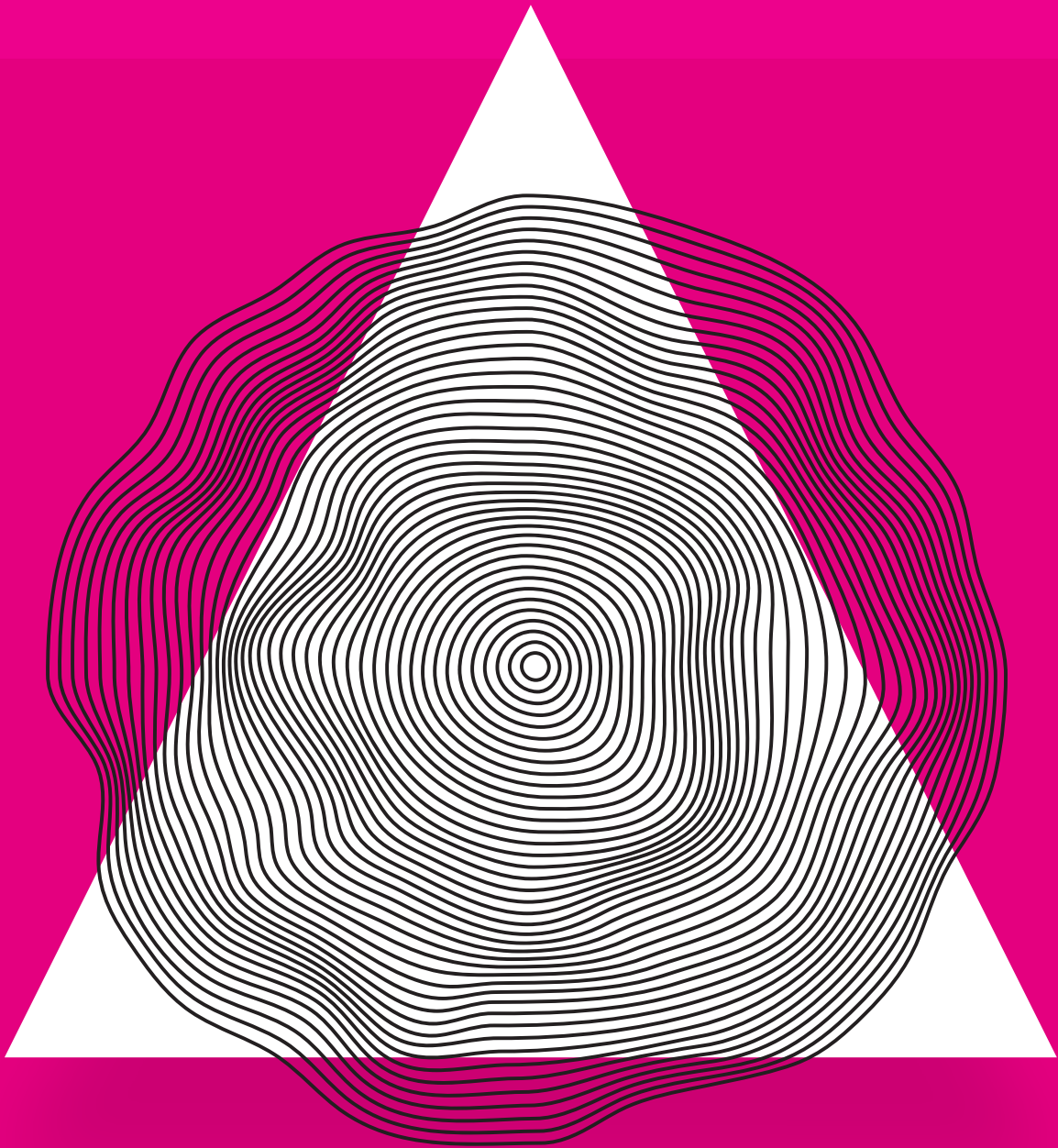


기술  
의 \_

파급  
효과



smart is sexy  
**Orbi**.kr



수학영역 × 미적분 / 상 × STANDARD



**미적분(상)**  
**STANDARD**  
기출의 파급효과

## 미적분(상)

---

Chapter 01. 필수 도형 정리와 도형의 극한\_10p

Chapter 02. 수열의 극한, 급수 - 대수\_85p

Chapter 03. 수열의 극한, 등비급수의 활용 - 기하\_121p

Chapter 04. 그래프 그리기, 조건 해석\_176p

Chapter 05. 극점과 변곡점 정의, 연속성, 미분가능성\_277p

# 저자의 말

---

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 4년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

## 1. 기출의 파급효과 standard에는 미적분 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예제 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 ‘순서대로’ 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

## 2. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

미적분 기출 중 킬러는 물론 오답률이 높은 문제들을 예제로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 ‘순서대로’ 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 킬러를 풀 생각이 없어 과거의 킬러를 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

## 3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다.

기출의 파급효과 standard에는 평가원, 교육청, 사관학교 기출 중 가장 핵심이 되는 195문제를 담았습니다. standard 미적분(상)에는 111문제, standard 미적분(하)에는 84문제입니다.

※ 문제 좌표에서 ‘나형’ 또는 ‘A형’ 또는 ‘인문계’라고 표시된 것을 제외하면 전부 ‘가형’ 또는 ‘B형’ 또는 ‘자연계’ 기출입니다.

#### 4. 예제 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다.

※ 기출의 파급효과 미적분(상) Chapter 3 중 20학년도 이전의 기출 해설은 기대가 작성하였습니다.

#### 5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 extension 미적분(상) 173문제, extension 미적분(하) 72문제로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

**standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다.** standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다. 이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

**개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(센 등등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.**

9월 평가원을 응시하기 전에 standard를 ‘제대로’ 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

**미적분의 시작은 그래프 그리기이다.** 미적분이 수학II보다 어렵다고 하는 결정적인 이유가 뭘까? 미분하기 전에 그래프 개형을 미리 모르는 경우가 많기 때문이다. 하지만 미분하기 전에 미리 그래프 개형을 안다면? 수학II와 난이도가 크게 다르지 않을 것이다.

**미적분 킬러 문제를 풀 때는 특수한 경우부터 따진다.** 특수한 경우에 답이 나오는 경우가 매우 많다. 특수한 경우에 답이 나온다면 시험장에서 엄밀한 증명까진 필요 없고 문제의 조건과 충돌하는 지점이 없지만 확인하자.

다만 특수한 경우에서 답이 안 나온다면 바로 일반적인 경우도 고려하여 좀 더 엄밀하게 풀어야 한다.

이 교재의 예시 해설에서는 시험장에서의 생각과 일반적인 경우 모두 담고 있어 해설이 길어질 수 있다.

하지만 참고 읽다 보면 얻어가는 것이 있을 것이며 시험장에서는 무리 없이 특수한 경우부터 고려하는 자신감이 생길 것이다.

## 📦 그래프 개형 그리기

**미적분의 시작이다.** 미분 없이 충분히 그래프 개형을 그릴 수 있는 상황에서 미분부터 먼저 하고 있다면 시간과 에너지가 너무 낭비되어 정작 필요한 조건 해석을 못 하는 불상사가 발생한다.

**웬만한 문제에서는 미분 없이 그래프 개형을 그릴 수 있다.** 이때 미분은 그래프 개형을 알아내는 주요 도구가 아닌 극점이나 변곡점 좌표를 구할 때 쓰는 보조도구로 전략한다. 미분 없이 그래프 개형을 그리는 방법은 이 책 전반에 걸쳐 제일 많이 쓰이는 도구이니 꼭 체화하자.

웬만한 문제에서는 미분 없이 그래프 개형을 그릴 수 있으나 분명 한계가 존재할 때도 있다. 이를 위해 미분을 하여 도함수를 얻고 이로부터 원함수의 그래프 개형을 그리는 방법도 가볍게 소개한다.

## ◆ 1. 미분 없이 그래프 개형 그리기

**$x$  축을 먼저 그린다.  $y$  축은 원점 위치를 정확히 알 때 그린다.** 킬러 문제에서는 함수  $f(x)$ 가 확정되지 않은 경우가 많기에 원점 위치를 모를 때가 많다. 원점 위치를 모를 때  $y$  축은 문제 상황 파악과 조건 파악에 방해만 될 뿐이다.

**$x$  축을 먼저 그리고 밑의 5가지를 '순서대로' 따지면 미분 없이 함수  $f(x)$  그래프 개형을 쉽게 그릴 수 있다.**

1. 우함수나 기함수인가? 우함수일 때는 그래프가  $y$  축 대칭임을, 기함수일 때는 그래프가 원점 대칭임을 염두에 두자.
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 의 값을 표시하자.
3.  $x = \alpha$ 에서  $y = f(x)$ 가 수직 점근선을 갖는다면  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x)$ 의 값을 표시하자.
4.  $x$  축과의 교점은 몇 개일까? 직접적인  $f(x) = 0$ 의 해를 구하면 시간이 너무 오래 걸린다. 그래프 개형 그릴 땐  $x$  축과의 교점 개수 정도만 표시하자.
5. 위의 4가지를 고려하면 직관적으로 그래프 개형을 예상할 수 있고 이를 바탕으로 그래프 개형을 완성할 수 있다. 예상이 틀릴까 봐 걱정하지 말자. 예상이 대체로 잘 맞는다. 극점의 개수가 애매할 때는 이후에 미분하여 확인하면 된다.

다만, 극한 처리를 할 때 주의할 점이 있다.

예를 들어  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 라고 하자. 그래프 개형을 그리기 위해서  $x$ 가 무한히 커질 때  $f(x)$ 가 0보다 큰 곳에서 0으로 접근하는지, 0보다 작은 곳에서 0으로 접근하는지, 0에서 0으로 접근하는지 표시가 필요하다.  $x$ 가 무한히 커질 때  $f(x)$ 가 0보다 큰 곳에서 0으로 접근한다면  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0+$ , 0보다 작은 곳에서 0으로 접근한다면  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0-$ , 0에서 0으로 접근한다면  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 으로 표기하도록 하자.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x)$ 에서  $\pm \frac{\infty}{\infty}$  또는  $\pm \infty \times 0$  꼴이 나오는 경우가 있다.

이럴 땐 어떻게 해야 할까? **증가함수에서 로그함수<무리함수<다항함수<지수함수 순으로 더 강한 영향력을 가진다고 생각하면 편하다.** 증명은 교과 외인 로피탈 정리를 사용한다.

예를 들어 극한이  $\pm \frac{\infty}{\infty}$  또는  $\pm \infty \times 0$  꼴이 나올 때  $e^x$ 은  $x^{100}$ 보다,  $x^2$ 은  $10^{10} \sqrt{x}$ 보다,  $\sqrt{x}$ 은  $10^{10} \ln x$

보다도 강한 영향력을 가진다. 따라서  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0$ 이다.

$f(x) = (x-2)(x-3)e^{-x}$ 의 그래프 개형을 그려보자.

1. 우함수나 기함수가 아니다.
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0+$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 를 표시하자.



※  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0+$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 임을 어떻게 알아냈을까?

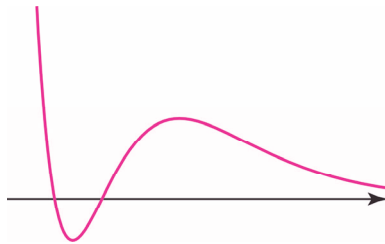
지수함수는 다항함수보다 더 큰 영향력을 가지므로  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-2)(x-3)e^{-x} = \infty \times 0+ = 0+$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)(x-3)e^{-x} = \infty \times \infty = \infty$ 이다.

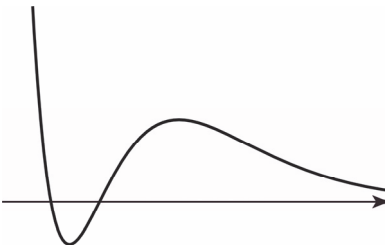
3. 함수  $f(x)$ 는 실수 전체 집합에서 정의되므로  $y = f(x)$ 는 수직 점근선을 갖지 않는다.
4.  $x$ 축과의 교점이 2개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



예상이 실제로 맞다!





$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ 의 그래프 개형을 그려보자.

1. 기함수이다. 그래프가 원점 대칭임을 염두에 두자.
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0+$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0-$ 를 표시하자.



※  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0+$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0-$ 임을 어떻게 알아냈을까?

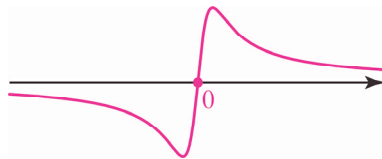
이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = 0+$ 이다.

이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{-\infty}{\infty} = 0-$ 이다.

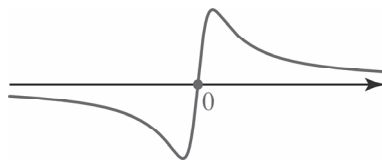
3. 함수  $f(x)$ 는 실수 전체 집합에서 정의되므로  $y = f(x)$ 는 수직 점근선을 갖지 않는다.
4.  $x$ 축과의 교점은 원점 1개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다. 원점 대칭임을 반영하자.



예상이 실제로 맞다!



$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$ 의 그래프 개형을 그려보자.

1. 우함수나 기함수가 아니다.
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0+$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0-$ 를 표시하자.



※  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0+$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0-$ 임을 어떻게 알아냈을까?

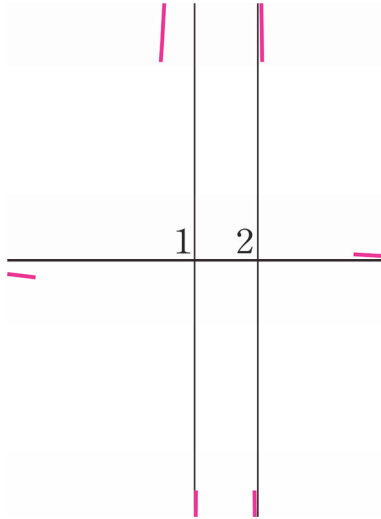
이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{\infty}{\infty} = 0+$ 이다.

이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{-\infty}{\infty} = 0-$ 이다.

3. 함수  $f(x)$ 는  $x = 1$ ,  $x = 2$ 일 때 정의되지 않는다.  $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -\infty$ 이므로  $y = f(x)$ 는  $x = 1$ ,  $x = 2$ 에서 수직 점근선을 갖는다.

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -\infty$ 를 표시하자.

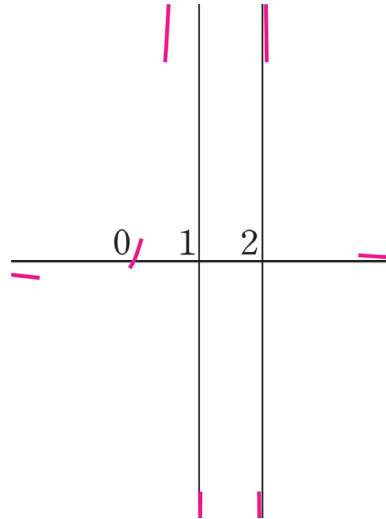


※  $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -\infty$ 임을 어떻게 알아냈을까?

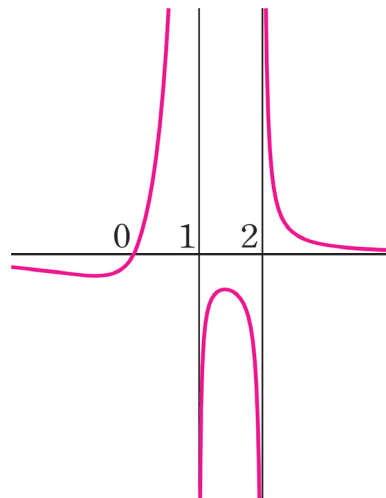
$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0-} = -\infty$ 이다.  $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0+} = \infty$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{0+} = \infty$ 이다.  $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{0-} = -\infty$ 이다.

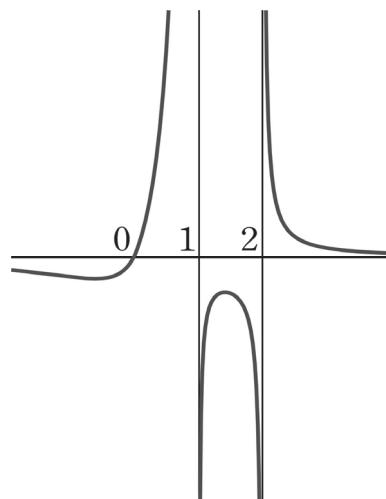
4.  $x$  축과의 교점은 원점 1개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



예상이 실제로 맞다!



$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 의 그래프 개형을 그려보자.

0. 로그함수가 나오면 모든 것을 멈추고 밑, 진수 조건을 따져야 한다.

$\ln x$ 는  $x > 0$ 에서만 정의된다.

1. 우함수나 기함수가 아니다.

2.  $x > 0$ 에서만 정의되기에  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 만 따지면 된다.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0+$ 를 표시하자.

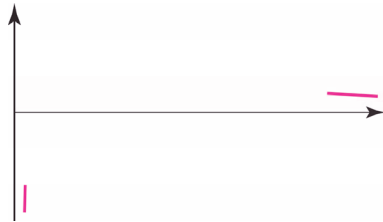


※  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0+$ 임을 어떻게 알아냈을까?

다항함수는 로그함수보다 더 큰 영향력을 가지므로  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = 0+$ 이다.

3. 함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 일 때 정의되지 않는다.  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty$ 이므로  $y = f(x)$ 는  $x = 0$ 에서

수직 점근선을 갖는다.  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty$ 를 표시하자.



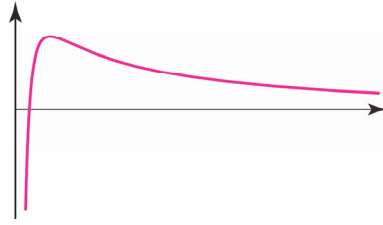
※  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty$ 임을 어떻게 알아냈을까?

$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0+} = -\infty$ 이다.

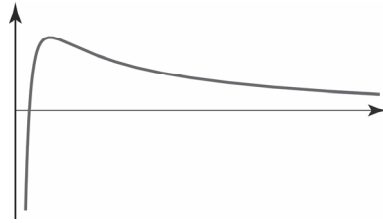
4.  $x$ 축과의 교점이 1개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



예상이 실제로 맞다!



$f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 의 그래프 개형을 그려보자.

0. 로그함수가 나오면 모든 것을 멈추고 밑, 진수 조건을 따져야 한다.

$\ln(x^2 + 1)$ 에서 항상  $x^2 + 1 > 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 실수 전체 집합에서 정의된다.

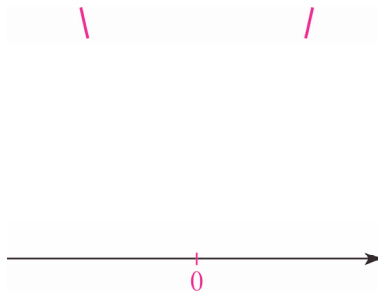
1. 우함수이다. 그래프가  $y$ 축 대칭임을 염두에 두자.

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 를 표시하자.

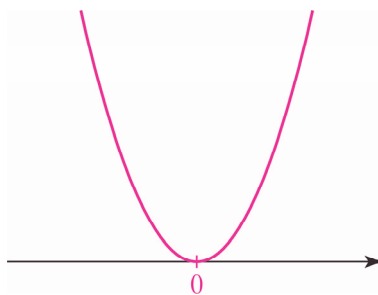


3. 함수  $f(x)$ 는 실수 전체 집합에서 정의가 되므로 수직 점근선을 갖지 않는다.

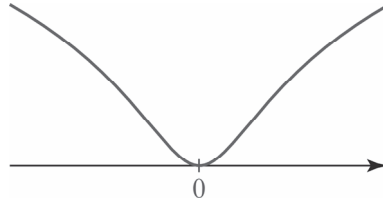
4.  $x$ 축과의 교점은 원점 1개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



예상이 실제와 살짝 다르다. 우리가 그린 그래프 개형은  $y = x^2 + 1$ 과 유사하다. 하지만  $x > 0$ 에서  $y = \ln x$ 는  $y = x$ 보다 증가속도가 훨씬 느리기에  $y = \ln(x^2 + 1)$  역시  $y = x^2 + 1$ 보다 증가속도가 훨씬 느리다. 이를 반영해 그래프 개형을 수정하면 아래와 같다.



**변곡점이 생긴다는 점에 주목하자.**

5가지만 순서대로 따져주면 그래프 개형이 비교적 쉽고 정확하게 그려진다는 것을 확인할 수 있다. 다만, 삼각함수×다항함수나 삼각함수×초월함수 끝은 실수 전체 집합이 아닌 삼각함수의 한 주기 내에서 5가지를 순서대로 따져주며 한 주기 내의 그래프 개형을 그려주자. 그 후에 실수 전체 집합에서의 그래프 개형을 그리면 된다.

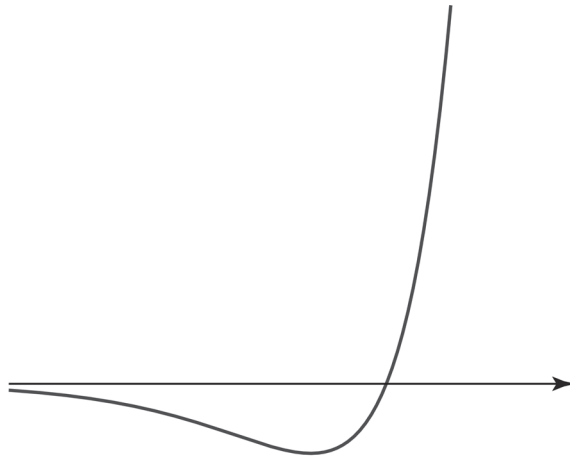
## ◇ 2. 암기해야 할 그래프 개형

자주 나오는 그래프 개형들을 소개한다. 전에 소개한 미분 없이 그래프 개형 그리기로 직접 그려보고 자연스럽게 암기하자.

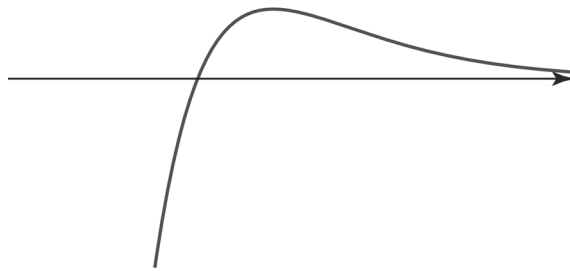
(1) (다항함수)  $\times e^{\pm x}$  꼴

최다 빈출 꼴이다. 다항함수 최고차항 계수가 음수이면  $x$ 축 대칭시키면 된다.

$y = xe^x$ , (일차함수)  $\times e^x$  꼴

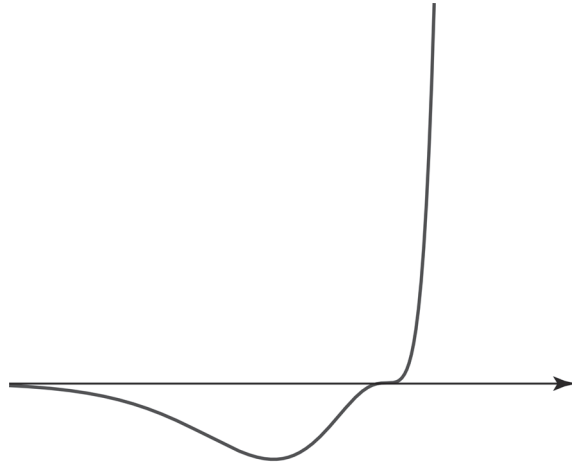


$y = xe^{-x}$ , (일차함수)  $\times e^{-x}$  꼴

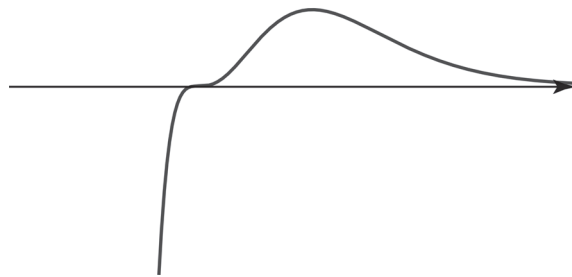




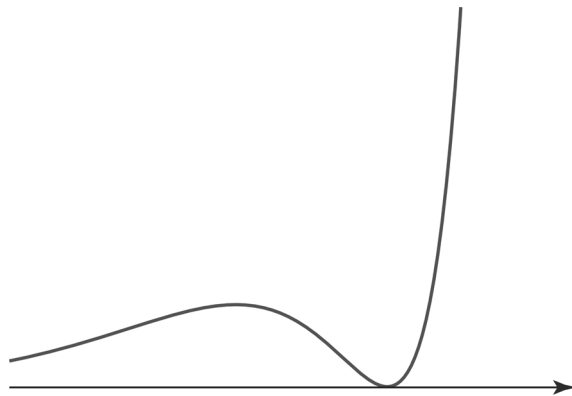
$$y = x^{2k-1}e^x \text{ 꼴 } (k \text{는 } 2 \text{ 이상의 자연수})$$



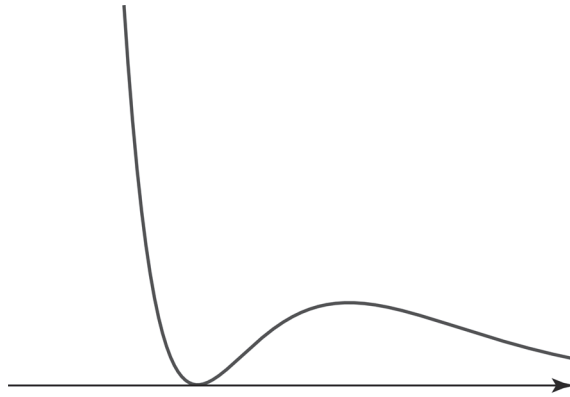
$$y = x^{2k-1}e^{-x} \text{ 꼴 } (k \text{는 } 2 \text{ 이상의 자연수})$$



$$y = x^{2k}e^x \text{ 꼴 } (k \text{는 자연수})$$

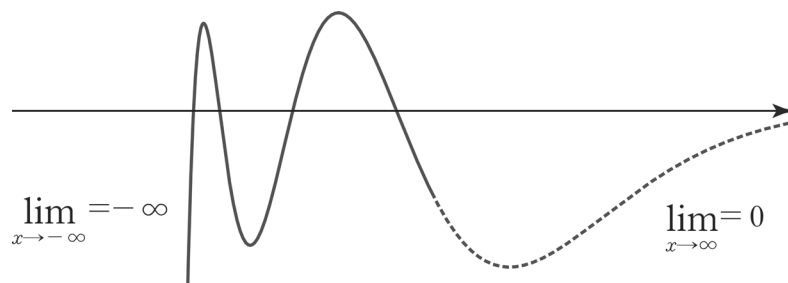


$y = x^{2k}e^{-x}$  꼴 ( $k$ 는 자연수)



결론적으로 (다항함수)  $\times e^{\pm x}$  꼴의 다항함수의 차수가  $n$ 일 때 실근의 개수가  $n$ 인 일반적인 경우, (다항함수)  $\times e^{\pm x}$  꼴은 다항함수 그래프처럼 그린 다음  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 의 값을 표시하면 된다.

예를 들어 최고차항 계수가 음수일 때 일반적인 (사차함수)  $\times e^{-x}$ 는 아래와 같이 그려진다. (사차함수가 서로 다른 실근 4개를 가질 때)



하지만 (다항함수)  $\times e^{\pm x}$  꼴의 다항함수의 차수가  $n$ 일 때 실근의 개수가  $n$ 이 아니라면, 미분을 하여 극대, 극소가 되는 지점의 수를 따져 그래프 개형을 그려야 한다.

(2) (다항함수) × ln x 또는 (분수함수) × ln x 꼴

$\frac{(\text{다항함수})}{(\text{다항함수})}$  꼴의 분수함수 중 분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같은 꼴을 ‘가분수 꼴’이라고 부르겠다.

이런 ‘가분수 꼴’은 ‘대분수 꼴’로 꼭 분리하자!

예를 들어  $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ ,  $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$ 로 바꿔주자. 등식의 우변을 ‘대분수 꼴’이라고 부르겠다. 그래프 개형을 그리거나  $x$ 에 대해 미분, 적분할 때 훨씬 유리하다.

다만, 분수함수가 우함수나 기함수일 때는 예외이다. 우함수나 기함수인 것을 쉽게 알아볼 수 있는 형태로 분수함수를 두는 것이 그래프 개형을 그릴 때 유리하다.

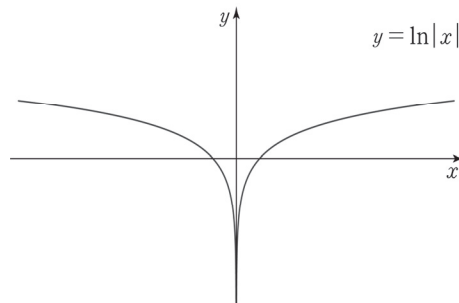
예를 들어  $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ 의 그래프 개형을 그릴 때는  $x - \frac{x}{x^2+1}$ 보다  $\frac{x^3}{x^2+1}$ 꼴일 때 기함수임을 쉽게

알아볼 수 있기 때문에  $y = \frac{x^3}{x^2+1}$  형태로 두고 그래프 개형을 그린다.

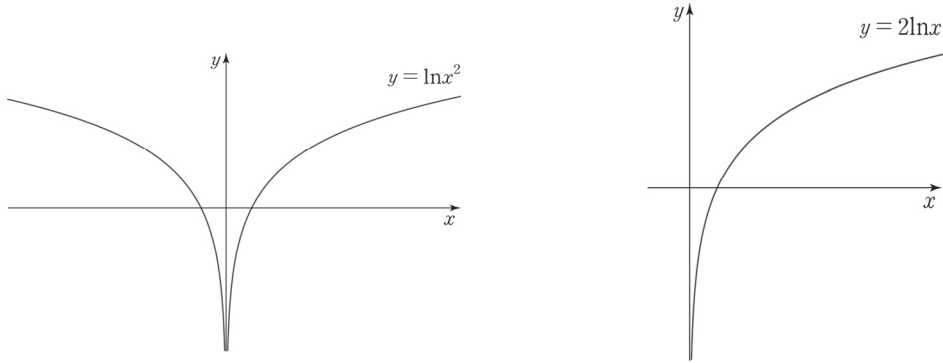
로그함수가 나오면 모든 것을 멈추고 밑, 진수 조건을 따져야 한다. 예를 들어  $\ln f(x)$ 를 보면  $f(x) > 0$ 임을 꼭 적어주자.

$y = \ln|x|$ 의 그래프를 그려보자.  $y = \ln|x|$ 은  $x \neq 0$ 에서 정의되는 함수이다.

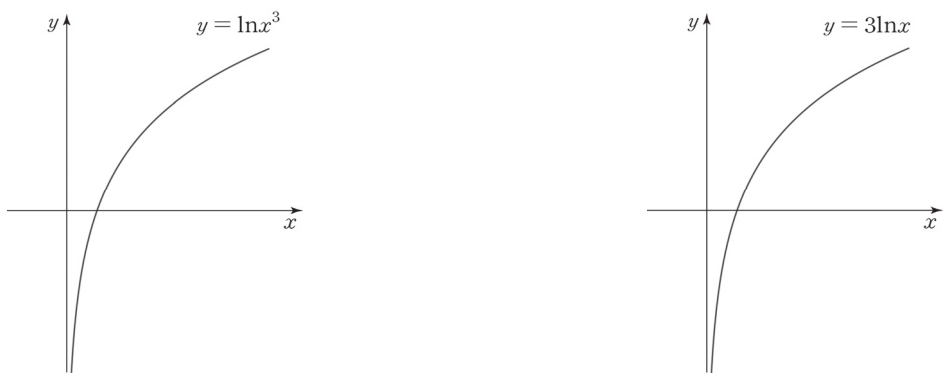
$y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & (x > 0) \\ \ln(-x) & (x < 0) \end{cases}$ 이다. 따라서  $y = \ln|x|$ 의 그래프는 아래와 같다.



$n$ 이 자연수일 때,  $\ln x^{2n} \neq 2n \ln x$ 이다.  $\ln x^{2n}$ 는  $x \neq 0$ 에서 정의되는 함수이고  $2n \ln x$ 는  $x > 0$ 에서 정의되는 함수이기 때문이다.  $x > 0$ 에서만  $\ln x^{2n} = 2n \ln x$ 이다. 따라서  $y = \ln x^2$ ,  $y = 2 \ln x$ 의 그래프는 아래와 같다.

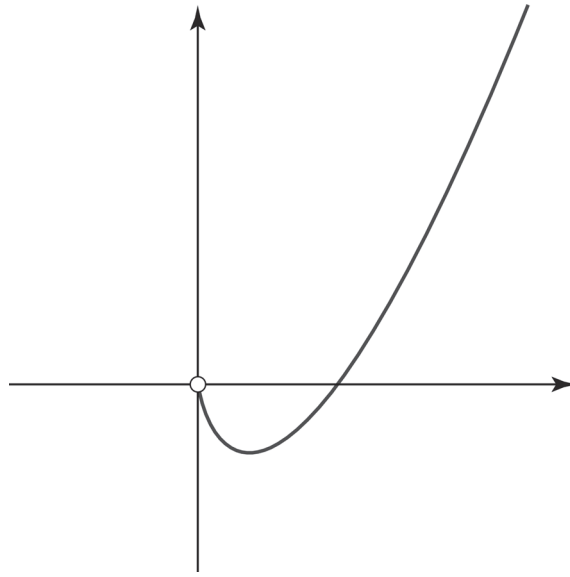


$n$ 이 자연수일 때,  $\ln x^{2n-1} = (2n-1) \ln x$ 이다.  $\ln x^{2n-1}$ ,  $(2n-1) \ln x$ 은 모두  $x > 0$ 일 때만 정의되기 때문이다. 따라서  $a > 1$ 일 때,  $y = \ln x^3$ ,  $y = 3 \ln x$ 의 그래프는 아래와 같다.

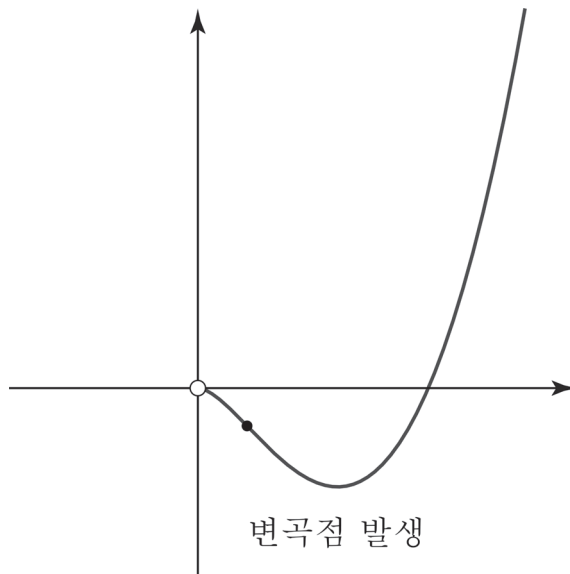


로그함수의 성질을 최대한 잘 이용하자.  $y = \ln 2x$ 는  $\ln 2 + \ln x$ 로 바꾸고,  $y = \log_2 x$ 는  $y = \frac{\ln x}{\ln 2}$ 로 바꾸자. 그래프 그릴 때도 수월하고 무엇보다도 미분할 때 실수를 줄일 수 있다.

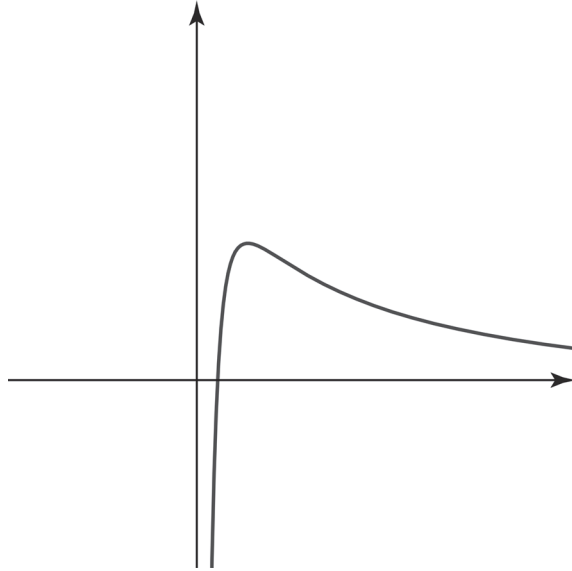
$$y = x \ln x \quad \text{끝} \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \right)$$



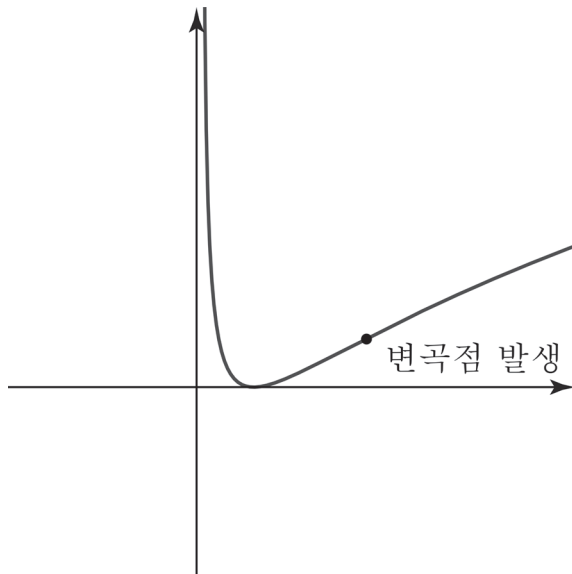
$$y = x^2 \ln x \quad \text{끝} \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \right)$$



$$y = \frac{\ln x}{x^n} \text{ 꼴 } (n \text{ 은 자연수})$$



$$y = (\ln x)^2 \text{ 꼴}$$



※  $y = \ln x$ 는 증가함수이고  $y = (\ln x)^2$ 는  $y = x^2$ 에  $y = \ln x$ 를 합성한 것이므로  $y = x^2$ 의 그래프 개형과 비슷하다는 것을 예측할 수 있다. 하지만  $x > 0$ 에서  $y = \ln x$ 는  $y = x$ 보다 증가속도가 훨씬 느리기에  $y = (\ln x)^2$  역시  $y = x^2$ 보다 증가속도가 훨씬 느리다. 따라서 그래프 개형을 그릴 때 변곡점이 생긴다는 것을 고려하자.

예제(1) 06학년도 수능 30번

양수  $a$ 에 대하여 닫힌 구간  $[-a, a]$ 에서 함수

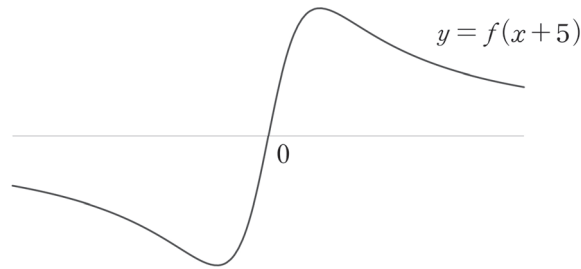
$$f(x) = \frac{x-5}{(x-5)^2+36}$$

의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라고 할 때,  $M+m=0$ 이 되도록 하는  $a$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]



1.  $y = f(x) = \frac{x-5}{(x-5)^2+36}$  는  $y = f(x+5) = \frac{x}{x^2+36}$  의 그래프를  $x$ 축 방향으로 5만큼 평행이동

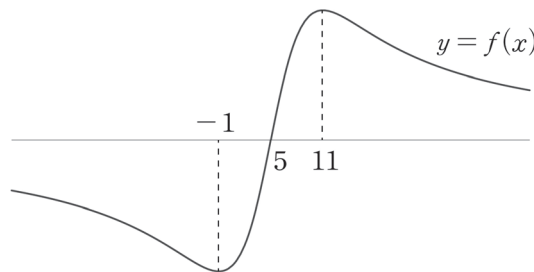
한 그래프이다.  $y = f(x+5) = \frac{x}{x^2+36}$  의 그래프 개형은 '미분 없이' 그리면 아래와 같다.



$y' = \frac{36-x^2}{(x^2+36)^2}$  이므로  $y = \frac{x}{x^2+36}$  는  $x=6$ 에서 극대이고,  $x=-6$ 에서 극소이다.

2. 따라서  $y = f(x+5) = \frac{x}{x^2+36}$  의 그래프를  $x$ 축 방향으로 5만큼 평행이동한

$y = f(x) = \frac{x-5}{(x-5)^2+36}$  의 그래프 개형은 아래와 같다.



$0 < a < 1$ 일 때,  $M+m \neq 0$ 이다.  $a = 1$ 일 때,  $M+m \neq 0$ 이다.

$a > 1$ 일 때,  $m = f(-1) = -\frac{1}{12}$ 이므로  $M+m=0$ 을 만족하려면  $M = f(11) = \frac{1}{12}$ 이어야 한다.

이를 만족하려면 닫힌 구간  $[-a, a]$ 이 닫힌 구간  $[-1, 11]$ 을 포함해야 하므로  $a \geq 11$ 이다.

따라서  $a$ 의 최솟값은 11이다.

답은 11!!

예제(2) 13학년도 수능 21번

함수  $f(x) = kx^2e^{-x}$  ( $k > 0$ )과 실수  $t$ 에 대하여 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(t, f(t))$ 에서  $x$ 축까지의 거리와  $y$ 축까지의 거리 중 크지 않은 값을  $g(t)$ 라 하자. 함수  $g(t)$ 가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는  $k$ 의 최댓값은? [4점]

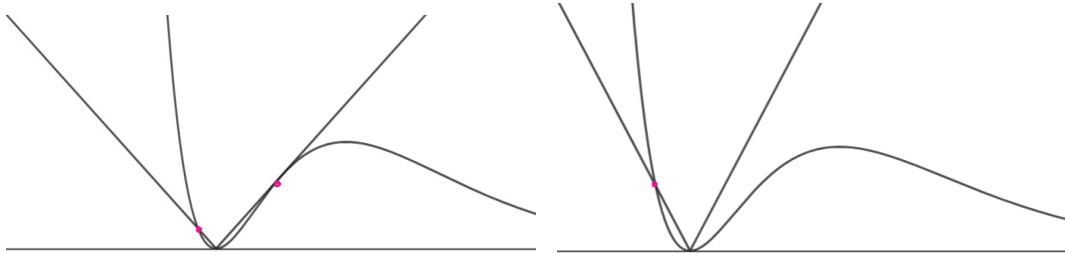
- ①  $\frac{1}{e}$       ②  $\frac{1}{\sqrt{e}}$       ③  $\frac{e}{2}$       ④  $\sqrt{e}$       ⑤  $e$



1. 함수  $f(x) = kx^2e^{-x}$ 의 그래프 개형은 ‘미분 없이’ 쉽게 그릴 수 있다.  
 점  $(t, f(t))$ 에서  $x$ 축과의 거리는  $|t|$ 이고  $y$ 축과의 거리는  $|f(t)|$ 이다.  
 $k > 0$ 이므로  $|f(t)| = f(t)$ 이다.

$$\text{따라서 함수 } g(t) = \begin{cases} f(t) & (f(t) \leq |t|) \\ |t| & (f(t) \geq |t|) \end{cases} \text{이다.}$$

2. 함수  $g(t)$ 가 미분가능하지 않은 점을 찾기 위해 함수  $y = |t|$ 와의 교점을 찾아보자.



$t < 0$ 에서  $y = f(t)$ 와  $y = |t|$ 의 접하지 않는 교점에서 함수  $g(t)$ 는 미분가능하지 않으므로  
 $t > 0$ 에서 곡선  $y = f(t)$ 와  $y = |t|$ 가 만나지 않거나 접하여야 함수  $g(t)$ 는 미분가능하다.  
 두 그래프가 접할 때  $k$ 값이 최대이므로 두 그래프가 접하는 상황인

$$\begin{cases} f(t) = t \\ f'(t) = 1 \end{cases} \text{를 만족하는 } t \text{ 값을 찾아보자.}$$

$$\begin{cases} kt^2e^{-t} = t \\ k(2t - t^2)e^{-t} = 1 \end{cases} \text{에서 } kte^{-t} = k(2t - t^2)e^{-t} = 1 \text{이므로 } t = 1, k = e \text{를 얻는다.}$$

답은 ⑤!!



예제(3) 14년 4월 교육청 30번

함수  $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ 의 극댓값을  $\alpha$ 라 하자. 함수  $f(x)$ 와 자연수  $n$ 에 대하여  $x$ 에 대한 방정식  $f(x) - \frac{\alpha}{n}x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를  $a_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

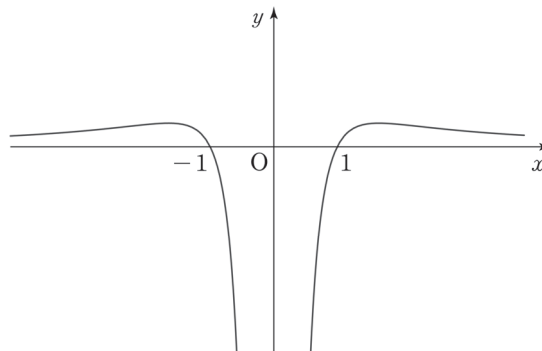


1.  $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ 는  $x \neq 0$ 에서 정의되므로 방정식  $f(x) = \frac{\alpha}{n}x$ 에서 양변을  $x$ 로 나눠서 생각하자.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\alpha}{n} \text{에서 } g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{로 두자.}$$

앞서 암기해야 할 그래프 개형을 충분히 숙지했다면  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x^2} = \frac{2\ln|x|}{x^2}$ 의 그래프를 그리는 것이 어렵지 않았을 것이다.

함수  $g(x)$ 는 우함수이므로 구간  $(0, \infty)$ 에서의 그래프를 먼저 그려주고  $y$ 축에 대하여 대칭시켜 구간  $(-\infty, 0)$ 에서의 그래프를 그리면 된다.



그래프 개형을 다 그렸으면 극댓값을 구하자.

$$g'(x) = \frac{2x(1-2\ln x)}{x^4} \quad (x > 0) \text{에서}$$

$$g'(\sqrt{e}) = 0 \text{이므로 극댓값은 } g(\sqrt{e}) = \frac{1}{e} \text{이고, 이는 최댓값이다.}$$

2. 직선  $y = \frac{\alpha}{n}$ 의 그래프를 구하기 위해  $\alpha$ 의 값을 구해보자.

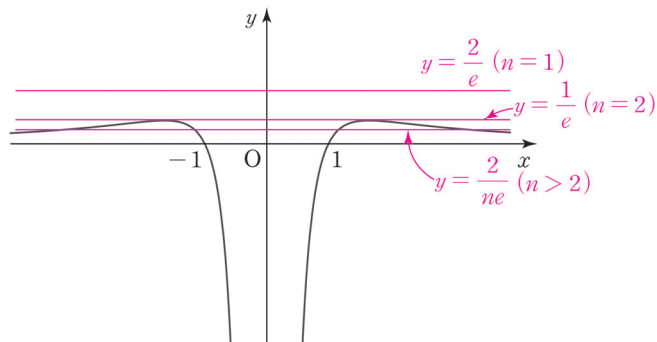
$$f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2} \quad (x > 0) \text{이므로 } f'(e) = 0 \text{에서 } \alpha = f(e) = \frac{2}{e} \text{이다.}$$

방정식  $g(x) = \frac{\alpha}{n}$ 의 근의 개수를 구하기 위해 함수  $g(x)$ 와 직선  $y = \frac{\alpha}{n} = \frac{2}{ne}$ 의 그래프를 그려 교점의 개수를 파악해야 한다.

따라서  $a_1 = 0, a_2 = 2,$

$a_n = 4 (n \geq 3)$  이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 0 + 2 + 4 \times 8 = 34 \text{이다.}$$



답은 34!!

comment

$g(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$ 를 단순히  $g(x) = \frac{2\ln x}{x^2}$ 로 바꾸어 실수하는 경우가 매우 많다. 로그함수가 정의되는 정의역 구간에 항상 신경을 곤두세우자. 또한 '곡선과 직선이 만나는 형태'로 풀며 실수한 경우도 있을 것이다.

예제(4) 18학년도 사관 28번

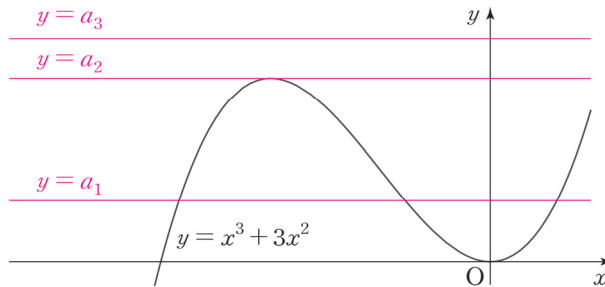
함수  $f(x) = (x^3 - a)e^x$  과 실수  $t$ 에 대하여 방정식  $f(x) = t$ 의 실근의 개수를  $g(t)$ 라 하자. 함수  $g(t)$ 가 불연속인 점의 개수가 2가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수  $a$ 의 값의 합을 구하시오. (단,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ) [4점]



1. 함수  $f(x)$ 의 개형은  $a$ 값에 따라서 개형이 달라진다.

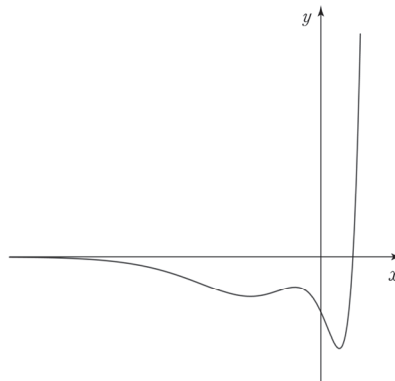
따라서 함수  $f(x)$ 의 그래프 개형을 그리기 위해  $f'(x)$ 를 구해서 접근해야 한다.

$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - a)e^x$ 에서  $e^x > 0$ 이므로  $y = x^3 + 3x^2$ 의 그래프와  $y = a$ 의 그래프의 관계를 이용하여 함수  $f(x)$ 의 그래프 개형을 파악하자.



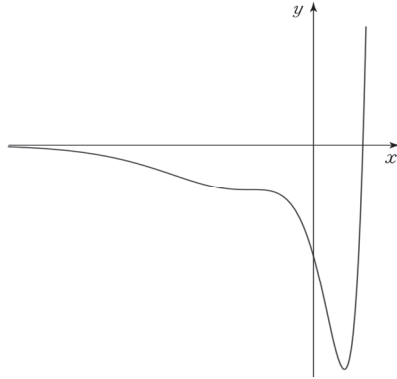
2. 이제 함수  $f(x)$ 의 그래프를 그려보자.

(1)  $y = a_1$  ( $0 < a_1 < 4$ )



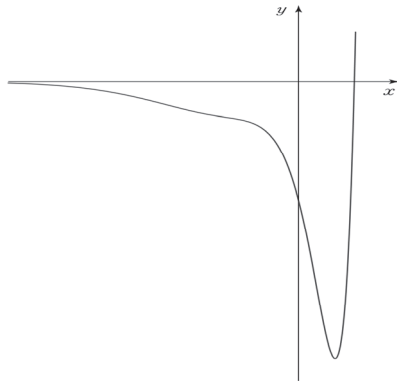
함수  $f(x)$ 의 극점은 3개이므로 함수  $g(t)$ 의 불연속인 점의 개수는 4이다.

(2)  $y = a_2$  ( $a_2 = 4$ )



함수  $f(x)$ 의 극점은 1개이므로 함수  $g(t)$ 의 불연속인 점의 개수는 2이다.

(3)  $y = a_3$  ( $a_3 > 4$ )



함수  $f(x)$ 의 극점은 1개이므로 함수  $g(t)$ 의 불연속인 점의 개수는 2이다.

따라서 발문의 조건을 만족하는 모든 자연수  $a$ 의 값의 합은  $\sum_{a=4}^{10} a = 55 - 6 = 49$ 이다.

답은 49!!

**comment**

(다항함수)  $\times e^{\pm x}$  꼴의 다항함수의 차수가  $n$ 일 때 실근의 개수가  $n$ 인 일반적인 경우,  
 (다항함수)  $\times e^{\pm x}$  꼴은 다항함수 그래프처럼 그린 다음  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 의 값을 표시하면 된다.

하지만 (다항함수)  $\times e^{\pm x}$  꼴의 다항함수의 차수가  $n$ 일 때 실근의 개수가  $n$ 이 아니라면,  
 미분을 하여 극대, 극소가 되는 지점의 수를 따져 그래프 개형을 그려야 한다.  
 이를 염두에 두지 않고 문제를 풀었다면 극점의 개수가 다르게 나와 오답을 냈을 것이다.

예제(5) 20년 10월 교육청 20번

자연수  $n$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{nx}{x^n + 1} & (x \neq -1) \\ -2 & (x = -1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

- ㄱ.  $n=3$ 일 때, 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, -1)$ 에서 증가한다.
- ㄴ. 함수  $f(x)$ 가  $x=-1$ 에서 연속이 되도록 하는  $n$ 에 대하여 방정식  $f(x)=2$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
- ㄷ. 구간  $(-1, \infty)$ 에서 함수  $f(x)$ 가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수  $n$ 의 값의 합은 24이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

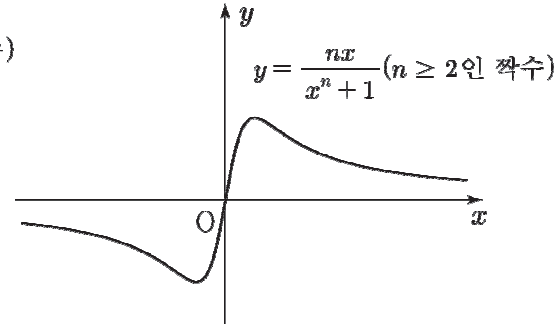
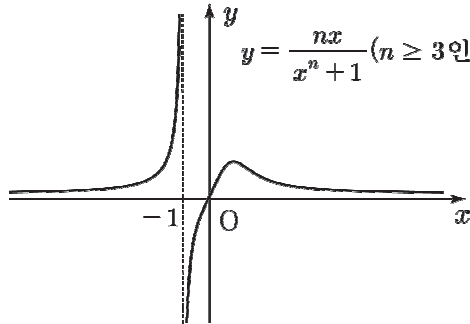
③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



1.  $y = \frac{nx}{x^n + 1}$  의 그래프는 '미분 없이' 그릴 수 있다.



$n$ 이 홀수일 때, 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, -1)$ 에서 증가한다. 선지 (㉠)은 참.

2. 함수  $f(x)$ 가  $x = -1$ 에서 연속이려면  $n$ 은 짝수여야 하고,  $f(-1) = \frac{-n}{2} = -2$ 에서  $n = 4$ 이다.

함수  $f(x)$ 의 극댓값을 구하기 위해 미분하자.  $f'(x) = \frac{n - (n^2 - n)x^n}{(x^n + 1)^2}$ 에서  $n = 4$ 일 때

$f'(x) = \frac{4 - 12x^4}{(x^4 + 1)^2}$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x = 3^{-\frac{1}{4}}$ 에서 극댓값을 갖는다.

$f\left(3^{-\frac{1}{4}}\right) = \frac{4 \cdot 3^{-\frac{1}{4}}}{\left(3^{-\frac{1}{4}} + 1\right)^2} = \frac{4 \cdot 3^{-\frac{1}{4}}}{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{3}{4}} > 2$ 이므로 선지 (㉡)은 참.

3. 함수  $f(x)$ 가 구간  $(-1, \infty)$ 에서 극솟값을 가지려면  $n$ 은 짝수여야 한다.

$f'(x) = \frac{n - (n^2 - n)x^n}{(x^n + 1)^2}$ 에서 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{-1}{\sqrt[n]{n-1}}$ 에서 극솟값을 갖는다.

(1)  $n = 2$ 일 때,  $x = -1$ 이므로 구간  $(-1, \infty)$ 을 벗어난다. (x)

(2)  $n \geq 4$ 일 때,  $x = \frac{-1}{\sqrt[n]{n-1}} > -1$ 이므로 구간  $(-1, \infty)$ 에 포함된다.

따라서 구간  $(-1, \infty)$ 에서 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 자연수  $n$ 은 4, 6, 8, 10이므로 합은 28이다. 선지 (㉢)은 거짓.

답은 ②!!

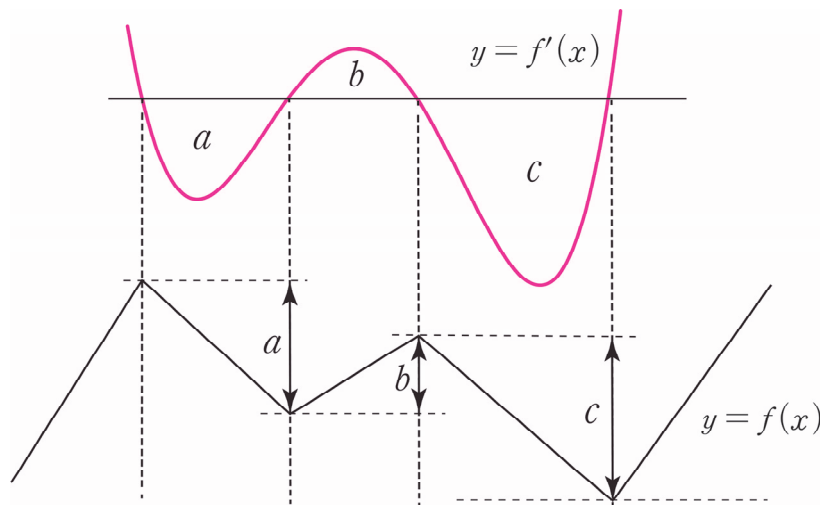
### ◆ 3. 미분을 이용한 그래프 그리기

$f(x)$ 가 미분가능한 함수라고 하자. 미분 없이 그래프 그리기가 잘 안 통할 때,  $y = f'(x)$ 로부터  $y = f(x)$  그래프 개형을 그려낸다.

어떤 구간에서  $f'(x)$ 의 정적분 값은  $f(x)$ 의 함숫값 차이이다.

$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ 를 이용하여  $y = f'(x)$ 로부터  $y = f(x)$ 의 그래프 개형을 알아낼 수 있다.

단,  $y = f(x)$  그래프의 정확한  $x$ 축 위치는 적어도 하나의  $f(k)$  값을 알아야 확정할 수 있다. ( $k$ 는 상수)



$a, b, c$ 는  $y = f'(x)$ 와  $x$ 축이 둘러싸인 넓이이다.  $y = f(x)$ 를 간편하게 위치럼 그렸지만 실제로는 smooth한 곡선임을 염두에 두자.