



1. 지수함수와 로그함수

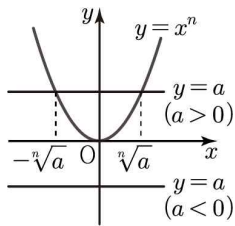
◆ 개념 01 - 거듭제곱근의 뜻

(1) 실수 a 와 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $x^n = a$ 를 만족하는 x 를 a 의 n 제곱근이라 한다. 실수 a 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

(2) 그래프를 이용한 거듭제곱근의 이해

(1) n 이 짝수일 때



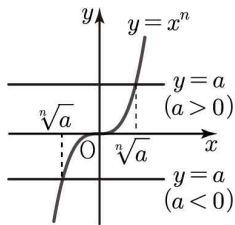
$y = x^n$ 은 우함수이므로 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

① $a > 0$ 이면 교점이 두 개가 생기고, 교점의 x 좌표는 $x = -\sqrt[n]{a}, x = \sqrt[n]{a}$ 이다.

② $a = 0$ 이면 교점이 한 개가 생기고, 교점의 x 좌표는 $x = 0$ 이다.

③ $a < 0$ 이면 교점이 없다.

(2) n 이 홀수일 때



$y = x^n$ 은 기함수이므로 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때, a 의 값에 관계없이 교점은 단 한 개가 생기고, 교점의 x 좌표는 $x = \sqrt[n]{a}$ 이다.

◆ 개념 02 - 거듭제곱근의 성질

$a > 0, b > 0$ 이고, m, n 이 양의 정수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n = a$

② $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

③ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

④ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

⑥ $\sqrt[m]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, p 는 양의 정수)

◆ 개념 03 - 지수의 확장

(1) $a \neq 0$ 이고, n 이 자연수일 때 → ① $a^0 = 1$, ② $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(2) $a > 0$ 이고, m 은 정수, n 은 2 이상의 자연수일 때 →

① $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, ② $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ③ $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

◆ 개념 04 - 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고, m, n 이 유리수일 때

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$

④ $(ab)^n = a^n b^n$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

[랑데뷰팁] 지수법칙은 지수의 범위를 실수로 확장하여도 성립한다.

[랑데뷰팁]

① a 의 n 제곱근 :

방정식 $x^n = a$ 의 근

② n 제곱근 $a : \sqrt[n]{a}$

③ $\sqrt[n]{a}$ (a 의 n 제곱근 중 a 와 부호가 같은 실수) (n 제곱근 a) \subset (a 의 n 제곱근)

④ n 제곱근 a 는 많아야 1개이지만 a 의 n 제곱근은 복소수의 범위에서 n 개이다.

[랑데뷰팁]

a 의 n 제곱근 중 실수인 것을 구하는 방정식

$x^n = a$ 의 실근을 구하는 것과 같고, 이것은 곡선 $y = x^n$ 과 직선 $y = a$ 의 교점의 x 좌표를 찾는 것과 같다.

[랑데뷰팁]

지수법칙에서 지수 범위의 확장

지수가 정수일 때는 밑이 음수인 경우에도 지수법칙이 성립하지만, 지수가 정수가 아닌 유리수, 실수일 때는 반드시 밑이 양수인 경우에만 지수법칙이 성립한다.

즉, 지수가 정수가 아닌 경우 밑이 음수이면 지수법칙을 적용하지 않는다.

예) 잘못된 계산 :

$$\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-3)^{2 \times \frac{1}{2}} = (-3)^1 = -3$$

옳은 계산 :

$$\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3^{2 \times \frac{1}{2}} = 3$$

(1) 기본문제

1) 2022년 7월 교육청

$n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $2n^2 - 9n$ 의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$ 의 값을 구하시오.

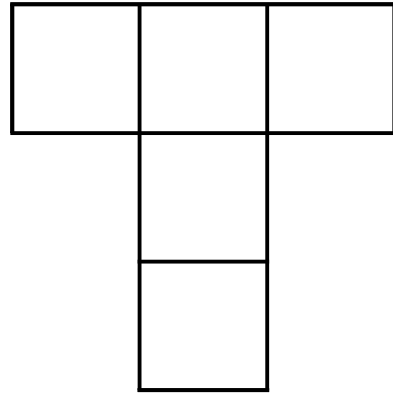
2) 2022학년도 사관학교

$\sqrt[m]{64} \times \sqrt[n]{81}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는?
 ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3) 2022학년도 사관학교

그림과 같은 5개의 칸에 5개의 수 $\log_a 2, \log_a 4, \log_a 8, \log_a 32, \log_a 128$ 을 한 칸에 하나씩 적는다. 가로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합과 세로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합이 15로 서로 같을 때, a 의 값은?

- ① $2^{\frac{1}{3}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ 2 ④ $2^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{3}}$



21) 2008년 10월 교육청

$x = 2^{\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}}$ 일 때, $(x + \sqrt{x^2 + 4})^2$ 의 값은?

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

22) 2009년 3월 교육청

2의 네제곱근 중 양수인 것을 x 라 할 때, x^n 이 세 자리의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합은?

- ① 96 ② 97 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

23) 2009년 3월 교육청

실수 a, b 에 대하여 $3^a = 12^b = 6$ 이 성립할 때,

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 의 값은?

- ① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{2}{3}$

24) 2009년 4월 교육청

$\log_{(x-3)}(-x^2 + 11x - 24)$ 가 정의되기 위한 모든 정수 x 의 합을 구하시오.

25) 2009년 7월 교육청

$a > 0, a \neq 1$ 에 대하여

$\left\{ \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a^4}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{-4}} \right\}^6 = a^k$ 일 때, 상수 k 의 값을

구하시오.

26) 2009년 7월 교육청

세 양수 a, b, c 가 $a^x = b^{2y} = c^{3z} = 7, abc = 49$ 를

만족할 때, $\frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}$ 의 값은?

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

(5) 방정식&부등식

126) 2021년 3월 교육청

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n > 0$$

이 성립하도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하시오.

127) 2021년 7월 교육청

부등식 $5^{2x-7} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ 을 만족시키는 자연수 x 의

개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

128) 2020년 4월 교육청

부등식

$$2^{x-4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

129) 2020년 10월 교육청

부등식 $\log_2(x^2 - 7x) - \log_2(x + 5) \leq 1$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합은?

- ① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

130) 2020년 4월 교육청

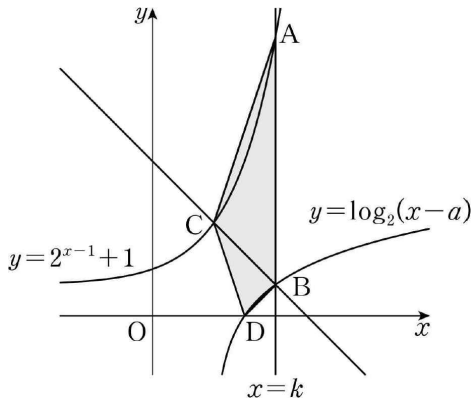
부등식 $\log_{18}(n^2 - 9n + 18) < 1$ 을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은?

- ① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

(6) 그래프

188) 2022년 3월 교육청

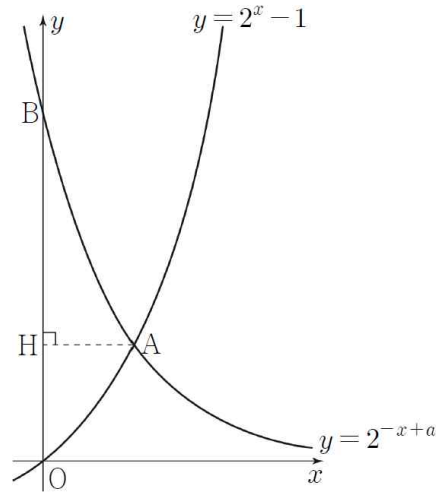
그림과 같이 두 상수 a, k 에 대하여 직선 $x=k$ 가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1, y=\log_2(x-a)$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=8, \overline{BC}=2\sqrt{2}$ 일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$ 가 x 축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0 < a < k$)



- ① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

189) 2022년 4월 교육청

그림과 같이 두 곡선 $y=2^{-x+a}, y=2^x-1$ 이 만나는 점을 A, 곡선 $y=2^{-x+a}$ 이 y 축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{OB}=3 \times \overline{OH}$ 이다. 상수 a 의 값은? (단, O는 원점이다.)



- ① 2 ② $\log_2 5$ ③ $\log_2 6$
 ④ $\log_2 7$ ⑤ 3

단원평가

231)

등식

$$\left(\frac{x^2}{5}\right)^{\log_5 x} = (25x^5)^{\log_5 5}$$

를 만족시키는 모든 실수 x 의 곱은?

- ① 2 ② $\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

232)

함수 $f(x) = -(x-2)^2 + k$ 와 5이하의 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 정수 k 의 값은?

$\sqrt{2}^{f(n)}$ 이 유리수가 되는 값들을 모두 곱한 값이 1024이다.

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

233)

두 함수 $f(x) = a^{x-1}$, $g(x) = \log_a x + 1$ 의 교점을 A, B라 하자. 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이고 A, B의 중점의 좌표가 (2, 2)일 때, a^2 의 값을 구하시오

234)

자연수 n 에 대하여

$$f(n) = \begin{cases} 2^{-n+6} - 3 & (2 \leq n \leq 6) \\ (n-6)^2 - 2 & (n > 6) \end{cases} \text{일 때, } f(n) \text{의}$$

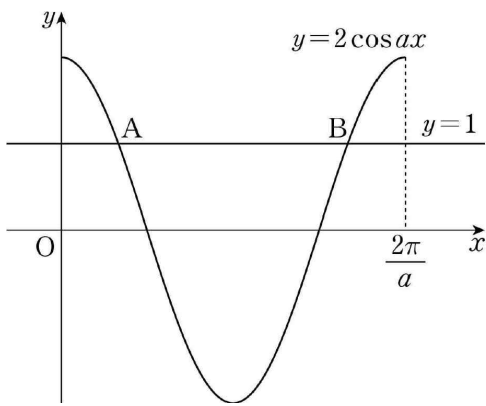
n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$ 이라 하자.

$\sum_{n=2}^9 g(n)$ 의 값을 구하시오. [3점]

(1) 식에의 활용

322) 2022년 3월 교육청

그림과 같이 양의 상수 a 에 대하여 곡선 $y = 2 \cos ax$ ($0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a}$)와 직선 $y = 1$ 이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB} = \frac{8}{3}$ 일 때, a 의 값은?



- ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{12}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

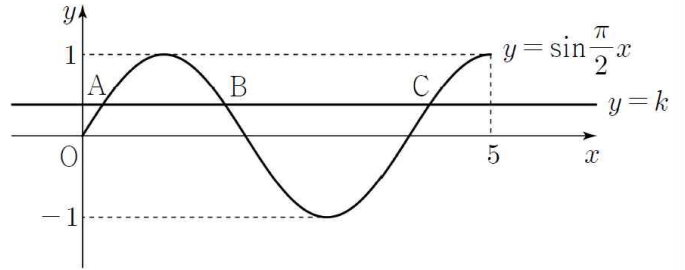
323) 2022년 4월 교육청

자연수 k 에 대하여 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$ 의 서로 다른 실근의 개수가 8이다. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$ 의 모든 해의 합은?

- ① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

324) 2022년 7월 교육청

곡선 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ ($0 \leq x \leq 5$)가 직선 $y = k$ ($0 < k < 1$)과 만나는 서로 다른 세 점을 y 축에 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x 좌표의 합이 $\frac{25}{4}$ 일 때, 선분 AB의 길이는?



- ① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

325) 2022년 10월 교육청

양수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = \left| 4 \sin \left(ax - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \right| \quad \left(0 \leq x < \frac{4\pi}{a} \right)$$

의 그래프가 직선 $y = 2$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 n 이다. 이 n 개의 점의 x 좌표의 합이 39일 때, $n \times a$ 의 값은?

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$