

2015학년도 리듬농구 직전 모의평가 A형 해설지

작성자 -BlueBirds-

들어가기에 앞서,

리듬농구 직전 모의평가는

다호라 학원의 선승범 선생님께서

(<http://www.dahora.co.kr>)

공개 무료 해설 강의를 제공해주십니다.

이 해설지는 해설 강의를 찾아듣기엔

해야 할 일이 너무 많은 막바지 수험생들을

배려하기 위해 제작했습니다.

허나, 해설 강의를 들을 여건이 되시는

학생 분들은 해설 강의를 들으시기를

추천합니다.

또한 해설 자체가 검토자 Bluebirds 개인이

문제를 검토할 때 푼 풀이대로 해설지를

작성했기 때문에 저자의 출제의도와 풀이가

많이 다른 부분은 저자의 의도대로

풀이했습니다.

이번 리농 직전을 통해

많이 얻어가셨으면 좋겠습니다.

-BlueBirds 올림-

1. 간단한 로그의 계산을 할 수 있는가.

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \text{ 이므로 } \log_2 9 \times \log_3 4$$

$$= \frac{\log 9}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} = 4 \quad \text{④번}$$

2. 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있는가.

$$A - E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \text{ 이므로 성분합은 } 3 \text{이다.} \quad \text{③번}$$

3. 정적분 값을 구할 수 있는가.

$$\int_0^1 4x^3 = [x^4]_0^1 = 1 \quad \text{①번}$$

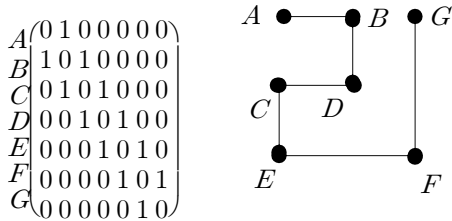
4. 그래프를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있는가.

그래프의 변의 개수가 6개 이므로
행렬의 모든 성분합 = 12

④번

c.f 행렬의 그래프

직접 그렸다면 큰고통이 따랐으리라 생각해봅니다...



5. 지수방정식의 근을 이차방정식을 통해 구할 수 있는가

$$2^x = t \text{ 로 치환하면 } t^2 - 16t + 64 = 0$$

$$(t-8)^2 = 0, t = 8$$

$$2^x = 8 \therefore x = 3$$

①번

6. 수열의 극한값을 구할 수 있는가

식을 정리하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 - \frac{\sqrt{4n+1}}{n} \right) = 10$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{n} = 0$$

⑤번

7. 확률의 덧셈정리를 이용할 수 있는가

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ 에서}$$

$$P(A) = P(A \cap B) = \frac{3}{4} \therefore P(A^c) = \frac{1}{4}$$

③번

8. 부분분수를 이용하여 무한급수의 수렴값을 구할 수 있는가

부분분수로 분해를 해주면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

②번

9. 로그함수의 그래프를 이해하고 있는가

$\overline{BC} = 16$ 에서

$$B(16, 4) \text{ 이므로 } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 16 \times 4 = 32$$

②번

10. 함수의 극한을 구할 수 있는가

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(-x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 2$$

$\therefore x = -t$ 로 치환해보면 쉽게 알 수 있음.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-0} f(-x) = 5$$

④번

11. 등비수열의 성질을 이해하고 있는가

$$a_n = a_1 r^{n-1}, a_8 = a_1 r^7 = 5$$

$$a_4 \times a_5 \times a_{11} \times a_{12} = (a_1 r^7)^4 = 5^4$$

④번

12. 로그를 수학 외적으로 활용할 수 있는가

$$I_1 = k \times 50^2 \times \log_3 3^{\frac{1}{5}}, I_2 = k \times 10^2 \times \log_3 3$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{50^2}{5 \times 10^2} = 5$$

①번

13. 중복조합을 이해하고 있는가

주사위를 던졌을 때 나올 수 있는 수는

$$2^1, 2^2 \dots 2^5, 2^6 \text{ 이다. } abc = 2^{\alpha+\beta+\gamma} = 2^6$$

$\alpha + \beta + \gamma = 6$ 에서

$\alpha - 1 = p, \beta - 1 = q, \gamma - 1 = r$ 로 치환하면

$p + q + r = 3$ ($p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$) 따라서

순서쌍의 개수는 중복조합에 의해 ${}_5C_3 = 10$

①번

14. 독립시행을 이해하고 이항분포에서의 분산을 구할 수 있는가

$n = 8$ 일때 주사위에 8의 눈이 적혀있을 확률

$$= 1 - \frac{{}^7C_6}{{}^8C_6} = \frac{3}{4}$$

주사위를 뽑는건 독립시행 이므로

확률변수 X 는 $B(64, \frac{3}{4})$ 을 따른다.

$$V(X) = 64 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 12$$

c.f.
저는 여사건이 편해보여서 여사건을 썼지만
그냥 확률 구해도 상관없고 좋던데... 난 왜 그랬을까....

④번

15. 접선의 방정식을 이해하고 있는가

접선 $y = f'(2)(x-2) + 9$ 가 (3,2) 를 지나므로

$$a = f'(2) + 9$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad \therefore a = 21$$

⑤번

16. 정적분의 정의를 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있는가

식을 적절히 변형하면

$$\frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 64 \left(\frac{k}{n}\right)^6 \text{ 이고}$$

정적분과 무한급수의 관계에 의해

$$\int_0^1 64x^6 dx = \frac{64}{7} = \frac{2^6}{7}$$

②번

17. 수열의 점화식을 통해 일반항을 구할 수 있는가

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$= \quad \vdots \quad = 1 - \frac{1}{n!}$$

$$\frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$

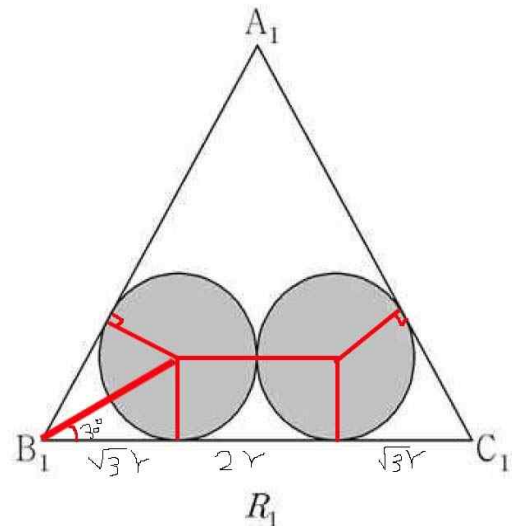
$b_1 = 1$ 이므로

$$b_n = 2 - \frac{1}{n!} \quad a_n = 2n - \frac{1}{(n-1)!}$$

$$g(6) - f(5) = 10$$

②번

18. 무한등비급수를 도형에서 활용할 수 있는가



정삼각형에 내접하는 원의 반지름을 r 이라고 하면

$$BC = 2 = 2(1 + \sqrt{3})r$$

$$r = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$S_1 = 2\pi r^2 = 2 \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2 \pi = (2 - \sqrt{3})\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{(2 - \sqrt{3})\pi}{1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}} = \frac{(4\sqrt{3} - 6)\pi}{3}$$

③번

19. 두 행렬방정식에서 높은 차수의 행렬을 간단하게 바꿀 수 있는가

ㄱ. 참

$$(A^2 + E)B = E \text{ 에서 } B^{-1} = A^2 + E$$

해설지에 대한 모든 저작권은 BlueBirds 에게 있습니다.

오류&오타 및 문의는 (5xowns@naver.com) 으로 메일 또는 쪽지 남겨주세요..

ㄴ.참

B^{-1} 이 A 와 E 로 나타내어지는 식이므로
 $AB^{-1} = B^{-1}A$ 가 성립한다. 이 등식에
 왼쪽 오른쪽에 B 를 한번씩 곱해주면
 $AB = BA$

ㄷ.참

$AB = BA$ 이므로
 $A^2 - B^2 = -B, A^2 + E = B^{-1}$ 이므로
 $A^2 + E = B^2 - B + E, B^{-1} = B^2 - B + E$
 양변에 B 를 곱해주면 $E = B^3 - B^2 + B$
 $(B - E)(B^2 + E) = 0$ 이다.
 A 의 역행렬이 존재하면 A^2 의 역행렬도 존재하고
 $A^2 = B(B - E)$ 이므로 $(B - E)$ 의 역행렬도 존재한다.
 따라서 $(B - E)$ 의 역행렬을 곱해주면
 $B^2 = -E$
 $B^{2015} = (B^2)^{1007} \times B = -B$

Ps. 검토할때 이렇게 풀었습니다.

ㄷ

$AB = BA$ 이므로
 $A^2 - B^2 = -B$, 이항해주면 $A^2 = B(B - E)$
 $B - E = -A^2B$ 이므로
 $A^2 = -BA^2B, AB = BA$ 이므로
 $A^2 = -A^2B^2, A$ 가 역행렬이 존재하므로 곱해주면
 $E = -B^2$ 이다. $B^2 = -E$
 $B^{2015} = (B^2)^{1007} \times B = -B$

⑤번

20. 표준정규분포를 이해하고, 최댓값을 구할 수 있는가

표준화 해주면

$$P\left(4 \frac{a-50}{20} \leq Z \leq 4 \frac{b-50}{20}\right), b-a=20 \text{ 이므로}$$

$$P\left(\frac{b-70}{5} \leq Z \leq \frac{b-50}{5}\right) \text{ 이 최댓값을 가져야 한다.}$$

표준정규분포 곡선은 평균 0에 대하여 대칭이므로

$$\frac{1}{2} \left(\frac{b-70}{5} + \frac{b-50}{5}\right) = 0 \text{ 이면 최댓값을 가진다.}$$

$$b=60, a=40$$

$$2a+b=140$$

③번

21. 함수의 연속성과 극한값의 존재성을 정확히 이해하고 있는가

$$g(2) = f(0) = 0 \text{ 이므로 인수정리에 의해}$$

$$f(x) = x(x-a)(x-b)$$

$$g(x) = k(x-2)(x-c) \text{ (단 } a, b, c, k \text{는 실수, } k \neq 0 \text{)}$$

라고하면 조건 (가)에 의해 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ 가 존재해야하므로

$$f(x) = x(x-2)(x-b)$$

$$\text{조건 (나)에 의해 } \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{k(x-c)}{x(x-b)} \text{ 에서}$$

b 의 범위가 $b \leq 0$ or $b = 2$ 로 제한된다.

$$f(x) = x(x-2)(x-b)$$

$$f(5) = 15(5-b), \text{ 최소는 } b=2 \text{ 일때다.}$$

$$f(5) \text{의 최솟값} = 45$$

①번

22. 함수의 극한값을 구할 수 있는가

분모 분자 둘다 영이 아닌 실수로 수렴하므로
 2를 대입해주면 9

9

23. 미분계수를 구할 수 있는가

$$f'(x) = 2x + 1 \text{ 이므로}$$

$$f'(100) = 201$$

201

24. 행렬을 연립방정식에서 활용할 수 있는가

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 은 역행렬을 가지므로 역행렬을 곱해주면

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

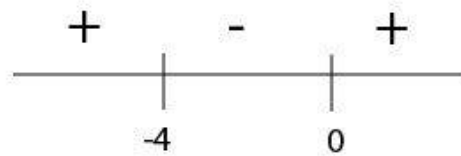
$$\therefore a + b = 5$$

5

25. 닫힌 구간에서의 함수의 최댓값을 미분을 통하여 구할 수 있는가

$f(x)$ 의 증감을 알아보기 위해

미분한 뒤 부호표를 그려보면 다음과 같으므로



닫힌구간 $[-4, 0]$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은

$f(-4)$ 임을 알 수 있다.

$$f(-4) = 39$$

39

26. 정적분으로 나타난 함수를 미분을 통하여 구할 수 있는가

양변을 미분하면

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \text{ 이다}$$

$$f(1) = 10$$

10

해설지에 대한 모든 저작권은 BlueBirds 에게 있습니다.

오류&오타 및 문의는 (5xowns@naver.com) 으로 메일 또는 쪽지 남겨주세요..

27. 등차수열의 성질을 이해하고 있는가

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ 라고 하면}$$

조건식에 $n=1$ 을 대입하면
 $2a_1 = -4$ 이므로 $a_1 = -2$
 $n=2$ 를 대입하면
 $a_1 + 2a_2 + a_3 = 4a_1 + 4d = 0$
 $a_1 = -2, d = 2$
 $a_{20} = a_1 + 19d = 36$

36

28. 정적분과 부정적분사이의 관계를 이해하고 있는가

$$\int f(x)dx = F(x) \text{ 라고 하면}$$

문제조건에 정적분값은
 $F(n+1) - F(2) - F(n) + F(1)$ 이므로
 $F(n+1) - F(n) + F(1) - F(2) = 2n - 2$
 $= \int_n^{n+1} f(x)dx + \int_2^1 f(x)dx = 2n - 2$
 이다.

$$\int_1^9 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_8^9 f(x)dx$$

따라서 구하는 정적분값은 $\sum_{n=1}^8 2n - 2 = 56$ 이다.

56

29. 지표와 가수의 성질을 이용하여 주어진 집합을 이해하고 만족하는 상황을 찾을 수 있는가.

먼저 집합 A_n 와 B_n 의 의미를 알아봅시다.

집합 A_n

$\log x$ 의 가수에 자연수 n 을 곱했을 때 지표와 값이 같으면 $\frac{1}{f(x)}$ 을 원소로 가지는 집합 (단, 지표는 0이 아님)

집합 B_n

$\log x$ 의 가수에 자연수 n 을 곱했을 때 지표와 값이 같으면 $g(x)$ 를 원소로 가지는 집합
 이제 A_n, B_n 을 직접 구해보면

n	A_n	B_n
1	\emptyset	0
2	1	$0, \frac{1}{2}$
3	$1, \frac{1}{2}$	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

4	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$	$0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$
5	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$	$0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$
6	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	$0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$
7	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$	$0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$
8	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$	$0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$
9	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$	$0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$
16	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}$	$0, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \dots, \frac{14}{16}, \frac{15}{16}$
25	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}$	$0, \frac{1}{25}, \frac{2}{25}, \dots, \frac{23}{25}, \frac{24}{25}$
k	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k-2}, \frac{1}{k-1}$	$0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-2}{k}, \frac{k-1}{k}$

(회색 음영 부분은 조건을 만족하는 자연수입니다.)

나열을 하다보면 n^2 에 해당하는 수가 뭔가 되는 것 같습니다. 그런데 4^2 을 나열했더니 조건을 만족하지 않습니다. 따라서 소수의 제곱수 일 것 이라는 추론이 가능합니다.
 $n^2 < 1000$ 이므로 $0 < n < 32$ 이고 그중 소수를 찾으면 11개입니다.

이렇게 귀납적으로라도 추론을 해서 답을 내는건 중요합니다. 하지만 100%논리적이지는 못하므로 논리를 채우기 위해 생각을 해보면 먼저 A_n 와 B_n 이 교집합을 가지려면

A_n 은 분모가 1씩 증가하고 분자가 1

B_n 은 분모는 n이고 분자가 1씩 증가

하므로 교집합이 생긴다면 그 원소는

$\frac{1}{r}$ 꼴의 분수 일 것이다.(r은 어떤 자연수)

그런데 A_n 와 B_n 이 동시에 $\frac{1}{n}$ 을 가질 수 없으므로 $n = k^2$ 일 때를 생각해 주어야 한다.

(그래야 약분이 되어서 $\frac{1}{n}$ 을 가진다.)

$n = \begin{cases} (\text{소수})^2 \\ (\text{소수가 아닌 자연수})^2 \end{cases}$ 으로 분할하면,

n이 소수가 아닐 때는 또다른 소수에서 약분이 되어 교집합이 2개 이상이 되어버린다. 즉 $n = a^2 \times b^2$ 이라고 하면

$$A_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{a^2 \times b^2 - 1}$$

$$B_n = 0, \frac{1}{a^2 \times b^2}, \frac{2}{a^2 \times b^2}, \dots, \frac{a^2 \times b^2 - 2}{a^2 \times b^2}, \frac{a^2 \times b^2 - 1}{a^2 \times b^2}$$

$$A_n \cap B_n = \left\{ \frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2} \right\} \text{를 무조건 가진다.}$$

따라서 모순이다.

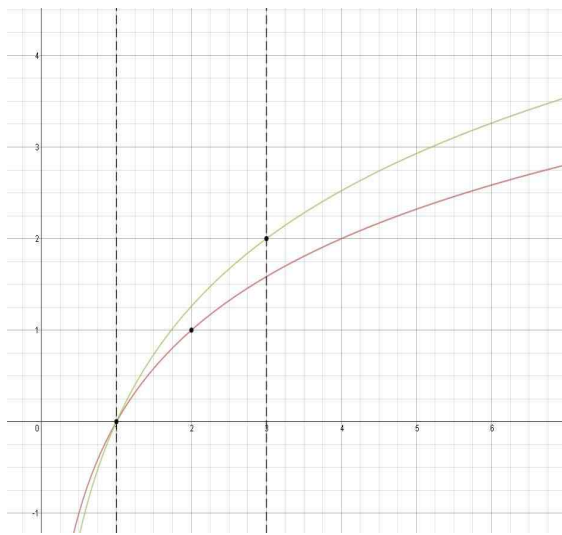
11

30. 로그함수를 이용하여 새롭게 정의된 함수의 함수값을 구할 수 있는가

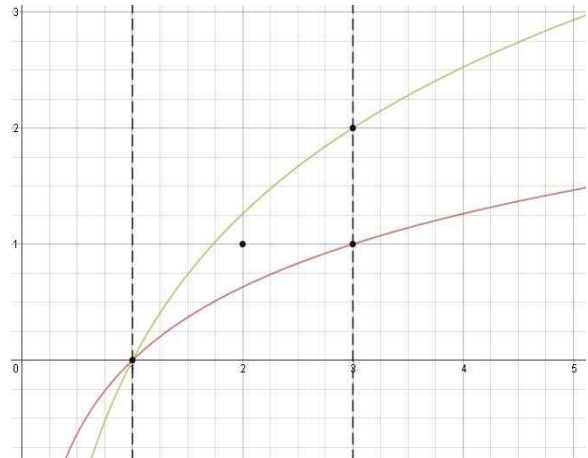
지수&로그 카운트 문제풀이에서 가장 중요시 해야 할 부분은 문제에 주어진 지수 OR 로그함수의 구조를 파악 하는 것입니다. 출제자는 친절하게도 예시를 통해 구조를 조금 쉽게 파악할 수 있습니다.

- 수비독자들은 part4 예시와 상황축소의 적용이 가장 주요한 부분이 이 부분임을 굳이 짚어 말하지 않아도 아시겠죠 ?-

이 문제도 주어진 예시를 먼저 좌표평면상에 그려보면 다음과 같습니다.



두 그래프가 항상 (1.0)을 교점으로 가지므로 결국 구하고자 하는 부등식이 그리는 도형안에 정수점이 a개 있으면 됨을 알 수 있습니다. 하지만 아직 구조를 다 파악하지 못했으므로 다음 예시인 f(3)을 좌표평면상에 그려 보면 다음과 같습니다.

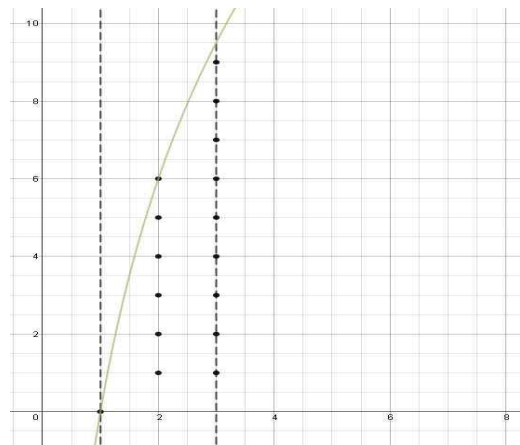


$a > 3$ 일 때 $1 \leq x \leq 3$ 의 범위에서 $\log_a x$ 가 그리는 그래프의 모든 함수값 < 1 입니다. 간단히 말하면, a 가 3보다 크면 그래프가 1 아래 그려진다! 입니다.

이제 구조가 보인다!

그러면 결국 문제를 풀기위해 중요한 것은 $\log_b x$ 의 그래프로 인하여 그려지는 영역에 정수점이 a 개 들어가 있어야 합니다.

따라서 $b = 2^{\frac{1}{6}}$ 일 때 그래프를 그려보면



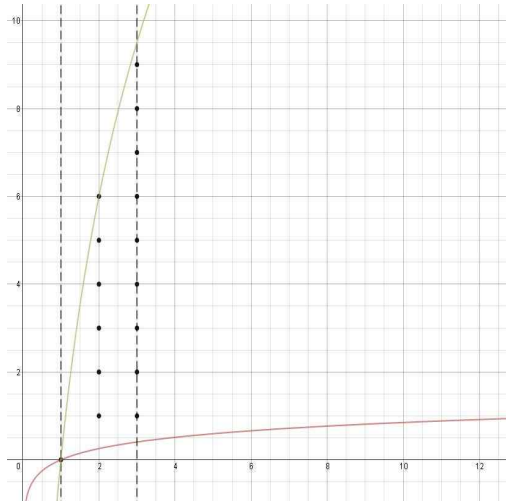
이므로 $a=15$ 입니다.

15

2015학년도 리듬농구 직전 모의평가 A형 해설지

작성자 -BlueBirds-

cf. $a=15$ 완성된 그래프.



감사합니다. :D