3t^2 - 2(a+2)t + a\}(-t)$

$\therefore\ g(t) = -2t^3 + (a+2)t^2$

$g'(t) = -6t^2 + 2(a+2)t$ 이므로

이차함수 $g'(t)$ 가

$0 < t < 5$ 에서 $g'(t) > 0$ 이려면

$g'(0) \ge 0$, $g'(5) \ge 0$ 이어야 한다.

$g'(0) = 0$ 이고,

$g'(5) = -150 + 10(a+2) \ge 0$ 이므로 $a \ge 13$

따라서, 구하는 a 의 최솟값은 13 이다.

5. 정답 ④

주어진 그래프는 점 $(a, 0)$에서 x축에 접하고, 점 $(0, 1)$을 지나므로 $f(x) = \frac{1}{a^2}(x-a)^2$이다.

$F(x) = (x-a)f(x) = \frac{1}{a^2}(x-a)^2$

$\therefore\ F'(x) = \frac{3}{a^2}(x-a)^2$

따라서, 구하는 접선의 기울기는 $F'(-a) = 12$이다.

6. 답 45 이해력 - 다항함수의 미분법

$y = x^n$에서 $y' = nx^{n-1}$이고, 점 $(1, 1)$에서 그은 접선의 기울기는 n이므로 접선의 방정식은

$y - 1 = n(x-1)$

따라서, 위의 직선의 y절편은 $-n+1$이다.

$\therefore\ g(n) = -n+1$

$$\sum_{n=2}^{10}|g(n)| = \sum_{n=2}^{10}|-n+1| = \sum_{n=2}^{10}(n-1) = 45$$

7. 정답 12

$y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프는 $x = 4$인 점에서 접하고, $x = 10$인 점에서 만나므로 $y = f(x) - g(x)$의 그래프는 $x = 4$인 점에서 x축과 접하고, $x = 10$인 점에서 x축과 만난다. 따라서 $f(x) - g(x) = (x-4)^2(x-10)$으로 놓을 수 있다. 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) - g'(x) = 2(x-4)(x-10) + (x-4)^2$

$= (x-4)(3x-24)$

따라서 방정식 $f'(x) = g'(x)$의 두 실근은 $x = 4$또는 $x = 8$이므로 구하는 모든 실근의 합은 $4 + 8 = 12$이다.

8. 정답 22

$f(1) = 2 + a + b = c$ 이고 점 $(1,\ c)$ 는 $y = 2x - 5$

위의 점이므로

$c = -3,\ a + b = -5$ ……㉠

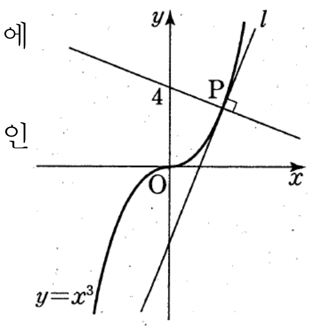
$f'(x) = 4x + a$ 에서 $f'(1) = 2$

$4 + a = 2$ $\therefore\ a = -2$

㉠에서 $b = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 22$

9. 답 ②



$y = x^3$에서 $y' = 3x^2$이므로 점 $P(a,\ a^3)$에서의 접선 l의 기울기는 $3a^2$이다.

따라서, 점 P를 지나고 접선 l에 수직인 직선의 방정식은

$y - a^3 = -\frac{1}{3a^2}(x-a)$

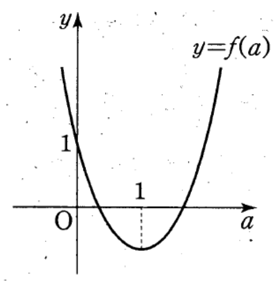
$\therefore y = -\frac{1}{3a^2}x + a^3 + \frac{1}{3a}$

이 직선이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4 = a^3 + \frac{1}{3a}$

$\therefore 3a^4 - 12a + 1 = 0$

이때, $f(a) = 3a^4 - 12a + 1$이라 하자.



$f'(a) = 12a^3 - 12 = 0$에서 $a = 1$

이때, 함수 $f(a)$는 $a = 1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(0) = 1 > 0$, $f(1) = 3 - 12 + 1 = -8 < 0$

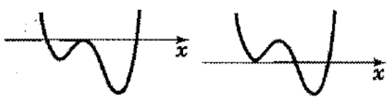
이고, 극댓값은 존재하지 않는다.

따라서, 방정식 $f(a) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

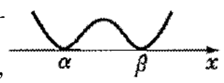
따라서, 점 P의 개수도 2이다.

10. 정답 ①

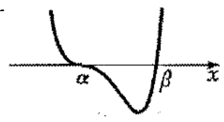
ㄱ. $n(A_f)=3$이면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다. 따라서 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다. (참)



ㄴ. (반례) $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $n(A_f)=2$이고 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극소이지만 $f(\alpha)f(\beta)=0$이다. (거짓)



ㄷ. (반례) $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $\alpha\in A_f$, $\beta\in A_f$, $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)\neq 0$이지만 $n(A_f)=2$이다. (거짓)



11. 정답 14

$f'(x)=2(x-1)(x-4)+(x-1)^2$

$=(x-1)\{2(x-4)+(x-1)\}$

$=(x-1)(3x-9)$

$=3(x-1)(x-3)$

따라서 $x=3$ 에서 극솟값 $f(3)=(3-1)^2(3-4)+a$ 를 가지는데 조건에서 극솟값이 10 이므로

$(3-1)^2(3-4)+a=10 \quad \therefore\ a=14$

12. 정답 ⑤

ㄱ. (참) $f(x)=x^3-kx^2-3x+k$를 k에 대하여 정리하면

$k(x^2-1)+\{f(x)-x^3+3x\}=0$

k의 값에 관계없이 성립하려면

$x^2-1=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때, $f(x)-x^3+3x=0$에서

$x=-1$이면 $f(-1)+1-3=0$

$\therefore f(-1)=2$

$x=1$이면 $f(1)-1+3=0$

$\therefore f(1)=-2$

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 k의 값에 관계없이 두 점 $(-1,2)$, $(1,-2)$를 지난다.

ㄴ. (참) $f'(x)=3x^2-2kx-3=0$

$\dfrac{D}{4}=k^2+9>0$

이므로 방정식 $f'(x)=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

그러므로 극댓값과 극솟값이 항상 존재한다.

ㄷ. (참) 삼차함수 $f(x)$의 삼차항의 계수가 1이고,

ㄱ에서 $y=f(x)$의 그래프가 k의 값에 관계없이

두 점 $(-1,2)$, $(1,-2)$를 지나므로

점 $(-1,2)$가 극댓점, 점 $(1,-2)$가 극솟점이 될 때,

$M-m$의 값이 최소가 된다.

그러므로 $M-m$의 최솟값은 $2-(-2)=4$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13. 정답 ①

$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$

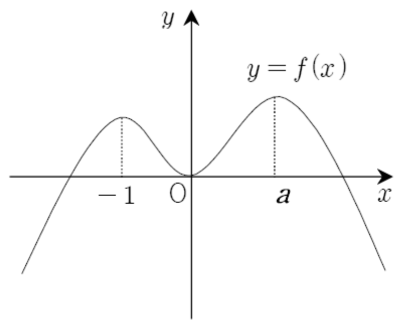
$=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}$

$=-12x(x+1)(x-a)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1,\ 0,\ a$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(-1)=2a+1$, $f(a)=a^4+2a^3$ 이고,

$f(a)-f(-1)=a^4+2a^3-2a-1=(a+1)^3(a-1)$

이므로

$0<a<1$ 이면 $f(a)<f(-1)$

$a\geq 1$ 이면 $f(a)\geq f(-1)$ 이다.

(i) $0<a<1$ 인 경우

$t<-1$ 이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq -1$ 이면

$g(t)=f(-1)=2a+1$

따라서,

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (t>-1)\end{cases}$$

이고, $\displaystyle\lim_{t\to -1-0}g'(t)=\lim_{t\to -1+0}g'(t)=0$

이므로 $g(t)$ 는 $t=-1$ 에서 미분가능하다.

그러므로 $0<a<1$ 일 때 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ii) $a\geq 1$ 인 경우

$f(-1)=f(\alpha)$ $(0<\alpha\leq a)$이라 하자.

$t<-1$ 이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$-1\leq t<\alpha$ 이면

$g(t)=f(-1)=2a+1$

$\alpha\leq t<a$ 이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq a$ 이면

$g(t)=f(a)=a^4+2a^3$

따라서,

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<\alpha)\\ -12t^3+12(a-1)t^2+12at & (\alpha<t<a)\\ 0 & (t>a)\end{cases}$$

$\lim_{t \to -1-0} g'(t) = \lim_{t \to -1+0} g'(t) = 0$ 이므로

$g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

$\lim_{t \to a-0} g'(t) = \lim_{t \to a+0} g'(t)$ 이어야 하므로

$-12a^3+12(a-1)a^2+12a^3=0$ 에서

$12(a-1)a^2=0 \quad \therefore \ a=1$

$a=1$ 이면 $f(x)=-3x^4+6x^2$ 이므로

$f(-1)=f(1) \quad \therefore \ \alpha=a=1$

$$\therefore \ g'(t)=\begin{cases} -12t^3+12t & (t<-1) \\ 0 & (-1<t<1) \\ -12t^3+12t & (t>1) \end{cases}$$

$g'(-1)=0$, $g'(1)=0$이므로

$a=1$일 때, $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅰ),(ⅱ)에서 함수 $g(t)$가 수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 a의 값의 범위는 $0<a \le 1$ 이므로

구하는 a의 최댓값은 1이다.

14. 정답 ①

ㄱ. (참) $n(B)=0$이면 $f'(x)>0$ 또는 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 증가함수이거나 감소함수이다. 따라서 $f(x)=0$은 단 하나의 실근을 가지므로 $n(A)=1$이다.

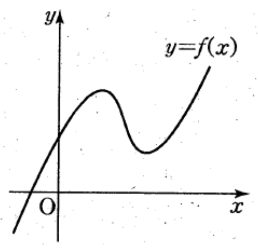
ㄴ. (거짓) [반례] $f(x)=x^3$이라 하면

$f'(x)=3x^2$이므로

$n(B)=1$이지만 $n(A)=1$이다.

ㄷ. (거짓) [반례] 그림과 같은 경우는

$n(B)=2$이지만 $n(A)=1$이다.



15. 정답 ②

$y=x^3$에서 $y'=3x^2$이므로 $y=x^3$ 위의 점 $(\alpha,\ \alpha^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha)$

$\therefore y=3\alpha^2x-2\alpha^3$

이 접선이 곡선 $y=x^3$과 만나는 점을 구하면

$x^3=3\alpha^2x-2\alpha^3$, $x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=0$

$(x-\alpha)^2(x+2\alpha)=0$

$\therefore \ x=-2\alpha$ 또는 $x=\alpha$

즉, 곡선 $y=x^3$과 $x=-2\alpha$에서 만나는 직선은 $x=\alpha$에서 곡선 $y=x^3$과 접한다.

마찬가지 방법으로 곡선 $y=x^3$과 $x=\alpha$에서 만나는 직선이 점 (k, k^3)에서 접한다고 하면 $k=\alpha$ 또는 $k=-\dfrac{\alpha}{2}$이므로 곡선 $y=x^3$과 $x=\alpha$에서 만나는 직선은 $x=-\dfrac{\alpha}{2}$에서 곡선 $y=x^3$과 접한다.

이때, 점 A$(4, 64)$를 지나는 직선은 점 $\mathrm{A}_1(-2, -8)$에서 접하므로 $x_1=-2$

따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 -2, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{-2}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}$$

16. 정답 20

주어진 그림에서 $f(x)=f(x+4)$이므로

$g(f(x))=g(f(x+4))$

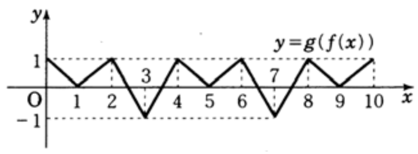
즉, 합성함수 $y=g(f(x))$ 도 주기함수이다.

$$f(x)=\begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 2-x & (1 \le x < 3) \\ x-4 & (3 \le x < 4) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x+1 & (-1 \le x < 0) \\ 1+x & (0 \le x < 1) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$g(f(x))=\begin{cases} 2f(x)+1 & (-1 \le f(x) < 0) \\ 1-f(x) & (0 \le f(x) < 1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1-x & (0 \le x < 1) \\ x-1 & (1 \le x < 2) \\ 5-2x & (2 \le x < 3) \\ 2x-7 & (3 \le x < 4) \end{cases}$$



따라서, $y=g(f(x))$ 의 그래프는 위의 그림과 같고 $x=2, 4, 6, 8$ 에서 극댓값을 가지므로 구하는 x의 값의 합은 $2+4+6+8=20$

17. 정답 7

순이익을 $h(x)$라 하면

(ⅰ) $0<x<8$일 때,

$h(x)=f(x)-g(x)=-x^3+9x^2+21x-50$

이므로 $h'(x)=-3x^2+18x+21$이다.

그러므로 $h'(x)=0$에서 $x=7$ ($\because \ x>0$)이다.

즉, $x=7$일 때, 최댓값 195를 갖는다.

(ⅱ) $x \ge 8$일 때,

$h(x)=f(x)-g(x)=-x+190$

이므로 $h(x) \le 182$이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 최대의 순이익을 내기 위한 총 생산량 x의 값은 7이다.

18. 정답 ②

$0<x<2$일 때,

$S(x)=\dfrac{1}{2}x(x^2-4x+5)=\dfrac{1}{2}(x^3-4x^2+5x)$이므로

$S'(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-8x+5)=\dfrac{1}{2}(x-1)(3x-5)$

$S'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}$

따라서 함수 $S(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=\dfrac{5}{3}$에서 극솟값을 가지므로

$\alpha=1,\ \beta=\dfrac{5}{3} \qquad \therefore \alpha-\beta=-\dfrac{2}{3}$

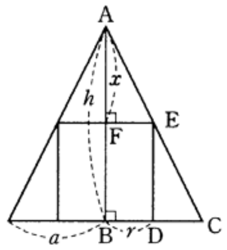
19. 정답 ④

그림과 같이 원기둥의 부피 V를 구하면

$V=\pi r^2(h-x)\cdots\cdots$ ㉠

$\triangle ABC \backsim \triangle AFE$이므로

$\frac{h}{a}=\frac{x}{r} \Leftrightarrow x=\frac{r}{a}h\cdots$ ㉡



㉠, ㉡에서

$V=\pi r^2\left(h-\frac{r}{a}h\right)=\pi h\left(r^2-\frac{r^3}{a}\right)$(단, $0<r<a$)

$\frac{dV}{dr}=\pi h\left(2r-\frac{3r^2}{a}\right)$

$\frac{dV}{dr}=0$에서 $r=\frac{2}{3}a$일 때, V는 극대이면서 최대이므로

$\frac{r}{a}=\frac{2}{3}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

20. 정답 48

삼각형 ABC의 넓이가 최소가 되기 위해서는 점 A에서 직선 $y=2x-6$까지의 거리가 최소가 되어야 하므로 점 A에서의 곡선에 대한 접선의 기울기가 2가 되어야 한다.

즉, $y=2x^3-4x$에서 $y'=6x^2-4$이므로

$6x^2-4=2$에서 $x^2=1$

이때, x는 양수이므로 $x=1$

따라서 삼각형 ABC의 넓이가 최소일 때의 점 A의 좌표는 A$(1, -2)$이고, 이 점에서 $y=2x-6$까지의 거리를 h라 하면

$h=\frac{|2+2-6|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

이므로 삼각형 ABC의 한 변의 길이 a는

$a=\frac{2}{\sqrt{3}}h=\frac{4}{\sqrt{15}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{16}{15}=\frac{4\sqrt{3}}{15}$

$\therefore 225S^2=225\times\frac{(4\sqrt{3})^2}{15^2}=48$

21. 정답 10

교점의 x좌표를 구하기 위해 두 식을 연립하면

$x^3+2x^2-8x+2=-x^2+x+2$

$x^3+3x^2-9x=0$

$x(x^2+3x-9)=0$이므로 교점 B의 x좌표는 0이고

교점 C의 x좌표를 α라 하자.

(사각형 BPCQ의 넓이)

=(삼각형 BPQ의 넓이)+(삼각형 CPQ의 넓이)

$=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot(k-0)+\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot(\alpha-k)=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\alpha$

이므로 $\overline{PQ}$가 최대일 때, 사각형 BPCQ의 넓이가 최대이다.

$\overline{PQ}=g(k)-f(k)=-k^3-3k^2+9k$

$h(k)=-k^3-3k^2+9k$라 하면

$h'(k)=-3k^2-6k+9=-3(k-1)(k+3)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

따라서 $h(k)$가 최대일 때의 양수 k의 값은 1이다.

$\therefore 10k=10$

22. 정답 ①

함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극값 k를 가지므로 $f(k)=k$, $f'(k)=0$이어야 한다.

$f(k)=k$에서 $k^4-k^3-k^2+k^2+a=k$

$k^4-k^3-k+a=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(k)=0$에서 $4k^3-3k^2+2k+k=0$

$k(k-1)(4k+1)=0$

$\therefore$ $k=-\frac{1}{4}$ 또는 $k=0$ 또는 $k=1$

이때, ㉠에서 $k=-\frac{1}{4}$ 이면 $a=\frac{69}{256}$,

$k=0$이면 $a=0$, $k=1$이면 $a=1$이다.

따라서 구하는 자연수 a의 값은 $k=1$ 일 때의 $a=1$이다.

23. 정답 ①

$f'(x)=0$에서

$6x^2-6(a+1)x+6a=0$, $6(x-a)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=a$ 또는 $x=1$

이때, $a\neq 1$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값

$f(1)=2-3a-3+6a=3a-1$을 갖고, $x=a$에서 극값

$f(a)=2a^3-3(a+1)a^2+6a^2=-a^3+3a^2$을 갖는다.

$\therefore$ $g(a)=\frac{-a^3+3a^2-3a+1}{a-1}=\frac{-(a-1)^3}{a-1}$

$=-(a-1)^2$

$\therefore g(0)=-1$

24. 정답 ④

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$이므로

$f'(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$

$=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca$

이때, 방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=\frac{2(a+b+c)}{3}=\frac{4}{3}$

$\therefore a+b+c=2$

25. 정답 ②

[출제의도] 함수가 미분가능할 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$f'(x)=k(x-1)(x+1)$이고 $f(-1)=3$, $f(1)=-1$

$\therefore f(x)=x^3-3x+1$, $f'(x)=3x^2-3$

$g'(x)=\begin{cases} 0 & (x<-1,\ x>1) \\ 3x^2-3 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$ 에서

ㄴ. $g'(x)\le 0$ (참)

ㄷ. $g'(x)\ge -3$이므로 $g'(x)$의 최솟값은 -3 (거짓)

26. 정답 ⑤

ㄱ. 참

$g(x)$는 다항함수 이므로 실수 전체에서 연속

$\therefore \lim_{x \to -0} g(x) = g(0)$

$\therefore f(0) = g(0)$ $(\because \lim_{x \to -0} g(x) = f(0))$

ㄴ. 참

$g(x), f(x)$는 다항함수 이므로 실수 전체에서 미분가능

$\lim_{x \to +0} f'(x) = \lim_{x \to -0} f'(x)$

$\lim_{x \to +0} g'(x) = \lim_{x \to -0} g'(x)$

그런데, $f'(0) = g'(0)$

따라서 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

ㄷ. 참

$g(x)$, $f(x)$는 다항함수이므로 $\lim_{x \to 0_+} f'(x) = f'(0)$

$\lim_{x \to -0} g'(x) = g'(0)$로 $x=0$ 좌우에서 접선의 기울기가 반대이고 연속이므로 극대 혹은 극소가 된다.

27. 정답 ⑤

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여$f'(x) = 3(x-1)^2 + 1 > 0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 $x_1 < x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) < f(x_2)$이다. (참)

ㄴ. $f'(1+x) = 3x^2 + 1$, $f'(1-x) = 3x^2 + 1$

$\therefore$ $f'(1+x) = f'(1-x)$ (참)

ㄷ. 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서의 접선이 서로 평행하므로$f'(a) = f'(b)$

$3(a-1)^2 + 1 = 3(b-1)^2 + 1$

$(a-1)^2 = (b-1)^2$

$\therefore$ $a-1 = \pm(b-1)$, $a = b$ 또는 $a = -b+2$

$\therefore$ $a = -b+2$ $(\because$ $a \neq b)$$f(a) + f(b)$

$= (1-b)^3 + 1 - b + (b-1)^3 + b - 1 = 0$ (참)

28. ② 이해능력–다항함수의 미분법

삼차함수 $y = f(x)$의 그래프는 x좌표가 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$인 서로 다른 세 점에서 x축과 만나므로

$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$

$f'(x) = (x-\alpha_2)(x-\alpha_3) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_3) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$

$= 3x^2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 \cdots$ ㉠

또한 $y = f(x)$는 $x = \beta_1$, $x = \beta_2$에서 극값을 가지므로

$f'(\beta_1) = f'(\beta_2) = 0$

$\therefore$ $f'(x) = 3(x-\beta_1)(x-\beta_2)$

$= 3x^2 - 3(\beta_1 + \beta_2)x + 3\beta_1\beta_2$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2)$이다.

29. 정답 **24**

$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고, $h'(x) = f'(x) - g'(x)$이다.

두 곡선 $y = f(x)$와 $y = g(x)$가 $x = 2$에서 접하므로 $h(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다.

그런데 $y = h(x)$는 $x = 2$에서 극값을 갖지 않아야 하므로 $h(x)$는 $(x-2)^3$을 인수로 가져야 한다.

즉, $h(x) = (x-2)^3(x+a)$ (단, a는 상수)로 놓을 수 있다.

$h'(x) = 3(x-2)^2(x+a) + (x-2)^3$

$h'(0) = 4$이므로 $12a - 8 = 4$, $a = 1$

$\therefore$ $h(x) = (x-2)^3(x+1)$

따라서, $h(0) = -8$이므로 $(-7) \times h(0) = 56$이다.

30. 정답 44 다항함수의 미분법

(ⅰ) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$가 성립하려면 $f(x) - g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + a - 6$에서 함수 $f(x) - g(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$f'(x) - g'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x = 2x(x+1)(2x+1) = 0$

에서 함수 $f(x) - g(x)$는 $x = 0$ 또는 $x = -1$에서 최솟값 $a-6$을 가지므로

$a - 6 \geq 0$, $a \geq 6$ $\qquad \therefore m = 6$

(ⅱ) 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) \geq g(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$의 최솟값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 크거나 같으면 된다.

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 10 = 2(x-1)(2x^2 + 5x + 5) = 0$

에서 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은 $a - 7$이다. $\cdots$ ㉠

한편, $g(x) = -(x+5)^2 + 31$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 31이다. $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a - 7 \geq 31$

$a \geq 38$ $\therefore n = 38$

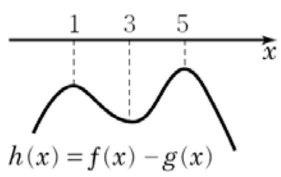
$\therefore m + n = 6 + 38 = 44$

31. 정답 ③

ㄱ. $1 < x < 3$에서 $f'(x) - g'(x) < 0$이므로 함수 $y = f(x) - g(x)$는 감소한다. (참)

ㄴ. $x = 1, 3, 5$에서 $f'(x) - g'(x) = 0$ 이고 $x = 1, 3, 5$의 좌우에서 $f'(x) - g'(x)$의 부호가 다르므로 함수 $y = f(x) - g(x)$는 3개의 극점을 갖는다. (참)

ㄷ. (반례) $h(x) = f(x) - g(x)$라 하면 사차방정식 $f(x) = g(x)$는 아래 그림과 같이 ㄴ에서 구한 3개의 극점에서의 y값이 모두 음수가 되면 단 하나의 실근도 갖지 않는다. (거짓)



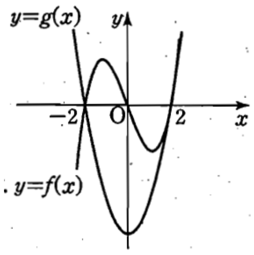
32. 정답 ② 추론 능력(추측) – 다항함수의 미분법

$x^3-4x=2x^2-8$에서

$x(x^2-4)-2(x^2-4)$

$=(x-2)^2(x+2)=0$

이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. (거짓) [반례]

$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ g(x) & (-2\le x<2) \\ g(x) & (x\ge 2)\end{cases}$이면 $h(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고 $x=-2$에서 극댓값 0을 가지므로 주어진 조건을 만족하지만 $h(0)=g(0)=-8$이다.

ㄴ. (참) $f'(x)=3x^2-4$, $g'(x)=4x$이므로

$f'(2)=g'(2)=8$

따라서, 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 항상 미분가능하다.

ㄷ. (거짓) 주어진 조건을 만족시키는 함수 $h(x)$는 다음의 6개다.

$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x) & (-2\le x<2) \\ f(x) & (x\ge 2)\end{cases}$

$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x) & (-2\le x<2) \\ g(x) & (x\ge 2)\end{cases}$

$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ g(x) & (-2\le x<2) \\ f(x) & (x\ge 2)\end{cases}$

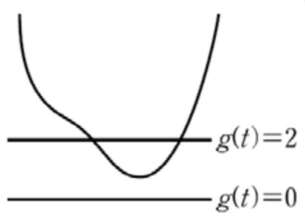
$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ g(x) & (-2\le x<2) \\ g(x) & (x\ge 2)\end{cases}$

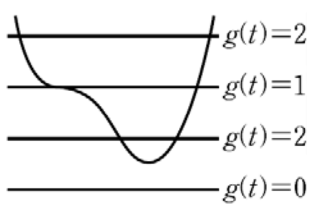
$h(x)=\begin{cases} g(x) & (x<-2) \\ f(x) & (-2\le x<2) \\ f(x) & (x\ge 2)\end{cases}$

$h(x)=\begin{cases} g(x) & (x<-2) \\ f(x) & (-2\le x<2) \\ g(x) & (x\ge 2)\end{cases}$

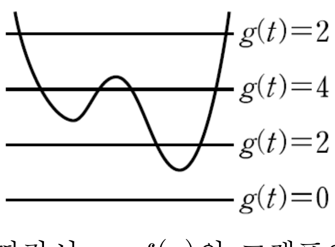
33. 정답 147

만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.





따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로 $k=3$

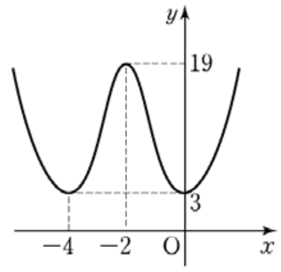
$f(x)=3$의 한 근이 0 이므로 $f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$

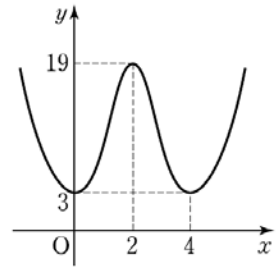
$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$에서

(극댓값)$=f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{16}+3=19$

$\therefore \alpha=\pm 4$

그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$

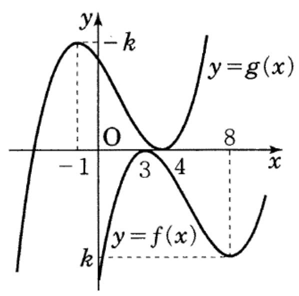




$f(x)=x^2(x-4)^2+3$, $f(-2)=4\times 36+3=147$

34. 정답 ⑤

ㄱ. (가)에서 $g(x)=f(x+4)-k$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것이다. 따라서 (다)에서 $f(x)$는 $x=8$에서 극값 k를 갖는다. 그리고 (나)에서 삼차항의 계수가 양수인 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값 0을 갖고 $x=8$에서 극솟값 k를 갖는다. 삼차함수의 극솟값은 극댓값보다 작으므로 $k<0$ (거짓)



ㄴ. ㄱ에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $-k$를 갖고, $x=4$에서 극솟값 0을 갖는다.

$f(x)$의 극솟값 k와 $g(x)$의 극솟값 $-k$의 합은 0이다. (참)

ㄷ. 위 그림에서 두 함수의 그래프는 서로 만나지 않는다. (참)

35. 정답 26

연립방정식 $\begin{cases} f(x)=(x+1)f'(x)+2 \\ f(x)=3x+5 \end{cases}$

의 실수해를 $x=\alpha$라 하면

$f(\alpha)=(\alpha+1)f'(\alpha)+2$, $f(\alpha)=3\alpha+5$

$\therefore \dfrac{f(\alpha)-2}{\alpha+1}=f'(\alpha)=3$ …… ㉠

$f'(x)=2x^3+1$이므로 $f'(\alpha)=3$에서

$2\alpha^3+1=3$ $\quad\therefore \alpha=1$

$f(\alpha)=\dfrac{1}{2}\alpha^4+\alpha+c$에 $\alpha=1$을 대입하면

$f(1)=\dfrac{3}{2}+c$

따라서 ㉠에서

$\dfrac{f(1)-2}{1+1}=3$, $\dfrac{\frac{3}{2}+c-2}{2}=3 \quad \therefore c=\dfrac{13}{2}$

$\therefore 4c=4\cdot\dfrac{13}{2}=26$

36. 정답 ⑤

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이 되려면 $f(x)=(x-\alpha)^2(ax^2+bx+c)$의 형태이어야 하므로

$f(x)$가 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다. (참)

ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면

(i) $f'(\alpha)=0$ 이고 $f'(\beta)\neq 0$일 때

$f(x)=(x-\alpha)^2(ax^2+bx+c)$

(ii) $f'(\alpha)\neq 0$ 이고 $f'(\beta)=0$일 때

$f(x)=(x-\beta)^2(ax^2+bx+c)$

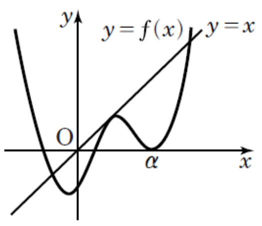
(iii) $f'(\alpha)=0$ 이고 $f'(\beta)=0$일 때 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$의 그래프를 그려보면 허근이 없다 (참)

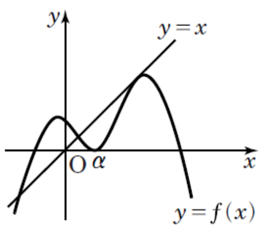
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 $f'(\alpha)$와 $f'(\beta)$의 부호가 같다.

사차식 $f(x)$의 두 해의 기울기의 부호가 같으려면 그래프를 그려보면 서로 다른 네 실근을 갖는다.

37. 정답 ③

세 조건을 모두 만족시키는 사차함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



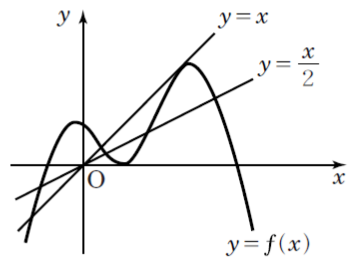


ㄱ. 위의 두 경우 모두 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축의 양의 부분과 접한다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 접점의 x좌표를 $x=\alpha$라 하면 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이 모두 성립하므로 방정식 $f(x)=0$과 $f'(x)=0$은 $x=\alpha$를 공통근으로 갖는다. (참)

ㄴ. 위의 그림에서 두 경우 모두 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표 중 한 개는 음수이고, 한 개는 양수이므로 방정식 $f(x)=2x$는 양의 실근 한 개와 음의 실근 한 개를 갖는다. 따라서 모든 실근의 곱은 0보다 작다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=\dfrac{x}{2}$의 음의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{x}{2}$의 교점 중에서 x좌표가 음수인 점의 x좌표이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같은 경우에는 방정식 $f(x)=\dfrac{x}{2}$의 음의 실근이 방정식 $f(x)=x$의 음의 실근보다 크다. (거짓)



38. 정답 ②

(가), (나)에서 $f(2)=f'(2)=0$, $g(4)=g'(4)=0$ 이므로 0이 아닌 상수 k, k'에 대하여

$f(x)=k(x-2)^2(x+a)$

$g(x)=k'(x-4)^2(x+b)$ 라 놓을 수 있다.

(다)에서 두 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$ 의 그래프는 서로 y축에 대하여 대칭이므로 $k=k'$ 이고, $f'(-x)=g'(x)$ 이므로

$f'(2)=g'(-2)=0$, $f'(-4)=g'(4)=0$

$$f'(x)=2k(x-2)(x+a)+k(x-2)^2 \\ =k(x-2)(3x+2a-2)$$

$$g'(x)=2k(x-4)(x+b)+k(x-4)^2 \\ =k(x-4)(3x+2b-4)$$

이므로

$f'(-4)=-6k(2a-14)=0 \quad \therefore a=7$

$g'(-2)=-6k(2b-10)=0 \quad \therefore b=5$

$\therefore f(x)=k(x-2)^2(x+7)$

$g(x)=k(x-4)^2(x+5)$

따라서 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{(x-2)^2(x+7)}{(x-4)^2(x+5)}\leqq 0$ 의 해는 양변에

$(x-4)^2(x+5)^2$ 을 곱하면

$(x-2)^2(x+7)(x+5)\leqq 0$, $x\neq -5, x\neq 4$

$\therefore -7\leqq x<-5$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 모든 정수 x 의 개수는 $-7, -6, 2$의 3 개다.

39. 정답 41 도함수의 활용

두 함수의 그래프의 한 교점 P의 x좌표를 t로 놓으면

$t^2-4t+2=-t^2+at+b$

$2t^2-4t-at=b-2 \ \cdots$㉠

두 함수의 점 P에서의 접선의 기울기의 곱이 -1이므로

$(2t-4)(-2t+a)=-1$

$-4t^2+8t+2at-4a=-1 \ \cdots$ ㉡

㉠$\times 2+$㉡을 하면

$-4a=2b-5 \qquad \therefore b=-2a+\dfrac{5}{2} \ (a>0,\ b>0)$

$\therefore 4(m^2+n^2)=4\left(4+\dfrac{25}{4}\right)=41$

참고) 곡선 $y=-x^2+ax+b$의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\dfrac{a}{2},\ b+\dfrac{a^2}{4}\right)$이므로 $a>0$, $b>0$이면 주어진 두 곡선은 항상 만난다.

40. ② 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 미분법

직선 $y=nx+1$과 곡선 $y=x^2$의 교점 P_n, Q_n의 x좌표를 각각 α_n, β_n라고 하면

$x^2=nx+1$, $x^2-nx-1=0$에서

$\alpha_n+\beta_n=n$, $\alpha_n\beta_n=-1$……㉠

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 두 점 $\mathrm{P}_n(\alpha_n,\ {\alpha_n}^2)$,

$\mathrm{Q}_n(\beta_n,\ {\beta_n}^2)$에서의 접선의 기울기는 각각 $2\alpha_n$, $2\beta_n$이다.

따라서 접선 l_n, m_n의 방정식은

l_n : $y-{\alpha_n}^2=2\alpha_n(x-\alpha_n)$, $y=2\alpha_n x-{\alpha_n}^2$ ……㉡

m_n : $y-{\beta_n}^2=2\beta_n(x-\beta_n)$, $y=2\beta_n x-{\beta_n}^2$ ……㉢

그러므로 두 직선 l_n, m_n의 교점의 x좌표는

㉡, ㉢에서 $2\alpha_n x-{\alpha_n}^2=2\beta_n x-{\beta_n}^2$

$(\alpha_n-\beta_n)\{2x-(\alpha_n+\beta_n)\}=0$

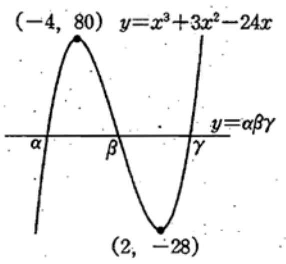
$\therefore\ x=\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2}$ $(\because\ \alpha_n\neq\beta_n)$

㉠에 의하여 $\alpha_n=\dfrac{n}{2}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{40}a_n=\sum_{n=1}^{40}\frac{n}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{40\cdot 41}{2}=410$

41. 정답 ⑤ 이해력–다항함수의 미분법

삼차다항식 $x^3+3x^2-24x=\alpha\beta\gamma$의 세 근 α,β,γ는 곡선 $y=x^3+3x^2-24x$와 직선 $y=\alpha\beta\gamma$의 세 교점의 x좌표와 같다.

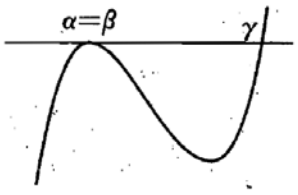


$y=x^3+3x^2-24x$일 때,

$y'=3x^2+6x-24=3(x-2)(x+4)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

따라서, 곡선 $y=x^3+3x^2-24x$와 직선 $y=\alpha\beta\gamma$의 위치관계는 그림과 같다.

α의 값이 최대일 때는 곡선 $y=x^3+3x^2-24x$와 직선 $y=\alpha\beta\gamma$가 $x=-4$에서 접할 때이다.



이때, $\alpha=\beta=-4$이고 $\alpha\beta\gamma=80$이므로

$\gamma=\dfrac{80}{16}=5$

42. 정답 8

$f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$

$f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)$

$=3\{x-(a-1)\}\{x-(a+1)\}=0$

$\therefore\ x=a-1$, $x=a+1$

$f(a-1)=(a-1)^3-3a(a-1)^2+3(a^2-1)(a-1)$

$=(a-1)^2\{(a-1)-3a+3(a+1)\}$

$=(a-1)^2(a+2)$

$f(a+1)=(a+1)^3-3a(a+1)^2+3(a^2-1)(a+1)$

$=(a+1)^2\{(a+1)-3a+3(a-1)\}$

$=(a+1)^2(a-2)$

$\therefore\ (f(a-1)-f(a+1)$

$=(a-1)^2(a+2)-(a+1)^2(a-2)=4$

$\therefore\ S(a)=\{(a+1)-(a-1)\}\times\{f(a-1)-f(a+1)\}$

$=2\times 4=8$

43. 정답 ②

ㄱ. $f(x)=x-4$에서 $x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$

조립제법을 써서 인수분해하면 $(x-1)^2(x-2)^2=0$

따라서, 두 그래프는 두 점$(1,-3)$, $(2,-2)$에서 만난다. ∴ 참

ㄴ. $g(x)=f(x)-x+4$라 하면 $y=g(x)$의 그래프는 $x=\dfrac{3}{2}$에 대칭이므로 $g(x)=g(3-x)$

$\therefore\ f(x)-x+4=f(3-x)-(3-x)+4$

$f(3-x)=f(x)+3-2x$ ∴ 참

ㄷ. ㄴ의 양변을 미분하면 $-f'(3-x)=f'(x)-2$

$f'(x)+f'(3-x)=2$

$f(x)-x-k=0$에서 $g(x)=f(x)-x+4$라 하면

$g(x)=4+k$의 네 근이 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$이고, 대칭성에 의해 $\alpha+\delta=3$, $\beta+\gamma=3$이다.

$\therefore\ f'(\alpha)+f'(\delta)=f'(\beta)+f'(\gamma)=2$ ∴ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

44. **답 ③** 도함수의 활용

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$일 때,

$f(|x|)=\begin{cases}ax^3+bx^2+cx+d & (x\geq 0)\\ -ax^3+bx^2-cx+d & (x<0)\end{cases}$이고

$f'(|x|)=\begin{cases}3ax^2+2bx+c & (x>0)\\ -3ax^2+2bx-c & (x<0)\end{cases}$이므로

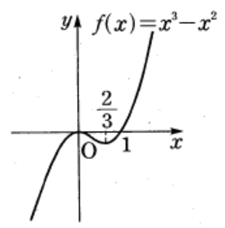
$x=0$에서 미분가능하려면 $c=0$이어야 한다. … ㉠

ㄱ, ㄴ. [반례] $f(x)=x^3-x^2$이면 ㉠에 의하여 함수 $y=f(|x|)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.

이때, $f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}$에서 $f'(x)=0$이므로 함수 $f(x)=x^3-x^2$의 증감표는 다음과 같고, 그래프는 아래와 같다.

x	…	0	…	$\frac{2}{3}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}$에서 극값이 존재하고, 그래프는 y축 위의 한 점에 대하여 대칭이 아니므로 ㄱ, ㄴ은 거짓이다.



ㄷ. ㉠에 의하여 $x<0$일 때 방정식 $f(x)=f(|x|)$는 $ax^3+bx^2+d=-ax^3+bx^2+d$이므로 $2ax^3=0$

이때, $a\neq 0$, $x<0$이므로 방정식 $f(x)=f(|x|)$는 음수인 실근을 갖지 않는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

45. 정답 ④

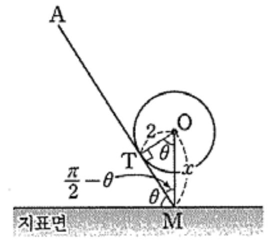
ㄱ. $g(x)=f(a)$

$f(a)+(b-a)f'(x)-f(a)=0$의 방정식이므로
$(b-a)f'(x)=0$
$b-a>0$이고 $f'(x)$는 서로 다른 두 실근을 가지므로
$g(x)=f(a)$는 실근을 갖는다.
ㄴ. $g(b)>f(a)$
$g(b)-f(a)$는 $f(a)+(b-a)f'(b)-f(a)=(b-a)f'(b)$이므로
$f'(b)$의 부호는 양, 음을 다 가질 수 있으므로
$g(b)>f(a)$임을 확신할 수 없다.
ㄷ. $g(a)>f(b)$
$g(a)-f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)-f(b)$이므로
$(b-a)\left\{f'(a)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\right\}$의 부호를 판단하자.
a에서의 접선의 기울기와 $a\sim b$사이의 평균변화율을 살펴보면 a에서의 접선의 기울기가 $a\sim b$사이의 평균변화율 보다 크므로 참이다.

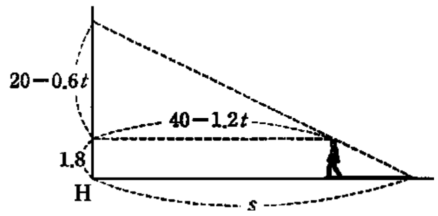
46. 정답 ⑤
[출제의도] 삼차함수의 성질을 이용하여 접선과의 교점의 x좌표 사이의 관계를 알 수 있는가를 묻는 문제이다.
삼차함수 $f(x)$는 원점대칭이므로 $f(x)=x^3+ax$, 접선은 $g(x)=bx+c$라 놓을 수 있다.
ㄱ. $f(x)-g(x)=x^3+(a-b)x-c$의 이차항의 계수가 0이므로 $f(x)-g(x)=0$의 세 근 p, q, r의 합은 0이다. 즉, $2p+q=0$이므로 $q=-2p$이다.(참)
ㄴ. $y=f(x)$는 원점대칭이므로 $\beta=-\alpha$이고, $p=\alpha$인 경우를 생각하면, ㄱ에 의해 $q=r=-2\alpha$이므로 $\alpha+2\gamma=3\beta$이다.(참)
ㄷ. $f(0)=0$이므로
$\displaystyle\lim_{p\to-0}\frac{f(p)}{p}=\lim_{p\to-0}\frac{f(p)-f(0)}{p}=f'(0)$이고,
$f'(x)=3x^2+a=3(x-\alpha)(x-\beta)$에서
$f'(0)=3\alpha\beta$이므로 $\displaystyle\lim_{p\to-0}\frac{f(p)}{p}=3\alpha\beta$이다.(참)

47. 정답 12
t초 후 두 동점 P, Q의 좌표는 각각 $P(t^2,\ 1)$, $Q(12(t-3),\ 2)$이므로 사다리꼴 $APQB$의 넓이 $S(t)=\dfrac{1}{2}\{t^2+12(t-3)\}$이다.
직사각형이 되는 순간은 $t^2=12(t-3)$, 즉 $t=6$일 때이므로 구하는 넓이의 순간 변화율은 $S'(6)$이다.
따라서, $S'(t)=t+6$이므로 $S'(6)=12$이다.

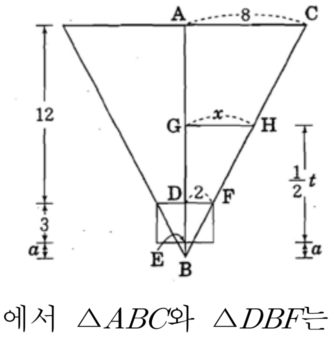
48. 답 ② 도함수의 활용
삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하면
$S=\dfrac{1}{2}(t+3)(t^2+1)\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(t^3+3t^2+t+3)$
$S=15\sqrt{3}$일 때, $t^3+3t^2+t-57=0$
$(t-3)(t^2+6t+19)=0 \quad \therefore t=3$
한편, $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(3t^2+6t+1)$
따라서 $t=3$일 때 삼각형 OPQ의 넓이의 변화율은
$\left[\dfrac{dS}{dt}\right]_{t=3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(27+18+1)=\dfrac{23\sqrt{3}}{2}$

49. 정답 ④


정사면체 ABCD에서 이면각의 크기를 θ로 놓으면 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$
공이 정사면체와 충돌하는 순간의 지면으로부터 공의 중심까지의 높이를 $x$cm로 놓으면 $\triangle$MOT 에서
$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{OT}}}{\overline{\mathrm{OM}}}=\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{3}$이므로 $x=6$
이때 공이 정사면체와 충돌하는 순간까지 걸린 시간을 t(초)라 하면
$96-45t^2=6 \quad \therefore t=\sqrt{2}\ (t>0)$
한편, $\dfrac{dh(t)}{dt}=-90t$ 이므로
$t=\sqrt{2}$일 때, 공의 높이의 변화율은
$\left[\dfrac{dh}{dt}\right]_{t=\sqrt{2}}=-90\sqrt{2}$ (cm/초)이다.

50. 정답 12


t초 후의 그림자 끝이 H지점에서 떨어진 거리를 s(m)라 하면 그림에서
$(20-0.6t):(40-1.2t)=(21.8-0.6t):s$
$\therefore s=43.6-1.2t$
즉, 그림자 끝이 움직이는 속력은 항상 1.2m/초이다.
$\therefore 10a=10\times1.2=12$

51. 정답 ⑤


그림에서 $\triangle ABC$와 $\triangle DBF$는 닮음이므로
$8:15+a=2:3+a \quad \therefore a=1$
물을 넣기 시작하여 $t(t>6)$초가 되는 순간의 수면의 반지름의 길이를 $x(cm)$라 하자.
수면의 높이의 증가율이 0.5(cm/초)이므로
t초 후의 수면의 높이 $(\overline{GE})$는 $\dfrac{1}{2}t$이고

$\triangle ABC$와 $\triangle GBH$는 닮음이므로 $8:16=x:\frac{1}{2}t+1$

$\therefore x=\frac{t+2}{4}$

물의 부피 V는

$V=12\pi+\frac{1}{3}(\pi x^2\cdot 2x-4\pi\cdot 4)$

$\frac{2\pi}{3}x^3+\frac{20\pi}{3}$

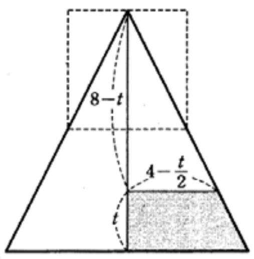
$\frac{2\pi}{3}\left(\frac{t+2}{4}\right)^3+\frac{20\pi}{3}$

$=\frac{\pi}{96}(t+2)^3+\frac{20\pi}{3}$

$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{32}(t+2)^2$이므로 $t=14$일 때, 물의 부피의 시간에 대한 변화율은 $\frac{\pi}{32}(14+2)^2=8\pi(\text{cm}^3/\text{초})$

52. 정답 16

유리컵의 원뿔대 부분을 연장하면 그림과 같이 생각할 수 있다. 수면의 높이가 매초 1cm씩 증가하므로, t초 후의 수면의 높이는 $t$cm이고, 수면의 반지름의 길이는 $4-\frac{t}{2}$cm이다.



t초 후의 물의 부피 V는

$V=\frac{\pi}{3}\cdot 4^2\cdot 8-\frac{\pi}{3}\cdot\left(4-\frac{t}{2}\right)^2(8-t)$

$=\pi\left(16t-2t^2+\frac{1}{12}t^3\right)$

$\frac{dV}{dt}=\pi\left(16-4t+\frac{1}{4}t^2\right)$

수면이 컵의 이음새를 지나는 순간 구하는 부피의 증가율은

$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=4}=\pi\left(16-4\cdot 4+\frac{1}{4}\cdot 4^2\right)=4\pi(\text{cm}^3/\text{초})$

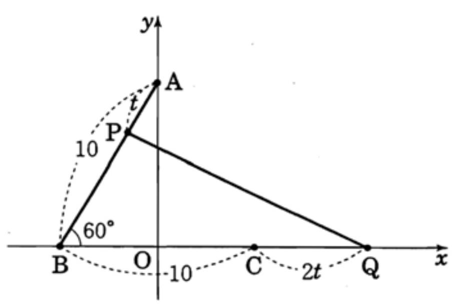
$\therefore k^2=4^2=16$

53. 정답 38

$\triangle$ABO는 $\angle O=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{\text{AB}}=\sqrt{5^2+(5\sqrt{3})^2}=10$이고 $\angle B=60^\circ$

t초 후 $\overline{\text{AP}}=t$이고 $\overline{\text{CQ}}=2t$이므로 $\triangle$PBQ에서 코사인법칙에 의해



$f(t)=\overline{\text{PQ}}^2=(10-t)^2+(10+2t)^2-2(10-t)(10+2t)\cos 60^\circ$

$=7t^2+10t+100$

$f'(t)=14t+10$ $\qquad\therefore f'(2)=28+10=38$

따라서 $t=2$인 순간의 $f(t)$의 시간(초)에 대한 변화율은 38이다.

54. 정답 ⑤

아이템을 사용하지 않았을 때의 속력을 $x(m/\text{초})$라 하면, 'S팩' 아이템 사용시 속도는 $x+2(m/\text{초})$, 아이템을 사용하지 않았을 때 걸리는 시간은 $\frac{1000}{x}(\text{초})$ $\quad\cdots$㉠

아이템을 사용했을 때의 속도가 증가하는 구간은 $30(x+2)(m)$이므로, 아이템을 사용했을 때 걸리는 시간은

$\frac{1000-30(x+2)}{x}+30(\text{초})$ $\quad\cdots$㉡

㉠,㉡에서 $\frac{30(x+2)}{x}-30=12$

$\frac{60}{x}=12,\ \therefore\ x=5$

따라서 아이템을 사용하지 않았을 때 기록은 $\frac{1000}{5}=200(\text{초})$이고, 아이템을 사용한 후 기록은 $200-12=188(\text{초})$ 즉 3분 8초이다.

55. 정답: 250

처음 150km구간에서의 평균속력을 $x$km/시라 하면

$\frac{150}{x}+\frac{300}{x-125}\le 3$

$\frac{-x^2+275x-6250}{x(x-125)}\le 0$

$x(x-125)(x-250)(x-25)\ge 0,\ x\ne 0,\ x\ne 125$

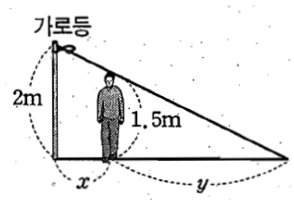
$\therefore x<0,\ 25\le x<125,\ x\ge 250$

$x>125$이므로 구하는 최솟값은 250km/시이다.

56. 정답 47

수학 외적 문제 해결 능력– 다항함수의 적분법

k초 후의 가로등과 학생 사이의 거리를 xm, 그림자의 길이를 ym라 하면 그림에서



$2:(x+y)=1.5:y$

이므로 $2y=1.5x+1.5y$

$\therefore y=3x$

이때, 3초 후의 가로등과 학생 사이의 거리는

$x=\int_0^3\frac{t}{10}dt=\left[\frac{t^2}{20}\right]_0^3=\frac{9}{20}$

$\therefore y=3x=3\cdot\frac{9}{20}=\frac{27}{20}$

$\therefore a+b=20+27=47$

57. 정답 ③

ㄱ. $\int_0^{10}v(t)dt=-18,\ \int_0^{20}v(t)dt=2$이므로 승강기는 지하 18m 위치까지 내려갔다가 $t=20$ 직전에 1층을 그냥 통과한다. 한편, 20 ~ 45초까지 내려갔다가 1층보다 위에 있음은 그림에서 쉽게 알 수 있다. ∴ 참

ㄴ. $t=15$에서 $t=38$까지는 승강기는 상승하고,

$\int_0^{38} v(t)dt = 49.5$이므로 도달하는 최고 높이는 49.5m이다.

∴ 참

ㄷ. $t=38$일 때 승강기의 높이는 49.5m로 최고 지점에 도달한 후 $t=42$가 되는 순간에는 $49.5-2.4=47.1$(m)의 높이에 있으므로 지상에 있다. ∴ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

58. 정답 ③

[출제의도] 미분을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

ㄱ. 광원과 물체의 속도는 각각

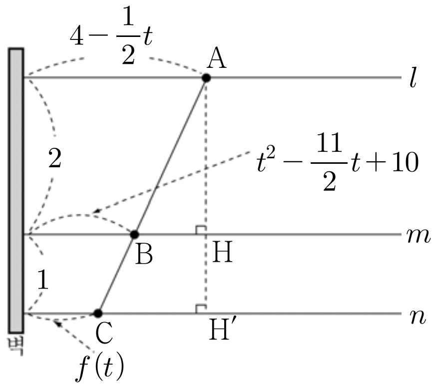
$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}$, $\frac{dy}{dt} = 2t - \frac{11}{2}$ 이므로

$t = \frac{5}{2}$에서 속도는 $-\frac{1}{2}$ 로 같다. ∴ 참

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} = 3$ 인 순간은 $t^2 - \frac{11}{2}t + 10 = 4 - \frac{1}{2}t$ 이므로

$t=2$ 또는 $t=3$ ∴ 참

ㄷ. 그림자 C 의 시각 t 에서 벽으로부터의 거리를 $f(t)$, 점 A에서 직선 m, n에 내린 수선의 발을 각각 H, H′ 라 하자.



$\overline{\mathrm{BH}} = \left(4 - \frac{1}{2}t\right) - \left(t^2 - \frac{11}{2}t + 10\right) = -t^2 + 5t - 6$

$\overline{\mathrm{CH'}} = 4 - \frac{1}{2}t - f(t)$

$\overline{\mathrm{BH}} : \overline{\mathrm{CH'}} = 2 : 3$ 이므로

$f(t) = \frac{3}{2}t^2 - 8t + 13$ 이다.

속도 v 는 $v = \frac{df(t)}{dt} = 3t - 8$ 이므로

가속도 a 는 $a = \frac{dv}{dt} = 3$ 이다. ∴ 거짓

59. 정답 ④

[출제의도] 미분을 이용하여 역함수의 성질 이해하기

역함수는 $y=x$ 대하여 대칭이므로

함수 $f(x) = \ln\frac{x}{k}$ 의 접선 중 기울기가 1 인 접선에서 $y=x$ 까지 거리의 두 배가 l_k 이다.

$f'(x) = 1$ 인 접점의 좌표는 $(1,\ \ln\frac{1}{k})$ 이다.

$d = \frac{\left|1 - \ln\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1+\ln k}{\sqrt{2}} = \frac{(1+\ln k)\sqrt{2}}{2}$

$l_k = 2d = (1+\ln k)\sqrt{2} \geqq 3\sqrt{2}$ 에서 $k \geqq e^2$

∴ k 의 최솟값은 8

60. 정답 ⑤

$f(x) = \left(-\ln\frac{1}{ax}\right)^2 = (\ln ax)^2$에서

$f'(x) = 2\ln ax \times \frac{a}{ax} = \frac{2\ln ax}{x}$

$f''(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln ax}{x^2} = \frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$

$f''(x) = 0$ 에서 $x = \frac{e}{a}$

$x < \frac{e}{a}$ 일 때, $f''(x) > 0$이고 $x > \frac{e}{a}$ 일 때, $f''(x) < 0$이다.

따라서 $x = \frac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$

변곡점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 $\frac{2e}{a} = 1$, ∴ $a = 2e$

61. 답 ③

곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y' = \frac{1}{x}$ 이므로

$y - 1 = \frac{1}{e}(x-e)$, $\therefore y = \frac{1}{e}x$

곡선 $y = x^2 + k$와 직선 $y = \frac{1}{e}x$가 서로 접하고, 접점의 x좌표를 t라 하면

$t^2 + k = \frac{1}{e}t$ …㉠

$2t = \frac{1}{e}$ …㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{4e^2} + k = \frac{1}{2e^2}$

$\therefore k = \frac{1}{4e^2}$

62. 답 ②

곡선 $y = x + 3\ln x$ 에서 $y' = 1 + \frac{3}{x} = \frac{x+3}{x}$

곡선 $y = x + 3\ln x$ 위의 점 $(n, n+3\ln n)$ 에서 그은 접선의 기울기는 $\frac{n+3}{n}$ 이므로 $\tan\theta_n = \frac{n+3}{n}$

$$\tan 2\theta_n = \frac{2 \cdot \frac{n+3}{n}}{1-\left(\frac{n+3}{n}\right)^2} = \frac{n(2n+6)}{-6n-9}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\tan 2\theta_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+6}{-6n-9} = -\frac{1}{3}$$

63. ⑤

음함수의 미분법에 의하여

$$3y^2y' = \frac{-2x}{5-x^2} + y + xy'$$

$$(3y^2-x)y' = \frac{-2x}{5-x^2} + y$$

(2, 2)를 대입하여 정리하면 $10y' = -2$

$$\therefore y' = -\frac{1}{5}$$

64. 정답 ③

$\angle \mathrm{PAB} = \theta$로 놓으면 $\overline{\mathrm{AP}} = 8\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{AP}}\cos\theta = 8\cos^2\theta$

$\overline{\mathrm{QK}} = f(\theta) = \overline{\mathrm{AQ}}\sin 2\theta$

$= 8\cos^2\theta \cdot \sin 2\theta = 4(\cos 2\theta + 1)\sin 2\theta$

$= 2\sin 4\theta + 4\sin 2\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore f'(\theta) = 8\cos 4\theta + 8\cos 2\theta$

$= 8(2\cos^2 2\theta - 1 + \cos 2\theta)$

$= 8(2\cos 2\theta - 1)(\cos 2\theta + 1)$

따라서 $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때, $f'(\theta)$의 값은 양에서 음으로 변하므로 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$는 극대이며 최대이다.

따라서 구하는 값은 $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때

$\overline{\mathrm{AP}} = 8\cos\theta = 8\cos\frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}$

65. 정답 ⑤

$y' = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$이므로 점 $\mathrm{P}\left(t, \frac{1}{1-\cos t}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{1-\cos t} = \frac{-\sin t}{(1-\cos t)^2}(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

그러므로 접선이 x축과 만나는 점 Q의 x좌표는

$$x = t + \frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{t\sin t + 1 - \cos t}{\sin t}$$

또, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발 R의 좌표는 $(t, 0)$ 이므로

$$\overline{\mathrm{QR}} = \left|\frac{1-\cos t}{\sin t}\right|$$

$$\therefore \lim_{t\to+0} \frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{QR}}} = \lim_{t\to+0}\left|\frac{t\sin t + 1 - \cos t}{1-\cos t}\right|$$

$$= \lim_{t\to+0}\left|\frac{t\sin t}{1-\cos t} + 1\right|$$

$$= \lim_{t\to+0}\left(\frac{t\sin t}{1-\cos t} + 1\right)$$

$$= 1 + \lim_{t\to+0}\frac{t\sin t(1+\cos t)}{1-\cos^2 t}$$

$$= 1 + \lim_{t\to+0}\left\{\frac{t}{\sin t}(1+\cos t)\right\}$$

$$= 1 + \lim_{t\to+0}\frac{t}{\sin t} \times \lim_{t\to+0}(1+\cos t)$$

$$= 1 + 1 \times 2 = 3$$

66. 답 ②

$f(x) = \frac{x}{e^x}$에서

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$f'(x) = 0$을 만족하는 $x = 1$이다.

$$f''(x) = \frac{(-1) \cdot e^x - (1-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x}$$

$f''(x) = 0$을 만족하는 $x = 2$이다.

함수의 증감표를 만들면

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2		∞
$f'(x)$		+	0	−	−	−	
$f''(x)$		−	−	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘	0

따라서 $x = 1$에서 극댓값을 갖고, 변곡점의 x좌표는 2이다.

$\therefore \alpha = 1, \beta = 2$

$$\therefore \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = \frac{\frac{1}{e}}{\frac{2}{e^2}} = \frac{e}{2}$$

67. 답 ③

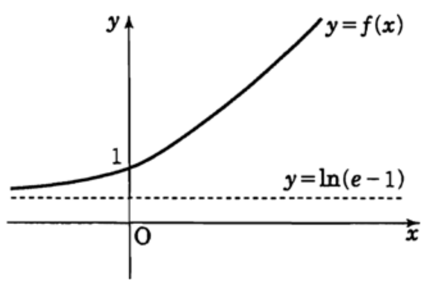
ㄱ. $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + e - 1}$이므로 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$ (참)

ㄴ. $f''(x) = \frac{(e-1)e^x}{(e^x + e - 1)^2}$이고 모든 실수 x에 대하여

$f''(x) > 0$이므로 이 곡선은 변곡점이 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(e-1)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$이고 ㄱ, ㄴ에서

$f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $k \le \ln(e-1)$일 때 방정식 $\ln(e^x + e - 1) = k$는 실근을 갖지 않는다. (거짓)

68. 답 ②

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 $x=k$ 에서 공통접선을 가지므로

$f(k)=g(k)$, $f'(k)=g'(k)$

ㄱ. $\{f(k)\}^2=\{g(k)\}^2$ 이고 $y'=2f(x)f'(x)$, $y'=2g(x)g'(x)$ 이므로

$2f(k)f'(k)=2g(k)g'(k)$ 이다.

즉 두 곡선 $y=\{f(x)\}^2, y=\{g(x)\}^2$ 는 $x=k$ 에서 공통접선을 가진다.

ㄴ. $y'=e^{f(x)}f'(x)$, $y'=e^{g(x)}g'(x)$ 이고

$e^{f(k)}=e^{g(k)}$ 이므로 $e^{f(k)}f'(k)=e^{g(k)}g'(k)$ 이다.

즉 두 곡선 $y=e^{f(x)}$, $y=e^{g(x)}$ 는 $x=k$ 에서 공통접선을 가진다.(참)

ㄷ. (반례) $f(x)=1+x^2$, $g(x)=1-x^2$ 의 두 곡선은

$f(0)=g(0)$ 이고, $f'(0)=g'(0)$ 이므로 $x=0$ 에서 공통접선을 갖지만

$f(g(0))=2$, $g(f(0))=0$

즉 $f(g(0))\neq g(f(0))$ 이므로 두 곡선 $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 공통접선을 갖지 않는다.

69. 답 ③

$f(x)=\ln x\ (x>1)$라 하면 $f(x)$는 폐구간 $\left[\sin\frac{\pi}{2}x,\ x\right]$에서 연속이고 개구간 $\left(\sin\frac{\pi}{2}x,\ x\right)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)}{x-\sin\frac{\pi}{2}x}=f'(c)=\frac{1}{c}\quad\left(\text{단, } \sin\frac{\pi}{2}x<c<x\right)$$

을 만족하는 c가 적어도 하나 존재한다.

이때, $x\to 1+0$이면 $\sin\frac{\pi}{2}x\to 1$이므로 $c\to 1$이고

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln x-\ln\sin\frac{\pi}{2}x}{x-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{c\to 1}\frac{1}{c}=1$$

70. 정답 ⑤

ㄱ. $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$ (참)

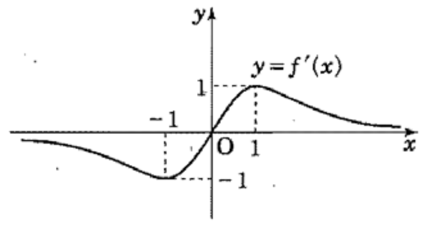
ㄴ. $f''(x)=\dfrac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=1,\ -1$

따라서 함수 $f'(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘	-1	↗	1	↘

$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$ 이므로 $y=f'(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $f'(x)$의 최솟값은 -1이다. (참)

ㄷ. $a=b$이면 주어진 부등식은 성립한다.

$a\neq b$일 때, 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 미분가능하므로 폐구간 $[a,\ b]$에서 평균값의 정리를 적용하면 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c)$인 c가 개구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나 존재한다. ㄴ에서 모든 실수 x에 대하여 $-1\le f'(x)\le 1$이므로

$\left|\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\right|=|f'(c)|\le 1$

따라서 임의의 실수 a, b에 대하여 $|f(a)-f(b)|\le|a-b|$ (참)

71. 정답 ②

원점에서 $y=\ln x$에 그은 접선의 방정식을 구하자. 접점을 $\mathrm{T}(\alpha, \ln\alpha)$라 하면, 접선의 방정식은

$y-\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}(x-\alpha)$

이 직선이 원점을 지나야 하므로 $-\ln\alpha=-1$

따라서 $\alpha=e$이고 접점은 $\mathrm{T}(e,1)$, 접선의 방정식은 $\boxed{y=\frac{1}{e}x}$이다.

이때 $y=\ln x$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(p, \ln p)$를 잡으면, $y=\ln x$ 의 그래프는 위로 볼록한 그래프이므로

($\overline{\mathrm{OT}}$의 기울기) $\ge$ ($\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기)

따라서 $\dfrac{1}{e}\ge\boxed{\dfrac{\ln p}{p}}$ 이다.

$\therefore p\ge e\ln p$이고 $e^p\ge e^{e\ln p}=p^e$

따라서 임의의 양수 p에 대하여 $e^p\ge p^e$이다.

(단, 등호는 $p=e$일 때 성립)

72. 정답 ①

ㄱ. $f(x)=xe^x$에서 $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

$x<-1$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소하고,

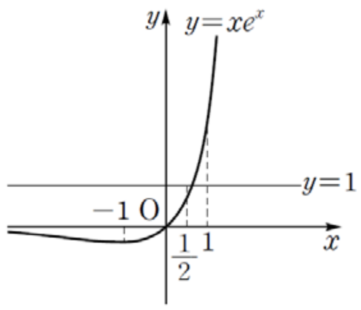
$x>-1$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다. (거짓)

ㄴ. 방정식 $xe^x-1=0$의 실근은 함수 $f(x)=xe^x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표와 같다.

$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}xe^x=\infty$이고,

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{e}}{2}<1$, $f(1)=e>1$이므로 두 함수

$f(x)=xe^x$, $y=1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $xe^x-1=0$은 개구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 실근을 갖는다.

(참)

ㄷ. $e^x+e^{-x}=x+x^{-1}$에서 양변에 e^x을 곱하면

$e^{2x}+1=\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x$

$e^{2x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x+1=0$

$\therefore (e^x-x)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때, $e^x>x$이므로 ㉠의 근은 방정식 $e^x=\frac{1}{x}$의 근과 같다.

그런데 $x\neq 0$일 때, 두 방정식 $xe^x-1=0$, $e^x=\frac{1}{x}$의 근은 서로 같으므로 방정식

$e^x+e^{-x}=x+x^{-1}$은 개구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 실근을 갖는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

73. 정답 ④

$f(x)=x+\ln(\cos x)+\ln 2-k$로 놓으면

$f'(x)=1+\frac{-\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}$

$f'(x)=0$에서 $\cos x-\sin x=0$이므로

$\cos x=\sin x \ \left(\because\ 0\le x<\frac{\pi}{2}\text{에서 } \cos x>0\right)$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{4}$

증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

위의 증감표에서 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극대이며 최대이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)\le 0$이어야 한다.

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2-k$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-k\le 0$

$\therefore\ k\ge\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

따라서 k의 최솟값은 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$이다.

74. 답 18

$\overline{\mathrm{OA}}=1$, $\angle\mathrm{CAH}=\theta$ 라 하면 $\angle\mathrm{ACB}=\frac{5\pi}{6}$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\frac{5\pi}{6}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$

$S(\theta)=\triangle\mathrm{ACH}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AH}}\cdot\overline{\mathrm{CH}}$

$=2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$

$=\frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)\right\}\sin 2\theta$

$=\frac{1}{2}\left\{\sin 2\theta-\frac{1}{2}\sin\left(4\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

$\therefore S'(\theta)=\cos 2\theta-\cos\left(4\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-2\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$

따라서, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{18}$일 때 $S(\theta)$는 극대이며 최대이고 구하는 값은 $a=18$이다.

75. 답 ④

ㄱ. (참) 임의의 실수 x에 대하여

$-e^{-x}\le e^{-x}\sin x\le e^{-x}$이고

$\lim_{x\to\infty}e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$, $\lim(-e^{-x})=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sin x=0$이다.

ㄴ. (거짓) 임의의 x에 대하여

$f(x+2\pi)=e^{(x+2\pi)}\sin(x+2\pi)=e^{2\pi}e^x\sin x=e^{2\pi}f(x)$

이고 $e^{2\pi}<1$이므로

$|f(x+2\pi)|=|e^{2\pi}f(x)|=e^{2\pi}|f(x)|<|f(x)|$

그러므로 $f(x)<0$이면 $f(x+2\pi)>f(x)$이다.

ㄷ. (참)

$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

이므로 $x=2n\pi+\frac{\pi}{4}$ 에서 극대, $x=2n\pi+\frac{5\pi}{4}$ 에서 극소를 가진다. (단, n은 음이 아닌 정수)

$f(0)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이고, $f\left(2n\pi+\frac{5\pi}{4}\right)<0$이므로

함수 $f(x)$는 극소인 x의 값 중에서 최솟값을 가진다.

또, ㄴ에 의해 $\left|f\left(2n\pi+\frac{5\pi}{4}\right)\right|<\left|f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right|$이므로

$-f\left(2n\pi+\frac{5\pi}{4}\right)<-f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

즉, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)<f\left(2n\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5\pi}{4}$ 에서 최솟값 $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}}$ 을 가진다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

76. 정답 2

$f(x)=\ln x$ 에서 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로 곡선

$f(x)=\ln x\,(x>1)$위의 점 $P(t, \ln t)$를 지나고 P 에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y-\ln t=-t(x-t)$

$y=0$일 때, $-\ln t=-t(x-t)$ $\quad\therefore x=t+\dfrac{\ln t}{t}$

$\therefore Q\left(t+\dfrac{\ln t}{t},\ 0\right),\ R(t,\ 0)$

삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln t}{t}\cdot\ln t=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(\ln t)^2}{t}$

$\therefore S'(t)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\ln t\cdot\dfrac{1}{t}\cdot t-(\ln t)^2\cdot 1}{t^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln t(2-\ln t)}{t^2}$

$S'(t)=0$에서 $\ln t=2(\because t>1)$ $\therefore t=e^2$

즉, 함수 $S(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	(1)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$S'(t)$		$+$		$-$
$S(t)$		↗	$\dfrac{2}{e^2}$	↘

따라서, 최댓값 $M=\dfrac{2}{e^2}$이므로 $e^2M=2$이다.

77. 정답 ②

t초 후 반직선 l_1이 x축과 이루는 각을 θ라 하면 $\theta=t$이고, 반직선 l_2가 x축과 이루는 각은 $2t+\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{CO}}$가 l_1과 이루는 각은 l_1, l_2가 이루는 각의 $\dfrac{1}{2}$이므로

(t초 후 $\overline{\mathrm{CO}}$가 l_1과 이루는 각은)$=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \overline{\mathrm{CO}}=\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

또, (t초 후 $\overline{\mathrm{CO}}$가 x축과 이루는 각)

$=\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}+t=\dfrac{3}{4}t+\dfrac{\pi}{4}$

이므로 점 C의 y좌표는 $y=\dfrac{\sin\left(\dfrac{3}{2}t+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{2}t+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=\frac{\frac{3}{2}\cos\left(\frac{3}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\therefore \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{-\frac{3}{2}-0}{1}=-\frac{3}{2}$$

78. 정답 ③

$y'=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$이므로 접선 AB의 방정식은

$y-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=-\dfrac{1}{2a\sqrt{a}}(x-a)$

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2a\sqrt{a}}x+\dfrac{3}{2\sqrt{a}}$

ㄱ. 구하는 직선 AB의 기울기는 점 $\mathrm{P}\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기이므로 $-\dfrac{1}{2\cdot 4\sqrt{4}}=-\dfrac{1}{16}$이다. $\therefore$ 참

ㄴ. $a=b$이면 $a\sqrt{a}=1$에서 $a=1$이다. 이때 직선 AB의 기울기는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 기울기인 $\dfrac{-1}{2a\sqrt{a}}$에서 $a=1$이므로 기 울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}=2\cdot\overline{\mathrm{OB}}$ $\qquad\therefore$ 거짓

ㄷ. $\mathrm{A}(3a,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{3}{2\sqrt{a}}\right)$이므로

$f(a)=\overline{\mathrm{OA}}^{\,2}+\overline{\mathrm{OB}}^{\,2}=9a^2+\dfrac{9}{4a}$로 놓으면

$f'(a)=18a-\dfrac{9}{4a^2}=\dfrac{18}{a^2}\left(a^3-\dfrac{1}{8}\right)$에서 $f(a)$는 $a=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$을 갖는다.

따라서 선분 AB의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{27}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이다. $\therefore$ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

79. 정답 ③

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	$+$		$+$	0
$f(x)$		$\dfrac{\pi}{2}$		π

위의 표에서 $x<1$, $1<x<3$일 때, $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가하고 이 구간에서 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하다. 또한, $x=1$일 때, $f'(x)=0$이므로 $x=1$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 $-$ 에서 $+$ 로 바뀌게 된다. 따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖고 그래프는 아래로 볼록하다.

ㄱ. $g(x)=\sin(f(x))$에서

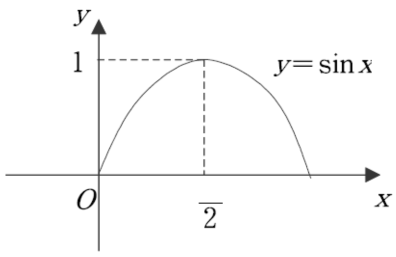
$g'(x)=\cos(f(x))\times f'(x)$

$\therefore\ g'(3)=\cos(f(3))\times f'(3)$

$=\cos\pi\times f'(3)=(-1)\times 1=-1$ (참)

ㄴ. $1<x<3$ 에서 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하며 증가하므로 $\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$

따라서 $\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$ 에서 $g(x)=\sin(f(x))$의 그래프는 감소하면서 위로 볼록하다.



$x=1$ 일 때,

$g'(1)=\cos(f(1))\times f'(1)=\cos\frac{\pi}{2}\times 0=0$

$x=3$ 일 때,

$g'(3)=\cos(f(3))\times f'(3)=\cos\pi\times 1=-1$

따라서 $1<a<b<3$ 에서

$-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$ (참)

ㄷ. $g''(x)=-\sin(f(x))\times f'(x)\times f'(x)+\cos(f(x))\times f''(x)$

$x=1$ 일 때,

$g''(1)=-\sin(f(1))\times f'(1)\times f'(1)+\cos(f(1))\times f''(1)$

$=-\sin\frac{\pi}{2}\times 0\times 0+\cos\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=0$

이지만 $x<1$ 과 $x>1$ 에서 $g''(x)$ 의 부호가 같으므로 $x=1$ 에서 변곡점을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

80. 답 ③

ㄱ. $F(x)=\overline{\mathrm{OP}}^{\,2}=x^2+e^{2x}$이므로 모든 실수에서 미분가능하다.
따라서 $F(x)$가 $x=a$에서 최솟값을 가지면 $F(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 최소이다.

$\therefore F'(a)=0$

이때, $F'(x)=2x+2e^{2x}$이므로

$F'(a)=2a+2e^{2a}=0$

$\therefore\ e^{2a}=-a$ (참)

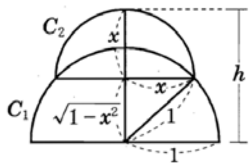
ㄴ. $F''(x)=2+4e^{2x}>0$이므로 $F(x)$는 아래로 볼록이다.

$\therefore\ F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2}$ (참)

ㄷ. 원점 O가 아래로 볼록인 곡선 $y=F(x)$의 아래쪽에 위치하면 원점 O를 지나는 직선 중 곡선 $y=F(x)$와 서로 다른 두 점에서 만나는 직선이 존재한다.
두 점의 x좌표를 $x_1,\ x_3\ (0<x_1<x_3)$이라 하면 $x_1<x_2<x_3$ 일 때, $\frac{F(x_1)}{x_1}>\frac{F(x_2)}{x_2}$이다. (거짓)

81. ②

작은 반구 C_2의 반지름의 길이를 x, 전체 높이 h를 $f(x)$라 하면



$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}\quad(0<x<1)$

$f'(x)=1+\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$ 에서 $\sqrt{1-x^2}=x,\ x^2=\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad(\because\ 0<x<1)$

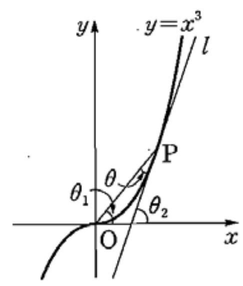
x	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\sqrt{2}$	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$ 이다.

82. 답 ②

$y'=3x^2$이므로 점 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$에서의 접선의 기울기는 $3a^2$이다.

따라서 선분 OP와 접선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\theta_1,\ \theta_2$라 하면



$\tan\theta_1=\frac{a^3}{a}=a^2,\ \tan\theta_2=3a^2$

이때, $\theta_2=\theta_1+\theta$이므로

$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\cdot\tan\theta_1}$

$=\frac{3a^2-a^2}{1+3a^2\cdot a^2}=\frac{2a^2}{1+3a^4}$

한편, $f(a)=\frac{2a^2}{1+3a^4}$이라 하면

$f'(a)=\frac{4a(1+3a^4)-2a^2\cdot 12a^3}{(1+3a^4)^2}=\frac{-4a(3a^4-1)}{(1+3a^4)^2}$

즉, $f'(a)=0$에서 $3a^4-1=0$이므로

$a=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\quad(\because\ a>0)$

이때, $f'(a)$의 부호는 $a=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀌므로 $f(a)$는 $a=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$에서 극대인 동시에 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)=\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+3\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

83. 답 128

t 초 후의 두 점 P, Q 의 좌표를 구하면

$P(4\cos t,\ 0,\ 4\sin t)$, $Q(0,\ 2\sin 2t,\ 2\cos 2t)$

삼각형 OPQ 의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{16\cdot 4-64\sin^2 t\cos^2 2t}$$

$$=4\sqrt{1-\sin^2 t(1-2\sin^2 t)^2}$$

이때 $\sin^2 x=t$ 라 하면 $0\le x\le 1$ 이고

$f(x)=1-x(1-2x)^2$ 이라 하면 $f'(x)=(6x-1)(1-2x)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{25}{27}$	↗	1	↘	0

위의 증감표에서 $x=0,\ \frac{1}{2}$ 일 때, $f(x)$ 는 최댓값 1 을 갖는다.

따라서 넓이 $S(t)$ 는 $\sin t=0,\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, 최댓값 4 를 갖는다.

$\therefore\ 8M^2=8\cdot 4^2=128$

84. 답 ⑤

$y=x+\frac{a}{x}$의 도함수는 $y'=1-\frac{a}{x^2}$이므로

점 $P(1,1+a)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$y-(1+a)=(1-a)(x-1)$

$\therefore y=(1-a)x+2a$

이 접선의 x절편, y절편은 각각 $\frac{2a}{a-1}$, $2a$이므로

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{a-1}\cdot 2a=\frac{2a^2}{a-1}$$

$$S'(a)=\frac{4a(a-1)-2a^2}{(a-1)^2}=\frac{2a(a-2)}{(a-1)^2}$$

따라서, $a=2$일 때, 함수 $S(a)$는 극소이며 최소이므로 구하는 최솟값은 $S(2)=8$이다.

85. 답 ⑤

$\overline{OP}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라 하자. $\triangle OAB$는 정삼각형이므로 $\triangle OAQ$에서

$$\sin(\angle OQA)=\sin\left(\pi-\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

사인법칙에서 $\frac{\overline{AQ}}{\sin\theta}=\frac{\overline{OA}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$

$$\therefore\ \overline{AQ}=\frac{2\sin\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\frac{d}{dt}\overline{AQ}=\frac{d}{d\theta}\overline{AQ}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\frac{2\cos\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}\cdot 1$$

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$$

따라서 점 Q의 속력이 최소가 되는 것은 $\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$일 때이다.

즉, $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$에서 $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때, 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

86. 정답 ⑤

[출제의도] 미분을 이용하여 함수의 그래프추론하기

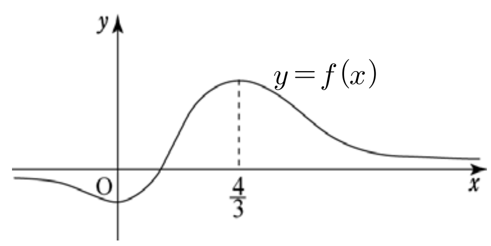
ㄱ. $f'(x)=\frac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}$, $f'(1)=1$

접선의 방정식은 $y=x-\frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore$ 접선과 원점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\therefore$ 참

ㄴ. $x=0$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{8}$ 을 갖는다. $\therefore$ 참

ㄷ. 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)-f(10)=0$ 의 근은 2 개다. $\therefore$ 참

87. 정답 ②

평균값 정리에 의해

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha)$인 α가 $a<\alpha<b$에서 존재하고

$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\beta)$인 β가 $b<\beta<c$에서 존재하므로

$0<\alpha<\beta<3$인 임의의 실수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $f'(\alpha)>f'(\beta)$이다.

개구간 $(0,\ 3)$에서 $f'(x)$는 감소함수이다.

따라서, 보기 중 $f''(x)<0$인 함수를 고르면 된다.

① $f''(x)=(\cos x)''=(-\sin x)'=-\cos x$

② $f''(x)=(\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x$

③ $f''(x)=(x^3)''=(3x^2)'=6x$

④ $f''(x)=(2x-\ln x)''=\left(2-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}$

⑤ $f''(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)''=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x^3}$

개구간 $(0,\ 3)$에서 $f''(x)<0$인 $f(x)$는 ②이다.

88. 정답 ③

$x>0$이면 $x>\sin x$이고, 두 점 P, Q를

P$(x,\ f(x))$, Q$(\sin x,\ f(\sin x))$ 로 잡으면 $\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}$는 두 점 P, Q를 잇는 직선의 기울기와 같다.

평균값의 정리에 의해 $\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=f'(t)$를 만족하는 t가 $\sin t<t<x$에서 반드시 존재한다.

그런데 $x\to+0$이면 $t\to+0$

따라서 구하는 극한값은 $\lim\limits_{x\to+0}f'(x)$와 같다.

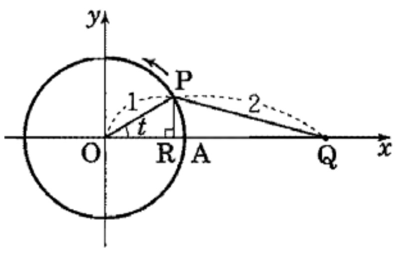
$f'(x)=\ln(x^2+3x+3)+x\times\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$이므로

$\therefore \lim\limits_{x\to+0}f'(x)=\ln 3=a$

$\therefore e^a=e^{\ln 3}=3$

89. 정답 20

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R이라 하자.



점 P가 점 A(1, 0)을 출발한 후 t초가 지난 순간 호 AP의 길이는 t이므로 $\angle$POA$=t$ (라디안)이고 P$(\cos t,\ \sin t)$이다.

$\overline{\text{OQ}}=f(t)$라 하면 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$일 때,

$f(t)=\overline{\text{OQ}}=\overline{\text{OR}}+\overline{\text{RQ}}=\cos t+\sqrt{2^2-\sin^2 t}$

$\therefore\ f'(t)=-\sin t-\dfrac{\sin t\cos t}{\sqrt{4-\sin^2 t}}$

점 P가 점 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$을 지나는 순간 $t=\dfrac{\pi}{6}$이다.

$\therefore\ f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4-\dfrac{1}{4}}}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

따라서 구하는 점 Q의 속력은

$\left|f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right|=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

$\therefore\ p=\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{1}{10}$ $\qquad\therefore\ \dfrac{1}{pq}=20$

90. 답 800

[용기A]의 얇은 판이 옆면과 이루는 이면각의 크기가 θ일 때의 [용기B]의 수면의 반지름의 길이를 r(cm), 밑면에서의 수면까지의 높이를 h(cm)라 하면

$\dfrac{1}{2}\times 20^2\times 20\tan\theta=\dfrac{1}{3}\times 15^2\times\pi\times 30-\dfrac{1}{3}\times\pi r^2\times 2r$

$h=30-2r$

위의 두 식의 양변을 시각 t에 대하여 미분하면

$4000\sec^2\theta\dfrac{d\theta}{dt}=-2\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dh}{dt}=-2\dfrac{dr}{dt}=v$

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$인 순간의 수면의 반지름의 길이와 높이의 변화율은

$4000\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\pi}{20}=-2\pi a^2\dfrac{dr}{dt}=\pi a^2 v$

$a^2v=\dfrac{800}{3}$ $\qquad\therefore\ 3a^2v=800$

91. 정답 251

[출제의도] 미분을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

분침의 속력 : $\dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}$

시침의 속력 : $\dfrac{\dfrac{\pi}{6}}{60}=\dfrac{\pi}{360}$

3시 정각에서 t(분) 후 분침과 시침이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 4시 정각 근처에서

$\theta=\dfrac{\pi}{30}t-\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{360}t\right)=\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{360}t$

$\angle$POQ$=2\pi-\theta$ 이므로

$S=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\sin(2\pi-\theta)=3\cos\dfrac{11\pi}{360}t$

$\dfrac{dS}{dt}=-3\times\dfrac{11\pi}{360}\times\sin\dfrac{11\pi}{360}t$

$t=60$일 때, $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{11}{240}\pi$

$\therefore\ p+q=251$

92. 답 31

점 P가 점 Q를 출발하여 $t(0\le t<10)$초가 되는 순간 $\overline{\text{BP}}=t$이므로 $\tan\theta=\dfrac{\overline{\text{OA}}}{\overline{\text{OP}}}=\dfrac{5}{10-t}$

양변을 t에 대하여 미분하면

$\sec^2\theta=\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{5}{(10-t)^2}$

$\therefore\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{5}{(10-t)^2}\cdot\dfrac{1}{\sec^2\theta}=\dfrac{5\cos^2\theta}{(10-t)^2}$

$t=9$일 때, $\overline{\text{OP}}=1$, $\overline{\text{AP}}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\text{OP}}}{\overline{\text{AP}}}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$

$\therefore\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{5}{1^2}\cdot\dfrac{1}{26}=\dfrac{5}{26}$

$\therefore p+q=26+5=31$

93. 답 ④

$\overline{\text{OA}}=x$, $\overline{\text{OB}}=y$, $\overline{\text{AB}}=l$이라 하면 삼각형 OAB에서

$l^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ$

$l^2=x^2+y^2+xy$

양변을 t에 대하여 미분하면

$2l\frac{dl}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dt}\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dt}$ ...... ㉠

$x=5$, $y=3$일 때

$l^2=5^2+3^2+15=49$

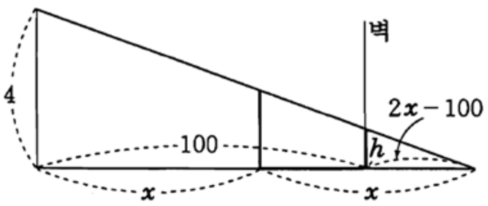
$\therefore l=7$

$\frac{dx}{dt}=28$, $\frac{dy}{dt}=21$이므로 ㉠에 대입하면

$2\cdot 7\cdot\frac{dl}{dt}=2\cdot 5\cdot 28+2\cdot 3\cdot 21+28\cdot 3+5\cdot 21$

$\therefore\frac{dl}{dt}=42.5$ $\therefore a=42.5$

94. 85



학생이 가로등 밑에서 떨어진 거리가 $x(x>50)$일 때의 벽에 생긴 그림자의 길이를 h, 전체 그림자의 길이를 l이라 하자.

$(2x-100)$: $h=2x$: 4에서 $h=4-\frac{200}{x}$

$l=(100-x)+\left(4-\frac{200}{x}\right)$

$\therefore\ \frac{dl}{dt}=\left(\frac{200}{x^2}-1\right)\frac{dx}{dt}=90\left(\frac{200}{x^2}-1\right)\ \left(\because\ \frac{dx}{dt}=90\right)$

$\therefore\ a=90\left(\frac{200}{60^2}-1\right)=-\frac{90\cdot 17}{18}=-85$

$\therefore\ |a|=85$

95. 정답 17

[출제의도] 도형의 넓이의 변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 P가 1초에 π씩 움직이므로 점 H는 1초에 $\frac{4}{5}\pi$ 씩 움직인다.

따라서 점 H가 t초 동안 움직인 거리는 $\frac{4}{5}\pi t$이다. 좌표공간에서 선분 AB의 중점을 원점 O라 하고 점 A$(4, 0, 0)$, t초 후의 점 H, P를

$\mathrm{H}\left(4\cos\frac{\pi t}{5},\ 4\sin\frac{\pi t}{5},\ 0\right)$, $\mathrm{P}\left(4\cos\frac{\pi t}{5},\ 4\sin\frac{\pi t}{5},\ \frac{3\pi t}{5}\right)$

$\overline{\mathrm{HA}}=\sqrt{\left(4\cos\frac{\pi t}{5}-4\right)^2+\left(4\sin\frac{\pi t}{5}\right)^2}=8\sin\frac{\pi t}{10}$

$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{HA}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}=4\sin\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{3\pi t}{5}$

$\frac{dS}{dt}=4\left(\cos\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{\pi}{10}\cdot\frac{3\pi t}{5}+\sin\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{3\pi}{5}\right)$

따라서 $t=5$일 때 $\frac{dS}{dt}=\frac{12}{5}\pi=\frac{q}{p}\pi$ $\therefore p+q=17$

96. 정답 $\frac{11}{3}$

[출제의도] 평면 운동하는 점의 속력을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{dx}{dt}=2\cos t+2\sin t$, $\frac{dy}{dt}=3\cos 2t$ 이므로

점 P의 속력 $|v|$는

$|v|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

$=\sqrt{(2\cos t+2\sin t)^2+9\cos^2 2t}$

$\sqrt{4+4\sin 2t+9(1-\sin^2 2t)}$

$=\sqrt{-9\sin^2 2t+4\sin 2t+13}$

$\sin 2t=A$라 하면 $-1\le A\le 1$이고

$|v|=\sqrt{-9A^2+4a+13}$이므로 $|v|$는 $A=\frac{2}{9}$일 때,

최댓값 $\sqrt{\frac{121}{9}}=\frac{11}{3}$이다.