숨겨진 역함수의 발견과 부분역함수

1. 숨겨진 역함수의 발견

역함수를 “$f(x)$의 역함수”, “$f^{-1}(x)$”, “$x=f(y)$” 같은 표현으로 직접 표시해준다면 문제를 풀기 매우 편하다. 하지만 평가원에서, 최근 사설에서도 역함수를 숨겨진 형태로 제시하는 경우가 꽤 자주 등장하고 있다. 지금까지 평가원에서 이 숨겨진 역함수를 발견하지 못하면 답을 낼 수 없는 문제를 출제하지는 않았지만, 답을 낼 수 없는 문제도 충분히 출제 가능하니 이 주제를 자세히 이해해보자.

예를 들어, 다음과 같은 식이 있다.

$$\ln f(t)+f(t)-t=0$$

이때, $f'(e+1)$과 $\displaystyle\int_1^{e+1} f(x)dx$의 값을 각각 구해보자. (참고 : $\ln e+e=e+1$)

$f'(e+1)$의 값은 굳이 역함수로 접근하지 않더라도 다음과 같이 구할 수 있었을 것이다.

sol1) $\ln f(e+1)+f(e+1)=e$에서, $f(e+1)=e$.

준 식의 양변을 미분하고 대입하면 $\dfrac{f'(e+1)}{f(e+1)}+f'(e+1)=1$이므로 $f'(e+1)=\dfrac{e}{e+1}$

다만, 이 방법으로는 적분값을 구할 수 없다. 따라서 다음과 같이 $f(t)$를 역함수로 이해하여야 한다.

sol2) $\ln f(t)+f(t)=t$에서, $f(t)$는 함수 $g(t)=\ln t+t$의 역함수임을 알 수 있다.

이때, $g(e)=e+1, f(e+1)=e$이다. 따라서, $f'(e+1)=\dfrac{1}{g'(e)}=\dfrac{e}{e+1}$

이제 적분값을 구하자. $\displaystyle\int_1^{e+1} f(x)dx$에서, $f(x)=t$로 치환하면, $x=g(t), dx=g'(t)dt$

$g(e)=e+1,\ g(1)=1$이므로, $\displaystyle\int_1^{e+1} f(x)dx=\int_1^{e} tg(t)dt=\int_1^{e} t(\ln t+t)dt$

계산하면, $-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{1}{12}$ (숫자가 지저분하다. ㅠㅠ)

물론 역함수의 적분값은 기하적으로 접근하여도 좋다. 마음에 드는 방식으로 하자.

위 예시를 통해 대충 숨겨진 역함수의 발견이 무엇인지 감을 잡았을 것이다.
결론은 함수가 **t=(f(t)에 관련된 식)**의 꼴로 정리될 수 있다면, 역함수로 접근할 수 있다는 것을 기억하자는 것이다.

2. 부분 역함수

함수가 일대일대응일때만 역함수가 존재한다는 것을 잘 알고 있을 것이다. 그런데 일대일대응이 아닌 일반적인 함수도 구간을 어떻게 설정하느냐에 따라 특정 구간에서는 역함수를 가질 수 있을 것이다.

예를 들어 함수 $y=x^2$에 대해 생각해보자. 함수 $y=x^2$은 역함수를 가지지 않는다. 하지만 구간을 $[0,\infty)$로 설정하면, $y=\sqrt{x}$로 역함수를 가질 수 있다. 같은 방법으로 구간을 $(-\infty,0]$로 설정하면, $y=-\sqrt{x}$로 역함수를 가질 수 있다.

따라서 함수가 일대일대응이 아니라도 상황에 맞춰 적절한 구간을 선택한 후 역함수로 해석할 수 있다. 이와 같은 방식으로 정의되는 역함수를 부분역함수라 하자.

3. 적용 - 1 181121(가)

21. 양수 t에 대하여 구간 $[1,\infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \ln x & (1\le x<e) \\ -t+\ln x & (x\ge e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\}\ge 0$ 이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)\times h'(a)$의 값은? [4점]

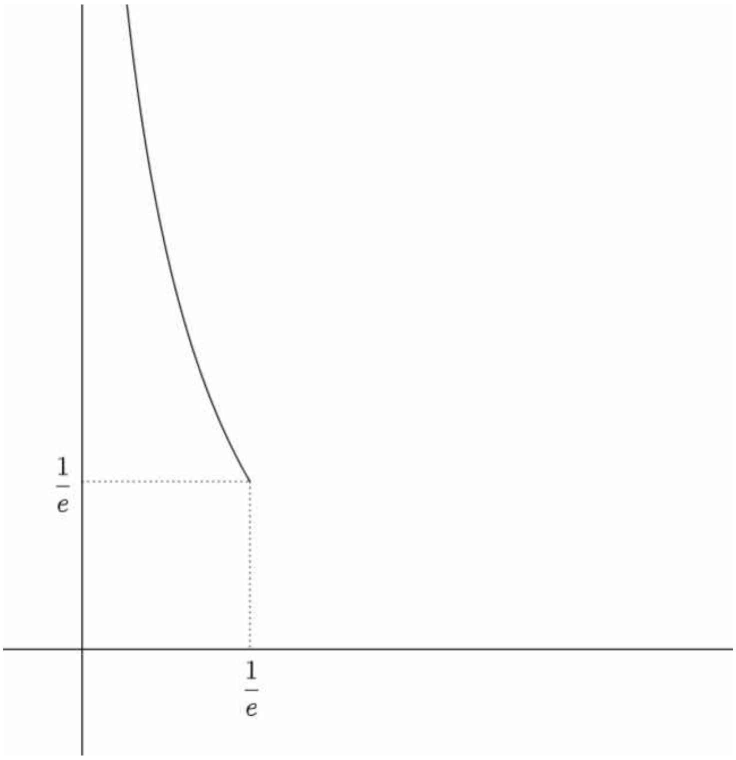
① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$

④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

이 문제는 역함수를 발견하지 못해도 답은 낼 수 있는 경우에 속한다. 그도 그럴것이 미분계수를 묻고 있기 때문이다. 마지막 계산 처리과정에서 어떻게 역함수를 발견할 수 있는지에 대해 살펴보자.

이 문제에서 $h(t)$는 $0 < t \leqq \frac{1}{e}$에서 $\frac{-t+1}{e-1}$이고, $t > \frac{1}{e}$에서 $h(t) - 1 = t + \ln h(t)$이다.

$t > \frac{1}{e}$인 구간을 주목하자. $t = h(t) - \ln h(t) - 1$이므로, $h(t)$는 함수 $k(t) = t - \ln t - 1$의 부분 역함수이다. 원래 식에서 $t > \frac{1}{e}$이였으므로, $k(t) > \frac{1}{e}$이다. $k(t)$는 역함수를 가지지 않지만 적절한 구간 설정을 통해 역함수를 가지게 할 수 있다. 주어진 상황에서 $h(t)$는 감소하므로 $k(t)$가 감소하는 부분만을 사용하면 되겠다. 그래프는 다음과 같다.



$h(a) = \frac{1}{e+2}$에서, $k(\frac{1}{e+2}) = a$이므로 $h'(a) = \frac{1}{k'(\frac{1}{e+2})}$이다.

$k'(t) = 1 - \frac{1}{t}$이므로, $h'(a) = \frac{1}{-(e+1)}$이다.

적용 2 - 1611(B)21

21. $0<t<41$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 세 점 중에서 x 좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x 좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$ 라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$ 라 할 때, $h'(5)$ 의 값은? [4점]

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

역시 역함수로 보지 않아도 풀 수 있지만, 꽤 계산이 길어진다. 여기서는 부분역함수를 활용하여 풀어보자.

일단 $h'(5)=f(5)-g(5)+5(f'(5)-g'(5))$이다.

$x^3+2x^2-15x+5=5$에서, $f(5)=3, g(5)=-5$이다.

$k(x)=x^3+2x^2-15x+5$라 두면, $k(f(t))=t, k(g(t))=t$에서 $f(t), g(t)$는 $k(t)$의 부분역함수임을 알 수 있다. 이때, $f(t), g(t)$를 포함하고 $k(x)$가 역함수를 갖는 적절한 구간을 설정할 수 있다.

따라서 $f'(5)=\frac{1}{k'(3)}, g'(5)=\frac{1}{k'(-5)}$이다. 계산해주면 답은 $\frac{97}{12}$

적용 3) 자작문제

x좌표가 양수인 x축 위의 점 P에서 곡선 $y=e^x$에 그은 접선이 y축과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 POQ의 넓이가 $\frac{t}{2}$일 때, 점 P의 x좌표를 $f(t)$라 하면 $\int_0^{e^2} f(t)dt=pe$이다. p의 값을 구하시오. (단, p는 자연수) [4점]