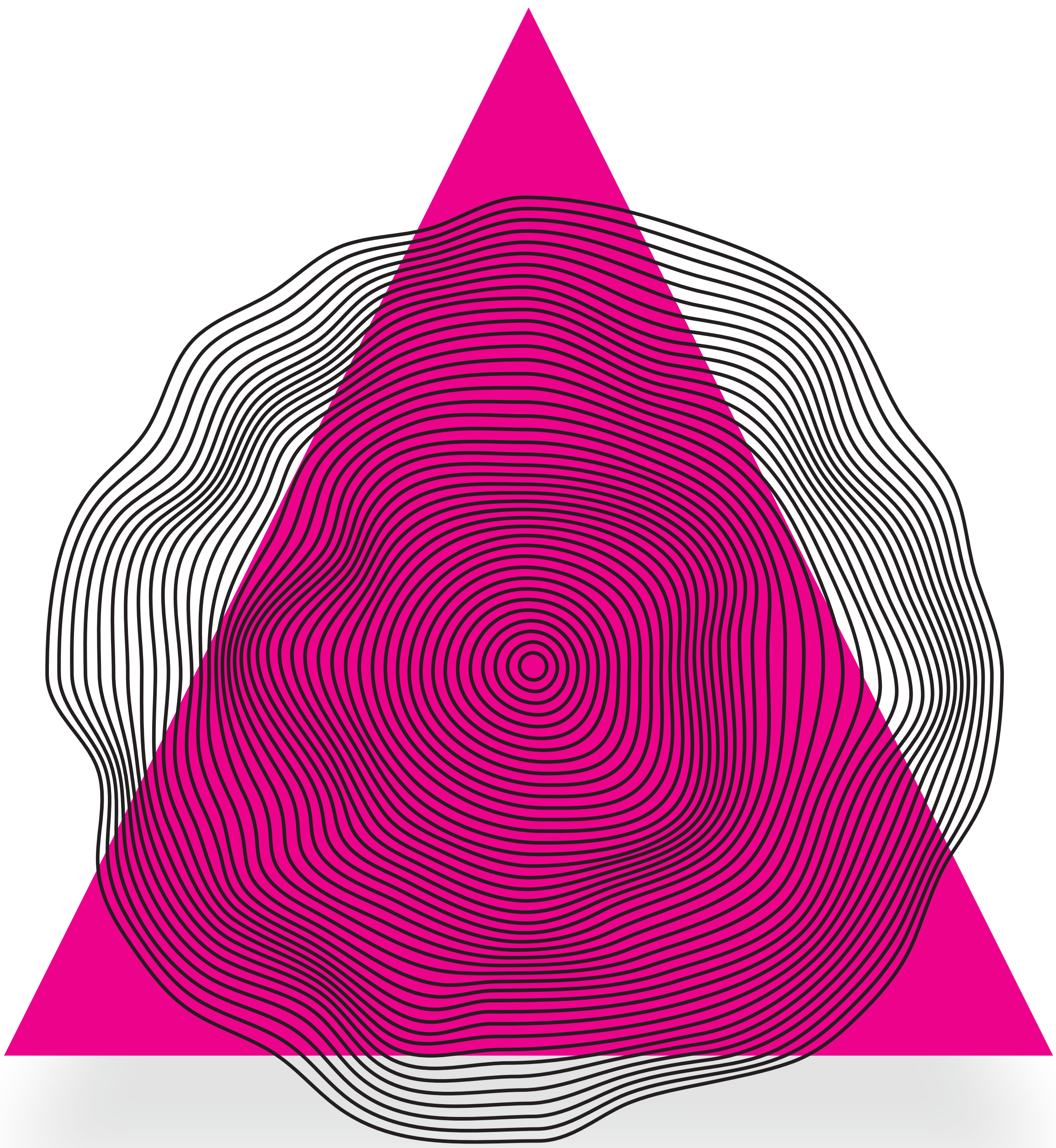
# 기출의_ 파급효과



수학영역 × 미적분 / 하 × EXTENSION

# 미적분(하) EXTENSION

기출의 파급효과

# 미적분(하)

Chapter 06. 적분법_ 7p

Chapter 07. 구분구적법과 정적분_16p

Chapter 08. 상수와 변수, 매개변수와 라이프니츠 미분법_19p

Chapter 09. ㄱㄴㄷ 문항과 다양한 정리_23p

Chapter 10. 합성함수_28p

Chapter 11. 역함수_31p

# 저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 4년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

**1. 기출의 파급효과 standard에는 미적분 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.**

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예제 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

**2. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.**

미적분 기출 중 킬러는 물론 오답률이 높은 문제들을 예제로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 킬러를 풀 생각이 없어 과거의 킬러를 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

**3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.**

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다.
**기출의 파급효과 standard에는 평가원, 교육청, 사관학교 기출 중 가장 핵심이 되는 195문제를 담았습니다.**
**standard 미적분(상)에는 111문제, standard 미적분(하)에는 84문제입니다.**

※ 문제 좌표에서 '나형' 또는 'A형' 또는 '인문계'라고 표시된 것을 제외하면 전부 '가형' 또는 'B형' 또는 '자연계' 기출입니다.

**4. 예제 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.**

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다.

**5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.**

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 **extension 미적분(상) 173문제, extension 미적분(하) 72문제**로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

**standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다.** standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

**개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.**

9월 평가원을 응시하기 전에 standard를 ‘제대로’ 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

Chapter

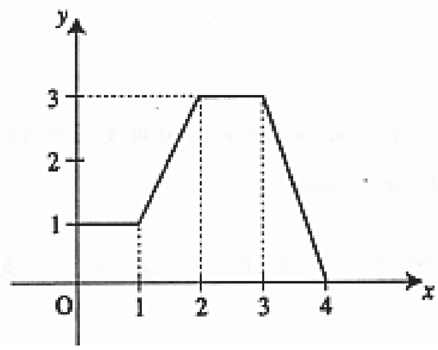
# 06

## 적분법

## 유제

## 01 98학년도 수능 13번

다음 그림은 $0 \le x \le 4$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 정적분 $\int_0^1 f(2x+1)dx$의 값은? [2점]




① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

## 02 03학년도 수능 8번

함수 $f(x)$는 연속함수이고 모든 실수 $x$에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(x)-2\int_0^x e^t f(t)dt=1$$

이때, $f''(0)$의 값은? (단, $e$는 자연로그의 밑이고, $f''(x)$는 $f(x)$의 이계도함수이다.) [3점]

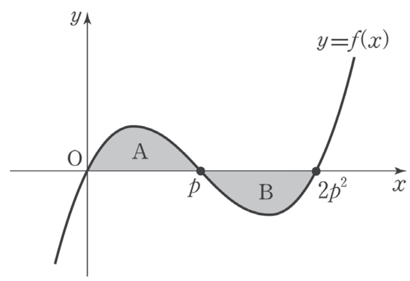
① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

## 03 05학년도 9월 평가원 27번

연속함수 $f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다. 이 곡선과 $x$ 축으로 둘러싸인 두 부분 A ,B 의 넓이가 각각 $\alpha$ , $\beta$ 일 때, 정적분 $\int_0^p xf(2x^2)dx$ 의 값은?

(단, $p > \frac{1}{2}$) [4점]




① $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ② $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

③ $\alpha+\beta$ ④ $\frac{1}{4}(\alpha+\beta)$

⑤ $\frac{1}{4}(\alpha-\beta)$

## 04 05년 10월 교육청 26번

정적분 $\int_0^1 2xe^{x^2}dx$ 의 값은?

(단, $e$ 는 자연로그의 밑) [3점]

① $e-1$ ② $e$ ③ $e+1$

④ $e^2-1$ ⑤ $e^2$

## 05 07학년도 수능 27번

1보다 큰 실수 $a$에 대하여 $f(a)=\int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$라 할 때, $f(a^4)$과 같은 것은? [3점]

① $4f(a)$ ② $8f(a)$ ③ $12f(a)$
④ $16f(a)$ ⑤ $20f(a)$

## 06 10학년도 9월 평가원 28번

함수 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^6}dt$에 대하여 상수 $a$가 $f(a)=\frac{1}{2}$을 만족시킬 때, $\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}dx$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$ ② $\sqrt{e}-1$ ③ $1$
④ $\frac{\sqrt{e}+1}{2}$ ⑤ $\sqrt{e}+1$

## 07 12년 7월 교육청 6번

양의 실수를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=x$, $h(x)=\ln x$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $g(x)$가 있다. 이때, $g(e)$의 값은? [3점]

(가) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=h(x)$
(나) $g(1)=-1$

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$
④ $1$ ⑤ $2$

## 08 14학년도 예비시행 21번

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때 $f(x)=\frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$이다.
(나) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+2)=f(x)$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 4\int_0^1 f(x)dx$
ㄴ. $1<x<2$일 때, $f'(x)>0$이다.
ㄷ. $\int_1^3 x|f'(x)|dx = 4$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 09 14학년도 9월 평가원 30번

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0 \le x \le 1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)dx=6e^2+4$이다.

$\int_1^e f(\ln x)dx=ae+b$일 때, $a^2+b^2$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$는 정수이다.) [4점]

## 10 14학년도 수능 21번

연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 $x$에 대하여

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt$이다. $f(1)=1$일 때,

$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx$의 값은? [4점]

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$

④ $2\pi-1$ ⑤ $2\pi$

## 11 14년 4월 교육청 15번

$\int_{e^2}^{e^3} \frac{a+\ln x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x\,dx$가 성립할 때, 상수 $a$의 값은? [4점]

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$

④ $1$ ⑤ $2$

## 12 14년 7월 교육청 9번

$x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ |
| (나) $f(x)+xf'(x)=x\cos x$ |

$f(\pi)$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{\pi}$ ② $-\frac{1}{\pi}$ ③ $0$

④ $\frac{1}{\pi}$ ⑤ $\frac{2}{\pi}$

## 13 15년 4월 교육청 17번

자연수 $n$에 대하여 함수 $f(n)=\int_{1}^{n} x^3 e^{x^2} dx$라 할 때, $\frac{f(5)}{f(3)}$의 값은? [4점]

① $e^{14}$ ② $2e^{16}$ ③ $3e^{16}$

④ $4e^{18}$ ⑤ $5e^{18}$

## 14 15년 10월 교육청 27번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=2$
>
> (나) $\int_{0}^{1}(x-1)f'(x+1)dx = -4$

$\int_{1}^{2} f(x)dx$ 의 값을 구하시오. (단, $f'(x)$는 연속함수이다.) [4점]

## 15 16년 10월 교육청 23번

함수 $f(x) = 8x^2+1$ 에 대하여

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f'(\sin x)\cos x\, dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

## 16 17년 3월 교육청 4번

$\int_{1}^{e^2} \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ 의 값은? [3점]

① $2\ln 2$ ② $2$ ③ $4\ln 2$

④ $4$ ⑤ $6\ln 2$

## 17 17년 3월 교육청 16번

연속함수 $f(x)$가

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=12,\ \int_{0}^{1} xf(x)dx=\int_{0}^{-1} xf(x)dx$$

를 만족시킨다. $\int_{-1}^{x} f(t)dt=F(x)$라 할 때,

$\int_{-1}^{1} F(x)dx$의 값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10

④ 12 ⑤ 14

## 18 17년 3월 교육청 21번

구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (0 \le x \le 1)$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x) = f(x) - x$

(나) $\int_0^1 F(x)dx = e - \frac{5}{2}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $F(1) = e$

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)dx = \frac{1}{6}$

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2 dx = \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 19 18학년도 9월 평가원 18번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0) = 0$이고 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x) > 0$이다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))\ (t > 0)$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 $x$축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수 $t$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t} - 2e^{2t} + e^t)$일 때, 곡선 $y = f(x)$와 $x$축 및 직선 $x = 1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $e - 2$ ② $e$ ③ $e + 2$

④ $e + 4$ ⑤ $e + 6$

## 20 17년 10월 교육청 16번

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \ne 0$인 실수 $x$에 대하여

$$\{f(x)\}^2 f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

(나) $f(0) = 0$

$\{f(1)\}^3$의 값은? [4점]

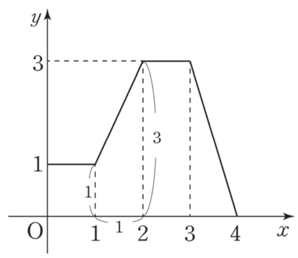
① $2\ln 2$ ② $3\ln 2$ ③ $1 + 2\ln 2$

④ $4\ln 2$ ⑤ $1 + 3\ln 2$

# CHAPTER 06 해설

## 01 98학년도 수능 13번

답 : ④




$\int_0^1 f(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2}\times(2+3) = \frac{5}{2}$ 이다.

## 02 03학년도 수능 8번

답 : ③

1. $f(x) - 2\int_0^x e^t f(t)dt = 1$ 는 정적분으로 정의된 함수 꼴이므로

   $f(0)=1$, $f'(x) = 2e^x f(x)$ 을 뽑아낸다.

2. $f''(x) = 2e^x\{f(x)+f'(x)\}$ 이다.

   $f'(x) = 2e^x f(x)$ 에서 $f'(0)=2$ 이므로 $f''(0) = 2\{f(0)+f'(0)\} = 6$ 이다.

## 03 05학년도 9월 평가원 27번

답 : ⑤

$2x^2 = t$, $4xdx = dt$ 로 치환하자. $\int_0^p xf(2x^2)dx = \frac{1}{4}\int_0^{2p^2} f(t)dt$ 이다.

한편 A의 넓이는 $\alpha$, B의 넓이는 $\beta$ 에서 $\int_0^{2p^2} f(x)dx = \alpha - \beta$ 이다.

따라서 $\int_0^p xf(2x^2)dx = \frac{1}{4}\int_0^{2p^2} f(t)dt = \frac{1}{4}(\alpha-\beta)$ 이다.

## 04 05년 10월 교육청 26번

답 : ①

$\int_0^1 2xe^{x^2}dx$ 에서 $\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$ 임을 바로 알아봐야 한다. $\int_0^1 2xe^{x^2}dx = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e-1$ 이다.

## 05 07학년도 수능 27번

**답 : ②**

$f(a)=\int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\left[\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^a=\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$이다.

$f(a^4)=\frac{2}{3}(\ln a^4)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(4\ln a)^{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$에서 $8f(a)$이다.

## 06 10학년도 9월 평가원 28번

**답 : ②**

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^6}dt$는 **정적분으로 정의된 함수 꼴이므로** $f(0)=0$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^6}$을 **뽑아낸다.**

$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}dx=\int_0^a f'(x)e^{f(x)}dx=\left[e^{f(x)}\right]_0^a=e^{f(a)}-e^{f(0)}=e^{\frac{1}{2}}-1$이다.

## 07 12년 7월 교육청 6번

**답 : ③**

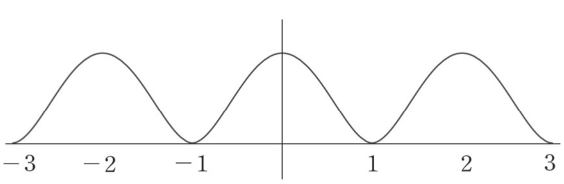
조건 (가)의 좌변에서 곱의 미분 꼴 $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$을 **알아봐야 한다.**
$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=h(x)$의 양변을 $x$에 대해 적분해보자.

$f(x)g(x)=x\ln x-x+C$에서 $f(x)=x$, $g(1)=-1$이므로 $C=0$이다.
따라서 $xg(x)=x\ln x-x$에서 $g(x)=\ln x-1$이고 $g(e)=0$이다.

## 08 14학년도 예비시행 21번

**답 : ⑤**

1. 함수 $g(x)=\frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$라 하자. $g(x)$는 $g(1)=g(-1)=0$, $g(x)\geq 0$를 **만족하는 우함수이다.**
   **함수 $f(x)$는 주기가 2인 우함수**인 것을 고려하여 $y=f(x)$의 그래프 개형을 '미분 없이' 그리면 다음과 같다.




   위 그래프 개형이 맞는지 수식적으로 확인하려면 $g'(x)=\frac{4x(x^2-1)(x^2+1)}{(x^4+1)^2}$을 이용하면 된다.
   $g'(0)=g'(1)=g'(-1)=0$이고, $g(x)$는 $x=0$에서 극대임을 알 수 있다.

2. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{2} f(x)dx = 4\int_{0}^{1} f(x)dx$이므로 선지 (ㄱ)은 참.

3. 그래프에서 $1 < x < 2$일 때, $f'(x) > 0$이다. 선지 (ㄴ)은 참.

4. $|f'(x)| = \begin{cases} f'(x) & (2n-1 \le x < 2n) \\ -f'(x) & (2n \le x < 2n+1) \end{cases}$이다. (단, $n$은 정수)

$\int_{1}^{3} x|f'(x)|dx = \int_{1}^{2} xf'(x)dx - \int_{2}^{3} xf'(x)dx$

$= [xf(x)]_{1}^{2} - \int_{1}^{2} f(x)dx - \left([xf(x)]_{2}^{3} - \int_{2}^{3} f(x)dx\right)$

$= 2f(2) - f(1) - (3f(3) - 2f(2)) = 4\{f(2) - f(1)\} = 4$이다. 선지 (ㄷ)은 참.

## 09 14학년도 9월 평가원 30번

**답 : 17**

1. 직접 치환하지 않으면 접근하기 힘들어 보이는 문제이다. 발문에는 함수 $g(e^x)$를 소개해줬지만 힌트로 준 값은 $\int_{1}^{e^2} g(x)dx$이다. 여기서 힌트를 얻어 $e^x = t$로 치환해서 접근하자.

$$g(t) = \begin{cases} f(\ln t) & (1 \le t \le e) \\ g\left(\frac{t}{e}\right) + 5 & (e \le t \le e^2) \end{cases}$$

※ 간혹 $g(e^{x-1}) = g(t-1)$로 잘못 치환하는 경우가 있는데 $g(e^{x-1}) = g\left(\frac{e^x}{e}\right)$이므로 $g(e^{x-1}) = g\left(\frac{t}{e}\right)$로 치환해야 한다. 실수를 범하지 않도록 조심하도록 하자.

2. $\int_{1}^{e^2} g(x)dx$의 적분 구간을 1. 에서 구한 구간으로 나눠서 표현하자.

$\int_{1}^{e^2} g(x)dx = \int_{1}^{e} g(x)dx + \int_{e}^{e^2} g(x)dx = \int_{1}^{e} f(\ln x)dx + \int_{e}^{e^2} \left(g\left(\frac{x}{e}\right) + 5\right)dx$이다.

한편 $\int_{e}^{e^2} \left(g\left(\frac{x}{e}\right) + 5\right)dx = 5(e^2 - e) + e\int_{1}^{e} g(x)dx = 5(e^2 - e) + e\int_{1}^{e} f(\ln x)dx$ 이므로

$\int_{1}^{e^2} g(x)dx = (e+1)\int_{1}^{e} f(\ln x)dx + 5(e^2 - e) = (e+1)(ae+b) + 5(e^2 - e)$

$= (a+5)e^2 + (a+b-5)e + b = 6e^2 + 4$이다.

따라서 $a = 1,\ b = 4$이므로 $a^2 + b^2 = 17$이다.

## 10 14학년도 수능 21번

답 : ①

1. 함수 $f(x)$는 원점 대칭이므로 이를 수식으로 표현하면 $f(x)=-f(-x)$이다.

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1}f(t)dt$는 **정적분으로 정의된 함수 꼴이므로**

$f(0)=0$, $f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$을 **뽑아낸다.**

$f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$이므로 $\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=2\pi\int_0^1 xf'(x)dx$이다.

$2\pi\int_0^1 xf'(x)dx$는 **대표적인 부분적분하기 쉬운 꼴이다.**

$2\pi\int_0^1 xf'(x)dx=2\pi[xf(x)]_0^1-2\pi\int_0^1 f(x)dx$

2. $f(1)=1$임이 주어졌으므로 이제 $\int_0^1 f(x)dx$의 값만 구하면 된다.

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1}f(t)dt$에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_1^0 f(t)dt$이다.

한편, $f(x)$는 원점 대칭이므로 $f(1)=1$에서 $f(-1)=-1$임을 알 수 있다.

따라서 $\int_0^1 f(t)dt=\frac{2}{\pi}$이다. $2\pi\int_0^1 xf'(x)dx=2\pi[xf(x)]_0^1-2\pi\int_0^1 f(x)dx=2\pi-4=2(\pi-2)$

## 11 14년 4월 교육청 15번

답 : ②

$\int_{e^2}^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}dx=\left[\left(a\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)\right]_{e^2}^{e^3}=3a+\frac{9}{2}-2a-\frac{4}{2}=a+\frac{5}{2}$이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x dx=\left[\frac{1}{2}(1+\sin x)^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이다. $a+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$이므로 $a=-1$이다.

## 12 14년 7월 교육청 9번

답 : ②

1. 조건 (나)의 좌변에서 **곱의 미분 꼴** $(xf(x))'=f(x)+xf'(x)$을 **알아봐야 한다.**

$f(x)+xf'(x)=x\cos x$의 양변을 $x$에 대해 적분해보자.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로, $xf(x)=x\sin x-\int\sin x=x\sin x+\cos x$이다.

2. $\pi f(\pi)=-1$이므로 $f(\pi)=-\frac{1}{\pi}$이다.

# 13 15년 4월 교육청 17번

**답 : ③**

1. $f(n)=\int_1^n x^3e^{x^2}dx$에서 $x^2=t$, $2xdx=dt$로 치환하자.

$$f(n)=\int_1^n x^3e^{x^2}dx=\int_1^n x\times x^2e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^{n^2}te^tdt=\frac{1}{2}\left[(t-1)e^t\right]_1^{n^2}=\frac{(n^2-1)e^{n^2}}{2}$$ 이다.

2. $f(3)=4e^9$, $f(5)=12e^{25}$이므로 $\dfrac{f(5)}{f(3)}=3e^{16}$이다.

# 14 15년 10월 교육청 27번

**답 : 6**

$$\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx=\int_1^2(t-2)f'(t)dt=\left[(t-2)f(t)\right]_1^2-\int_1^2 f(t)dt$$

$$=f(1)-\int_1^2 f(t)dt=2-\int_1^2 f(t)dt=-4$$ 이다.

따라서 $\int_1^2 f(x)dx=6$이다.

※ $\int_1^2(t-2)f'(t)dt$**은 대표적인 부분적분 하기 쉬운 꼴이다.**

$t-2$를 미분하기 쉬운 꼴로 두고, $f'(t)$를 적분하기 쉬운 꼴로 두자.

# 15 16년 10월 교육청 23번

**답 : 6**

$(\sin x)'=\cos x$임을 한눈에 알아볼 수 있어야 한다.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f'(\sin x)\cos x dx=\left[f(\sin x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)=9-3=6$$ 이다.

# 16 17년 3월 교육청 4번

**답 : ④**

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$임을 한눈에 알아볼 수 있어야 한다. $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\left[\frac{1}{4}(\ln x)^4\right]_1^{e^2}=\frac{1}{4}\times 16=4$이다.

## 17 17년 3월 교육청 16번

**답 : ④**

1. $\int_{-1}^{x} f(t)dt = F(x)$**는 정적분으로 정의된 함수 꼴이므로** $F(-1)=0$, $F'(x)=f(x)$**을 뽑아낸다.**

   나머지 조건을 보기 좋게 정리하면 $F(1)=12$, $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$이다.

2. $\int_{-1}^{1} F(x)dx$**는 기본적 함수 적분도 아니고 역시 치환적분 꼴은 아니다. 남은 선택지는 부분적분뿐**이다.

   **이럴 땐** $F(x)=1\times F(x)$**로 보고 부분적분을 시도해보자.**

   $F'(x)=f(x)$**에서** $F(x)$**는 미분하기 쉬운 형태임을 알 수 있다.**

   $\int_{-1}^{1} 1\times F(x)dx$**에서** $F(x)$**는 미분하기 쉬운 형태로,** $1$**을 적분하기 쉬운 형태로 두자.**

   $$\int_{-1}^{1} F(x)dx = \int_{-1}^{1} 1\times F(x)dx = [xF(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} xf(x)dx$$

   $$= 12 - \left(\int_{0}^{1} xf(x)dx + \int_{-1}^{0} xf(x)dx\right) = 12\text{이다.}$$

## 18 17년 3월 교육청 21번

**답 : ④**

1. $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$**는 정적분으로 정의된 함수 꼴이므로** $F(0)=0$, $F'(x)=f(x)$**을 뽑아낸다.**

   이제 조건 (나)를 보자. 조건 (가)에서 함수 $F(x)$에 대한 단서를 줬기 때문에 대입해서 해결하자.

   $$\int_{0}^{1} F(x)dx = \int_{0}^{1} (f(x)-x)dx = F(1) - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2}\text{이다.}$$

   따라서 $F(1)=e-2$이므로 선지 (ㄱ)은 거짓.

2. 조건 (가)를 한 번 더 이용하자. $xF(x)=x(f(x)-x)$이다.

   $$\int_{0}^{1} xF(x)dx = \int_{0}^{1} x(f(x)-x)dx = \left[x\left\{F(x)-\frac{1}{2}x^2\right\}\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\left\{F(x)-\frac{1}{2}x^2\right\}dx$$

   $$= F(1) - \frac{1}{2} - \int_{0}^{1} F(x)dx + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\text{이다. 선지 (ㄴ)은 참.}$$

3. 함수 $\{F(x)\}^2$은 바로 적분할 수 없으므로 조건 (가)를 이용해서 접근해야 한다.

   $\{F(x)\}^2 = (f(x)-x)F(x)$이다.

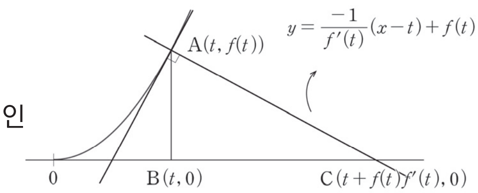
   $$\int_{0}^{1} \{F(x)\}^2 dx = \int_{0}^{1} f(x)F(x)dx - \int_{0}^{1} xF(x)dx$$

   $$= \left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_{0}^{1} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\{F(1)\}^2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}(e-2)^2 - \frac{1}{6}$$

   $$= \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6}\text{이다. 선지 (ㄷ)은 참.}$$

## 19 18학년도 9월 평가원 18번

답 : ①




1. 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이므로 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(t)}$이다.

   따라서 직선 AC의 함수식은 $y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$이다.

   또, 점 C는 직선 AC의 $x$절편이므로 $0=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$에서

   점 C의 $x$좌표는 $f'(t)f(t)+t$임을 알 수 있다.

   $\overline{\mathrm{BC}}=f'(t)f(t)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=f(t)$이므로 ($\triangle$ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}f'(t)\{f(t)\}^2$을 얻는다.

   따라서 $f'(t)\{f(t)\}^2=e^{3t}-2e^{2t}+e^t$이다.

2. $f(t)$를 구하기 위해 $f'(t)\{f(t)\}^2=e^{3t}-2e^{2t}+e^t$에서 양변을 $t$에 대해 적분하자.

   $f(0)=0$이므로 $\frac{1}{3}\{f(t)\}^3=\frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}+e^t-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(e^t-1)^3$이다.

   $f'(t)>0$이므로 $f(t)=e^t-1$이다.

3. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(e^x-1)dx=\left[e^x-x\right]_0^1=e-2$이다.

## 20 17년 10월 교육청 16번

답 : ②

1. 조건 (가)에서 $\{f(x)\}^2f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$을 보면 **치환적분 꼴**임을 알아봐야 한다.

   $\{f(x)\}^2f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$의 양변을 $x$에 대해 적분하면 $\frac{1}{3}\{f(x)\}^3=\ln(x^2+1)+\mathrm{C}$이다.

   ※ $\{\ln(x^2+1)\}'=\frac{2x}{x^2+1}$, $\left(\frac{1}{3}f(x)^3\right)'=f(x)^2f'(x)$임을 치환 없이 바로 알아보자.

2. 조건 (나)는 적분상수 처리용이다. $f(0)=0$이므로 $\mathrm{C}=0$, $\frac{1}{3}\{f(x)\}^3=\ln(x^2+1)$이다.

   $\frac{1}{3}\{f(1)\}^3=\ln 2$에서 $\{f(1)\}^3=3\ln 2$이다.