x

미지수

: 수학실력 상승의 무한한 가능성

Contents

3 기하

평면벡터의 분해와 합성

공간도형에서의 상황파악

4 수학 2 & 미적분

합성함수 그래프 쉽게 그리기

합성함수의 연속성 판단 방법

구간별로 정의된 함수 파악하기

절댓값으로 표현된 함수의 미분 가능성

절댓값으로 표현된 함수의 적분

무한등비급수와 도형

적분으로 표현된 함수의 미분

수능의 기본: 중등수학

Ⅰ. 삼각형 : 합동

가장 기본적인 도형인 삼각형부터 살펴봅시다. 삼각형 사이의 관계들 중 대표적인 두 가지는 바로 합동과 닮음입니다.

1. 합동

두 삼각형이 합동일 조건에는 세 가지가 있습니다. 바로 SSS 합동, SAS 합동, ASA 합동입니다. 각각의 조건을 자세히 살펴봅시다.

1) SSS 합동 : 세 변의 길이가 같은 두 삼각형은 합동이다.
2) SAS 합동 : 두 변의 길이와 끼인각의 크기가 같은 두 삼각형은 합동이다.
3) ASA 합동 : 한 변의 길이와 그 변에 인접한 두 각의 크기가 같은 두 삼각형은 합동이다.

위의 조건들은 누구나 한 번쯤 들었고 기억할 만한 조건입니다. 그렇기에 크게 의미가 없어 보일 수 있습니다. 하지만 문제를 풀면서 위 조건들을 다시 떠올려야 하는 이유는 명확합니다. 바로, 위의 세 조건이 삼각형이 유일하게 결정될 조건을 말해주고 있기 때문입니다.

평면기하와 엮인 수능 문제에서는 결국 논증(및 삼각함수)을 통해 각의 크기나, 변의 길이를 구하는 것이 핵심이 됩니다. 이때 삼각형에서 변의 길이 또는 각의 크기를 구해야 한다면, 위의 조건 중 하나를 만족시킬 정도의 정보만 찾아내면 됩니다.

조금 더 구체적으로 살펴볼까요? SSS 합동 조건이 말해주는 것은, 삼각형의 세 변의 길이만 알 수 있다면 삼각형은 유일하게 결정된다는 것입니다. 즉 세 각의 크기, 넓이, 수선의 발의 길이 … 등등 다른 모든 값 역시 유일하게 결정된다는 뜻입니다. 특히 세 각의 크기가 결정된다는 것이 핵심적인데, 세 변의 길이와 각의 크기를 연결해주는 정리가 바로 제2 cos 정리입니다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$ [1]

위 관계식(제2 cos 법칙)은 결국 삼각형 세 변의 길이와 삼각형의 각 사이의 관계를 보여 주는 정리로 이해할 수 있습니다. a, b, c를 통해서 $\cos A$를 알아낼 수 있고, 이는 각 A를 알아내는 것과 같기 때문입니다. 이런 방식으로 코사인 법칙을 바라본다면, 제2 cos 법칙은 '세 변의 길이를 통해 결정된 삼각형'에서 각의 크기를 알아낼 수 있게 해주는 공식이 됩니다.

다음으로는 SAS 합동에 대해 살펴봅시다. 이 조건이 말해주는 것은, 삼각형 두 변의 길이와 끼인

1) 앞으로 특별한 말이 없다면 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$의 길이를 각각 a, b, c로 표기합니다.

각만 알면 삼각형이 유일하게 결정된다는 뜻입니다. 두 변의 길이와 끼인각을 통해서 다른 한 변의 길이를 알아낼 수 있는데, 이때 역시 제2 cos 법칙이 활용됩니다.

제2 cos 법칙에서 b, c, A를 안다면 그대로 대입해서 a를 찾을 수 있습니다. 이때 제2 cos 법칙은 '두 변의 길이와 끼인각을 통해 결정된 삼각형'에서 다른 한 변의 길이를 알아낼 수 있게 하는 공식이 됩니다. 이제 삼각형 세 변의 길이를 전부 알 수 있으므로, A가 아닌 다른 각의 크기를 알고 싶다면 위의 SSS 합동에서 했었던 것처럼 알아내면 됩니다. (물론 각을 구할 수 있는 다른 편리한 방법도 많겠지만, 이 글에서는 가장 일반화하기 쉬운 방법으로 서술하였습니다.)

마지막으로 ASA 합동 조건에 대해 살펴봅시다. 이 조건은 삼각형의 한 변의 길이와 세 각을 준다면 삼각형이 유일하게 결정됨을 말하고 있습니다. (두 각만 결정되어도 나머지 한 각을 알 수 있으므로 세 각이 주어지는 것과 같겠죠?) 이 경우 다른 변의 길이를 찾는 데 활용되는 공식은 바로 sin 법칙입니다.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

위 공식에서 A, B, a를 안다면 b의 크기도 자동으로 알 수 있게 됩니다. 이때 sin 법칙은 '한 변의 길이와 세 각의 크기로 결정된 삼각형'에서 다른 변의 길이를 알아낼 수 있게 해주는 공식이 됩니다.

두 삼각형 간의 관계로서 합동을 바라볼 수도 있습니다. 이때 역시, 삼각형의 합동 조건은 삼각형을 유일하게 결정하는 것과 같음을 기억해야 합니다. 두 삼각형 간의 합동을 찾아내는 것이 유익한 정보를 주는 이유는 바로, 두 삼각형이 같은 삼각형임을 알기 때문에 한 삼각형에서 얻은 정보를 다른 삼각형으로 그대로 복사해갈 수 있기 때문입니다.

조금 더 구체적으로 말하자면, 두 삼각형이 합동이라면 다음 조건들을 만족하게 됩니다.

1) 두 삼각형에서 대응하는 각의 크기가 동일하다.
2) 두 삼각형에서 대응하는 변의 길이가 동일하다.
3) 대응하는 변이 아니더라도, 두 삼각형에서 같은 과정으로 얻어진 선분의 길이 역시 동일하다. (예를 들면, 외접원의 반지름 / 내접원의 반지름 / 중선의 길이 / 각 이등분선의 길이 … 등 같은 과정을 통해 작도되는 선분의 길이는 두 삼각형에서 같습니다.)

위의 내용을 잘 이해했다면, 합동 조건이 중요한 이유와 cos과 sin 법칙을 활용할 수 있는 방법에 대해 조금이나마 알게 되었을 것입니다. 정리하자면, 합동 조건을 알아야 하는 이유는, 삼각형이 결정되기 위해서 모든 정보를 알 필요가 없으며 우리가 구하기 쉬운 소수의 정보만으로 삼각형을 결정할 수 있음을 이해하기 위해서입니다. 또한, 이 과정에서 sin 법칙과 cos 법칙을 예로 들면서 두 정리가 활용될 수 있는 직접적인 예시에 관해 설명하였습니다. 다음 장에서는 삼각형의 닮음에 대해 알아보도록 합시다.

Ⅰ. 삼각형 : 닮음

2. 닮음

다음으로는 닮음에 대해 살펴봅시다. 앞서 합동 단원에서, 두 삼각형의 합동 관계가 유용한 정보를 주는 이유는 한 삼각형의 정보를 다른 삼각형으로 옮길 수 있기 때문이라고 배웠습니다.

두 삼각형의 닮음 관계를 찾아내는 것이 중요한 이유도 비슷합니다. 두 삼각형이 닮음임을 알게 되면, 한 삼각형에서 얻은 정보를 다른 삼각형으로 옮길 수 있기 때문입니다. 다만 합동 관계와는 다르게, 닮음 관계인 두 삼각형의 성질이 완전히 일치하지는 않습니다. 이때 두 삼각형 간의 관계를 설명하는 연결고리가 바로 닮음비입니다.

두 삼각형이 닮음이 될 조건에 대해 알아봅시다. 대표적인 조건들로는 아래 세 가지가 있습니다.

1) 대응하는 세 변의 길이비가 같은 두 삼각형은 닮음이다.
2) 세 각의 크기가 같은 두 삼각형은 닮음이다.
3) 대응하는 두 변의 길이비와 그 끼인각이 같은 삼각형은 닮음이다.

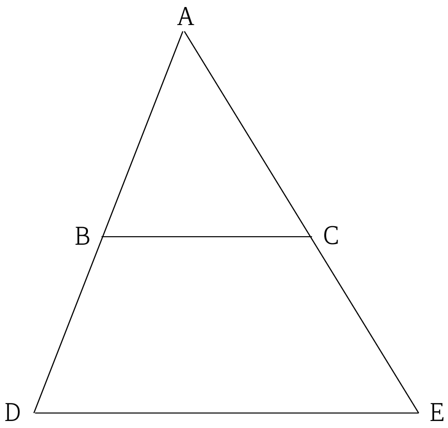
위 조건들은 두 삼각형이 닮음일 필요충분조건입니다. 즉, 위 조건을 만족하면 닮음일 뿐만 아니라 닮음인 두 삼각형은 위 성질들을 모두 갖게 됩니다.

이제 닮음비에 대해 살펴봅시다. 두 삼각형의 닮음비가 $m:n$이라는 것은, 한 삼각형을 이 비율로 확대/축소 시키면 다른 삼각형과 일치하게 됨을 의미합니다. 이로부터 다음과 같은 성질들을 알아낼 수 있습니다.

1) 대응하는 변의 길이비는 닮음비($m:n$)과 같다.
2) 대응하는 변이 아니더라도, 두 삼각형에서 같은 과정으로 얻어진 선분의 길이비 역시 닮음비와 같다. (예를 들면, 외접원의 반지름 / 내접원의 반지름 / 중선의 길이 / 각 이등분선의 길이 ... 등 같은 과정을 통해 작도되는 선분의 길이비는 닮음비와 같게 됩니다.)
3) 두 삼각형의 넓이비는 닮음비의 제곱($m^2:n^2$)과 같다.

많은 문제에서 닮음비를 활용해 길이나 넓이를 구해내므로 위의 성질들은 꼭 기억하고 있어야 합니다.

닮음이 활용되는 대표적인 상황 중 하나가 바로 평행입니다.



위 그림에서 선분 BC와 선분 DE가 평행이라면, 삼각형 ABC와 삼각형 ADE는 닮음이 됩니다. 특히 두 삼각형의 닮음비를 $m:n$이라 두면 AB : AD = AC : AE = BC : DE = $m:n$이 성립합니다. 여러 문제에서 변의 길이를 구할 때 위와 같은 상황을 자주 활용하게 되므로, 평행인 선이 보이면 닮음을 활용하는 것을 한 번쯤 고려해야 합니다.

반대로, AB : AD = AC : AE 라면 BC와 DE는 평행하게 됩니다. 수능 문제에서 자주 쓸 일은 없겠지만 위의 정리와 묶어서 기억해두면 좋습니다.

평면기하 정리

Ⅰ. 삼각형 : 삼각형의 오심

다음으로는 삼각형의 오심에 대해 알아봅시다. 삼각형의 오심에는 외심, 내심, 무게중심, 수심, 방심이 있습니다. 수심과 방심은 수능에 거의 등장하지 않으므로 이 글에서는 외심, 내심, 무게중심을 위주로 살펴보겠습니다.

3. 외심

외심의 정의는, 삼각형의 외접원의 중심입니다. 즉 삼각형 ABC가 주어졌을 때, 점 A, B, C를 모두 지나는 유일한 원의 중심이 외심이 됩니다. 일반적으로 외심은 O로, 외접원의 반지름은 R로 표기합니다. 외심의 성질은 크게 길이에 관한 성질과 각도에 관한 성질로 나눌 수 있습니다.

외심의 길이에 관한 성질은 다음과 같습니다.

1) OA = OB = OC = R 이다.
2) O는 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
3) sin 법칙 : $2R\sin A = a$

1)은 외심의 정의로부터 당연히 도출되고, 2)는 1) 성질로부터 증명할 수 있습니다. 사실은, 2)번을 외심의 정의라고 봐도 무방합니다. 삼각형 세 변의 수직이등분선의 교점은 외심으로 유일하기 때문입니다. 2)를 외심의 정의로 볼 경우 1)을 2)번 성질로부터 증명하면 됩니다. 3)은 이미 잘 알고 있을 sin 법칙입니다.

외심의 각에 관한 성질은 다음과 같습니다.

1) $\angle AOB = 2\angle C, \angle BOC = 2\angle A, \angle COA = 2\angle B$
2) $\angle OBA = \angle OAB = 90 - \angle C$

1)은 원주각과 중심각의 관계를 나타냅니다. 2)는 1)로부터 자연스럽게 증명되는 성질입니다.

4. 내심

내심의 정의는, 삼각형의 내접원의 중심입니다. 즉 삼각형 ABC가 주어졌을 때, 삼각형의 세 변 AB, BC, CA에 모두 접하는 유일한 원의 중심이 내심이 됩니다. 일반적으로 내심은 I로, 내접원의 반지름은 r로 표기합니다. 내심의 성질 역시 길이에 관한 성질과 각에 관한 성질로 나누어 생각할 수 있습니다.

내심의 길이에 관한 성질은 다음과 같습니다. 내접원과 BC, CA, AB의 접점을 각각 D, E, F라 둡시다.

1) ID = IE = IF = r 이다.
2) 2AE = 2AF = b+c-a, BF = BD = c+a-b, CD = CE = a+b-c 이다.
3) AE = AF = $\dfrac{r}{\tan\dfrac{A}{2}}$

내심의 각에 관한 성질은 다음과 같습니다.

1) 내심은 세 각의 이등분선의 교점이다.
2) $\angle BIC = 90 + \dfrac{1}{2}\angle A$

1)은 내심의 다른 정의로 보아도 무방합니다. 2)는 1)로부터 자연스럽게 증명되는 성질입니다.

또한 내심은 삼각형의 넓이와 관련해서도 자주 등장합니다. 삼각형의 넓이를 s라 두면, 다음 식이 성립합니다.

$$s = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

이 성질 역시 자주 사용되니 기억하고 있도록 합시다.

5. 무게중심

무게중심의 정의는, 삼각형 세 중선 (꼭짓점과, 그 대변의 중점을 이은 선)의 교점입니다. 무게중심은 일반적으로 G로 표기합니다. 무게중심의 성질은 크게 길이에 관한 성질과, 넓이에 관한 성질로 나누어서 볼 수 있습니다.

무게중심의 길이에 관한 성질은 다음과 같습니다. 내접원과 BC, CA, AB의 접점을 각각 D, E, F라 둡시다.

AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1

무게중심의 넓이에 관한 성질은 다음과 같습니다. 이때, | |은 삼각형의 넓이를 의미합니다.

1) $|\triangle ABG| = |\triangle BCG| = |\triangle CAG|$
2) $|\triangle ABG| : |\triangle BMG| = |\triangle ACG| : |\triangle CMG| = 2 : 1$

여기서 기억해야 할 사실은, 무게중심의 성질 중 길이에 관한 성질과 넓이에 관한 성질은 독립적으로 존재하는 것이 아니라 서로 깊게 연관되어 있다는 점입니다. 무게중심이 등장한다면 반드시 길이의 비율이 쓰일 것이므로 이를 활용하려는 방안을 생각해 보아야 합니다.

평면기하 정리

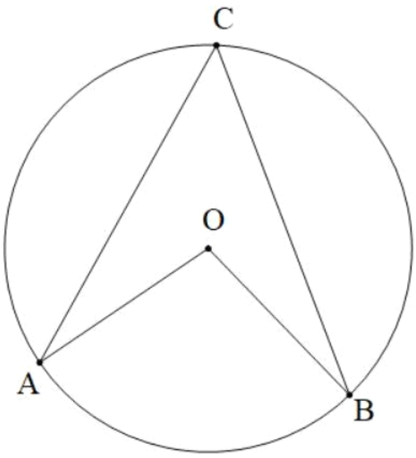
Ⅱ. 원 : 각

다음으로 살펴볼 도형은, 삼각형만큼이나 자주 등장하는 도형인 원입니다. 한 원 위의 점들을 발견하는 것이 중요한 이유는 그 사실이 우리에게 굉장히 많은 정보를 알려주기 때문입니다.

1. 원과 각

한 원 위에 있는 점들을 통해 얻을 수 있는 중요한 정보 중 하나는 바로 각입니다. 우선 원주각과 중심각의 관계부터 다시 복습하도록 합시다. 원의 중심을 O, 원 위의 세 점을 각각 A, B, C라 했을 때 다음의 관계가 성립합니다.

$$\angle AOB = 2\angle ACB$$



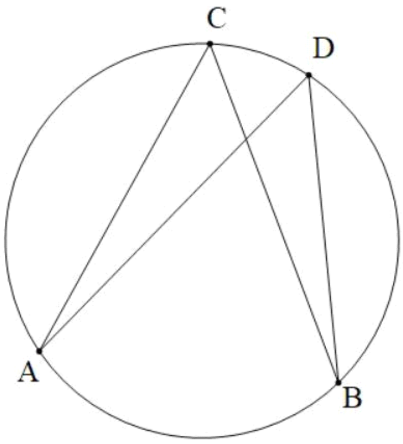
이로부터 자연스럽게 알 수 있는 중요한 성질이 바로 한 현에 대한 원주각은 항상 일정하다는 사실입니다. 고정된 현의 중심각은 항상 일정하므로, 중심각의 절반인 원주각 역시 일정할 수 밖에 없기 때문입니다. 점 A, B가 원 위의 점일 때, $\overleftrightarrow{AB}$를 기준으로 한 쪽에 위치하는 원 위의 임의의 점 C에 대하여 다음이 성립합니다.

$\angle ACB$는 일정

다른 식으로 표현하자면, 원 위에 네 점 A, B, C, D가 순서대로 있을 때 다음이 성립합니다.

$$\angle ACB = \angle ADB$$

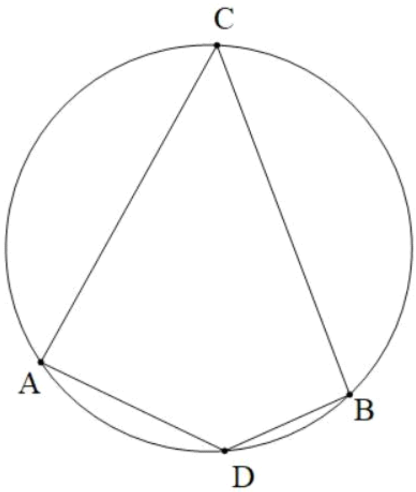
위의 원주각과 관련된 정리는 역도 성립합니다. 즉 $\angle ACB = \angle ADB$이면 A, B, C, D는 한 원 위에 있습니다.



만약 $\overleftrightarrow{AB}$를 기준으로 C와 D가 반대편에 있다면 어떻게 될까요? 이 경우 다음이 성립합니다.

$$\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$$

이 역시 역도 성립합니다. 즉 $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$이면 A, B, C, D는 한 원 위에 있습니다.



원주각과 중심각에 대한 정리를 반드시 기억해야 하는 이유는, 이를 통해서 같은 크기의 각들을 찾아내어 각에 관한 정보를 굉장히 많이 얻을 수 있기 때문입니다. 삼각형의 합동에 관한 칼럼에서도 썼었지만 평면 기하 문제, 사실은 모든 수학 문제를 해결하는 과정은 주어진 상황에서 최대한 많은 정보를 뽑아내는 과정입니다. 이러한 관점에서 한 원 위의 점들은 우리에게 많은 정보들을 주기 때문에 굉장히 유용합니다.

원주각에 관한 특수한 상황을 몇가지 더 살펴보겠습니다.

우선 원주각과 원의 지름을 연결짓는 상황도 종종 등장합니다. A, B, C가 한 원 위에 있을 때, 지름과 원주각에 관하여 아래의 두 가지 성질이 성립합니다.

1) $\angle ACB = 90^\circ$ 이면, $\overline{AB}$는 원의 지름이다.
2) $\overline{AB}$가 원의 지름이면, $\angle ACB = 90^\circ$ 이다.

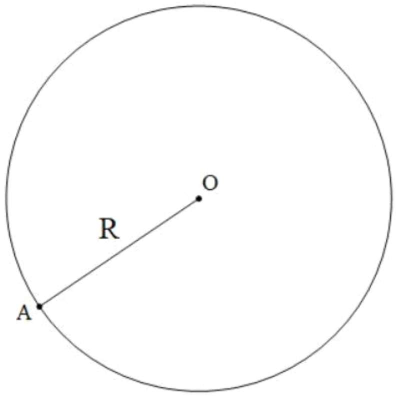
지름의 중심각이 180° 라는 것을 생각하면 두 성질 모두 자명함을 알 수 있습니다. 위 성질이 중요한 이유는, 각의 크기를 통해서 원의 지름이라는 전혀 새로운 정보를 얻어낼 수 있기 때문입니다. 지름을 알게 되면 원의 반지름 역시 알 수 있고, 이를 통해 새로운 많은 정보들을 찾아낼 수 있습니다.

Ⅱ. 원 : 길이

2. 원과 길이

한 원 위에 있는 점들로부터는 각에 관한 정보 뿐만 아니라 길이에 관한 정보 역시 얻을 수 있습니다. 이때 길이 관계에 있어서 핵심이 되는 것은 바로 반지름입니다. 원의 반지름을 R, 원의 중심을 O, 원 위의 한 점을 A라 했을 때 원의 정의에 의해 다음이 자명하게 성립합니다.

$$\overline{OA}=R$$



원과 관련하여 길이를 구하게 될 때는 많은 경우 이 자명한 사실로부터 출발하게 됩니다. 즉, 원이 주어져 있고 특정 선분들의 길이를 구하게 되는 문제라면 원의 반지름을 구하는 것을 목표로 하는 것이 좋습니다.

이제 반지름을 바탕으로 현의 길이를 구하는 법을 알아보겠습니다.

원 위의 두 점 A, B에 대하여 $\angle AOB=2\theta$일 때, 다음 식이 성립합니다.

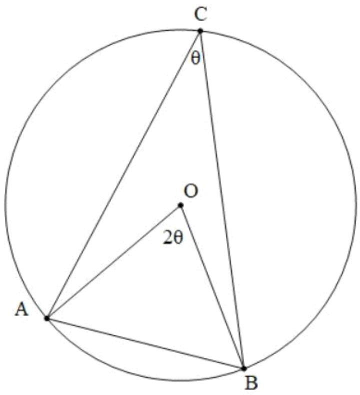
$$\overline{AB}=2R\sin\theta$$

증명은 O에서 $\overline{AB}$에 수선의 발을 내리면 쉽게 할 수 있습니다. 위 식에 대해 곰곰이 생각해보면, 위 식은 결국 중심각과 반지름의 크기만 안다면 현의 길이를 알 수 있음을 의미한다는 것을 알 수 있습니다. 그리고 중심각은 원주각의 두배이므로, 원주각의 크기와 반지름을 안다면 현의 길이를 알 수 있습니다. 구체적으로 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\angle ACB=\theta$일 때, 다음이 성립합니다.

$$\overline{AB}=2R\sin\theta$$

위의 식은 결국 사인 법칙과 같은 내용임을 알 수 있습니다.

또한 위의 식을 반지름 관점에서 본다면, 현의 길이와 원주각(또는 중심각)의 크기를 안다면 반지름을 구할 수 있음을 알 수 있습니다. 즉 원에서 길이와 각은 반지름을 매개로 서로 연결됩니다.



이번 칼럼과 지난 칼럼에서는 원에서 각과 길이에 대한 정보를 얻을 수 있는 방법에 대해 살펴보았습니다. 다시 한번 정리하자면, 원 위의 점들이 우리에게 유용한 이유는 이를 통해 각에 관한 다양한 정보들을 얻을 수 있을뿐더러, 반지름을 매개로 하여서 각에 관한 정보를 길이에 관한 정보로 바꿀 수 있기 때문입니다. 앞으로 원을 활용한 문제에서 이러한 점들을 고려하면서 문제를 해결해 나가면 유용한 정보들을 훨씬 쉽게 찾아낼 수 있을 것입니다.

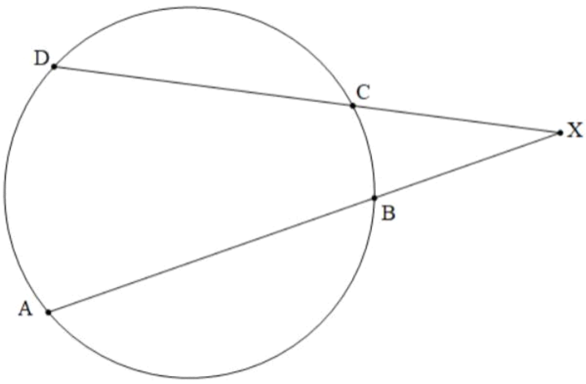
마지막으로 원과 길이에 관하여 중요한 정리인 방멱 정리를 살펴보겠습니다. 방멱 정리의 기본적인 형태는 다음과 같습니다. 원 밖의 고정된 한점 X에 대하여, X를 지나는 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B라 둡시다. 이때 다음이 성립합니다.

$\overline{XA} \times \overline{XB}$는 일정

다르게 표현하면, 원 위의 네 점 A, B, C, D에 대하여 $\overleftrightarrow{AB}$와 $\overleftrightarrow{CD}$의 교점이 X 일 때 다음이 성립합니다.

$$\overline{XA} \times \overline{XB} = \overline{XC} \times \overline{XD}$$

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 직선에 관한 문제가 나온다면 방멱 정리를 활용할 수 있습니다.



평면기하 정리

Ⅱ. 원 : 접선

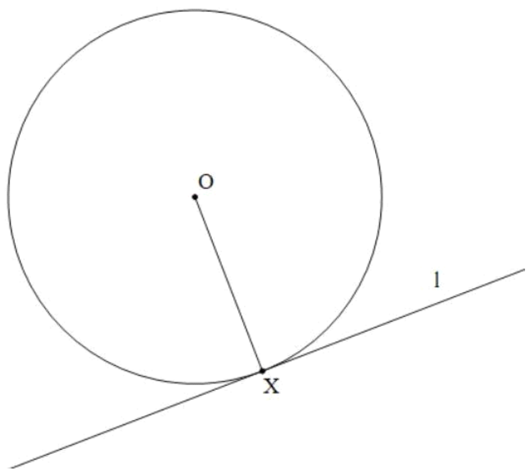
3. 원과 접선

마지막 주제로는 원과 접선에 관한 몇 가지 정리들을 살펴보도록 하겠습니다.

우선 각과 관련된 정리부터 살펴보겠습니다. 원에 관한 문제, 특히 접선에 관한 문제가 나온다면 원의 중심을 표시하고 시작하는 것이 좋습니다. 원의 중심을 O, 접선을 l, 접점을 X라 둔다면 다음이 성립합니다.

$$\overline{OX} \perp l$$

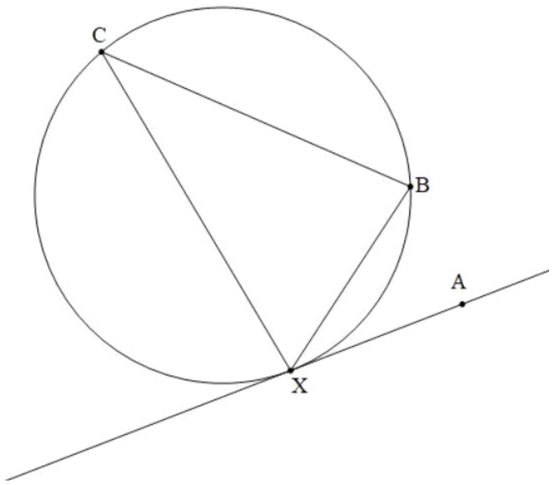
바꾸어 표현하면, l위의 임의의 점 A에 대하여 $\angle OXA = 90^\circ$가 됩니다. 위 내용은 결국 접선의 정의와도 같으므로 접선이 나온다면 반드시 생각해보아야 합니다.



접선과 각에 관한 다른 정리로는 접선과 현이 이루는 각에 관한 정리가 있습니다. A가 접선 l 위의 점이고, B, C가 원 위의 점이면서 $\overleftrightarrow{XB}$에 대해 A와 C가 다른 쪽에 있을 때 다음이 성립합니다.

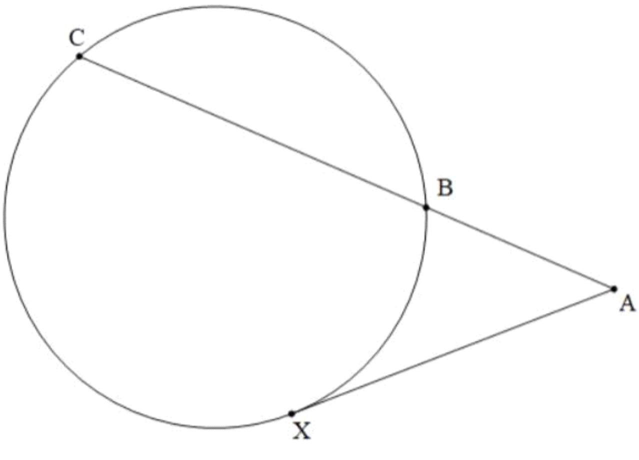
$$\angle AXB = \angle XCB$$

바꾸어 말하면, 접선과 한 현이 이루는 각은 그 현에 대한 원주각과 같다는 내용입니다.



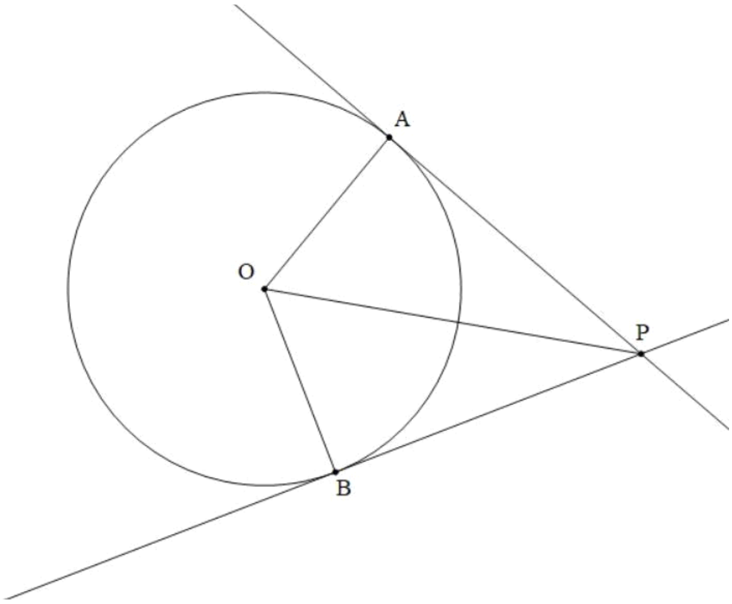
다음으로는 접선과 길이에 관한 정리를 살펴보겠습니다. 접선의 길이가 주어진다면, 가장 먼저 생각해보아야 할 정리는 바로 방멱 정리입니다. 방멱 정리란, 원 밖의 고정된 한점 P에 대하여 P를 지나는 직선이 원과 만나는 두 점이 A, B일 때 $\overline{PA} \times \overline{PB}$가 일정하다는 정리입니다. 이때 P에서 원에 그은 접선을 생각하면, 이 경우는 A와 B가 접점 X로 같은 상황으로 보아도 됩니다. 즉 다음이 성립합니다.

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PX}^2$$



또한 두 접선이 주어진다면 대칭성 역시 생각해보아야 합니다. P에서 원에 그은 두 접선을 A, B라 두면 다음이 성립합니다.

[$\overline{PA}$와 $\overline{PB}$는 $\overline{PO}$에 대해 대칭]



정수론 정리

Ⅰ. 소인수분해

이번 칼럼에서는 수능 수학에서 활용될 수 있는 간단한 정수론적 개념들을 정리하여 보겠습니다. 첫 번째는 바로 소인수분해입니다.

정수의 성질과 관련된 문제를 만났을 때, 가장 먼저 생각해야 할 것은 소인수분해입니다. 개념을 복습하자면 소인수 분해란, 어떤 자연수를 소수인 인수들의 곱으로 나누는 것을 의미합니다. 수식으로 나타내자면 아래와 같습니다.

자연수 n이 주어졌을 때, n의 소인수분해란 서로 다른 소수 $p_1, p_2, \cdots, p_s$와 자연수 $e_1, e_2, \cdots, e_s$에 대하여 $n = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \ldots \times p_s^{e_s}$ 꼴로 나타내는 것을 의미합니다.

이때 소인수분해가 중요한 이유는 소인수분해를 통해서 우리는 관찰하고자 하는 정수의 기본적인 구조를 확인할 수 있기 때문입니다. 특히 수능에서 소인수분해를 적극적으로 활용하는 경우는 나누어짐과 관련된 문제와, 특정 수가 정수인지를 판단하는 상황입니다.

1. 소인수분해와 나누어짐

만약 문제에서 “두 자연수 A, B에 대해 A가 B를 나눈다”라는 조건을 만나면 어떻게 접근해야 할까요? 가장 기본적으로는 $A = nB$(단, n은 자연수)라는 등식을 생각해볼 수 있을 것입니다. 하지만 이러한 식만 갖고는 문제를 푸는 데 충분한 정보를 얻어내지 못하는 경우가 많습니다. 이때 소인수분해를 생각해보는 것이 좋습니다.

A가 B를 나눈다는 것은, 결국 소인수분해를 하여 관찰하였을 때 ① A의 모든 소인수가 B의 속하며 ② A의 모든 소인수에 대하여 각 소인수의 지수가 B에서의 소인수의 지수보다 작거나 같음을 의미합니다. 수식으로 표현하면 아래와 같습니다.

두 자연수 A, B에 대해 A가 B를 나눈다면, A의 모든 소인수를 $p_1, p_2, \cdots, p_s$라 했을 때 $A = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \ldots \times p_s^{e_s}$, $B = p_1^{f_1} \times p_2^{f_2} \times \ldots \times p_s^{f_s} \times b$로 표현되며 모든 i에 대해 $e_i \le f_i$가 성립합니다.

구체적인 숫자를 통해 살펴보자면, $30=2\times3\times5$는 $84=2^2\times3\times7$을 나누지 못합니다. 30에는 84에는 속하지 않는 소인수 5가 있기 때문입니다. 반면 $30=2\times3\times5$는 $420=2^2\times3\times5\times7$을 나눕니다. 30의 모든 소인수가 420의 소인수들에 속하며, 각 소인수들에 대한 지수가 30이 420에 비해 작거나 같기 때문입니다.

소인수분해는 약수와 관련된 문제에서도 종종 활용됩니다. 특정 수의 약수를 구하는 문제는 결국 그 수를 나누는 정수들에 관한 문제이기 때문입니다. 특히 다음과 같이 특정 수를 소인수분해하면 그 수의 약수들을 쉽게 찾아낼 수 있습니다.

> 자연수 A를 소인수분해 했을 때 $A=p_1^{e_1}\times p_2^{e_2}\times\ldots\times p_s^{e_s}$라면, A의 모든 약수는 $p_1^{f_1}\times p_2^{f_2}\times\ldots\times p_s^{f_s}$(단, $0\le f_i\le e_i$)로 나타낼 수 있습니다.

2. 소인수분해와 정수판별

소인수분해는 특정 수가 정수임을 판단하는 상황에도 종종 사용됩니다. 가장 단순한 상황을 살펴보면, 두 정수 A,B에 대하여 $\frac{A}{B}$가 정수임을 판단하는 경우입니다. 이는 결국 B가 A를 나눔을 의미하므로 위의 경우처럼 소인수분해를 적용할 수 있습니다.

조금 더 복잡한 상황은, 제곱근과 관련된 상황입니다. 어떤 수 A의 n제곱근 $\sqrt[n]{A}$가 정수이기 위해서는, A의 모든 소인수의 지수가 n의 배수가 되어야 합니다. 수식으로 나타내면 아래와 같습니다.

> 자연수 A의 n제곱근 $\sqrt[n]{A}$가 정수이려면, A의 소인수분해가 $A=p_1^{e_1}\times p_2^{e_2}\times\ldots\times p_s^{e_s}$ 일 때 e_i들이 모두 n의 배수여야 합니다.

더 나아가서 어떤 실수 A가 $A=p_1^{e_1}\times p_2^{e_2}\times\ldots\times p_s^{e_s}$ 꼴로 표현될 때 (단, $p_1,p_2,\cdots,p_s$는 서로 다른 소수, $e_1,e_2,\ldots,e_s$는 유리수) A가 정수임은 $e_1,e_2,\ldots,e_s$가 모두 정수임과 동치입니다. 이를 활용하면 $A^{\frac{1}{n}}\times B^{\frac{1}{m}}$과 같은 복잡한 식이 정수인지 판별하는 문제를 만나더라도 A, B를 모두 소인수분해한 후 각 소인수의 지수가 정수가 되는지를 확인하는 방법으로 쉽게 해결 가능합니다.

정수론 정리

Ⅱ. 나머지

이번 칼럼에서는 나머지에 대한 간단한 정수론적 성질들을 살펴보겠습니다. 정수론에서 나머지의 정의는 다음과 같습니다.

자연수 a와 b에 대하여, $a=bq+r\,(0 \le r < b)$일 때 q를 몫, r을 나머지라 부른다.

나머지와 관련된 성질은 주로 확통 과목과 연관되어서 나오는데, 특정 수의 배수임을 판단하는 문제에서 종종 사용됩니다. 더 자세한 내용을 살펴보도록 합시다.

1. 나머지의 기본적 성질

나머지와 관련된 가장 중요한 성질은 나머지의 합과 곱에 대한 성질입니다. 특히 나머지의 합/곱과 합/곱의 나머지가 같다는 성질이 가장 중요하게 사용됩니다. 수식으로 풀어서 설명하면 아래와 같습니다.

자연수 a, b, c에 대하여, a, b를 c로 나눈 나머지가 각각 x,y 일 때
① $(a+b)$를 c로 나눈 나머지는 $(x+y)$를 c로 나눈 나머지와 같다.
② ab를 c로 나눈 나머지는 xy를 c로 나눈 나머지와 같다.

구체적인 예시로 알아봅시다. 7을 3으로 나눈 나머지는 1이고, 11을 3으로 나눈 나머지는 2입니다. 따라서 18 = 11+7 을 3으로 나눈 나머지는 3 = 1+2를 3으로 나눈 나머지와 같습니다. 실제로 두 값이 0으로 같음을 확인할 수 있습니다. 또한 77을 3으로 나눈 나머지는 2를 3으로 나눈 나머지와 같음을 알 수 있습니다.

또한 위의 정리에서 x,y가 반드시 나머지여야 할 필요는 없고, a와 x, b와 y를 c로 나눈 나머지가 같기만 하면 충분합니다. 즉 다음이 성립합니다.

자연수 a, b, c에 대하여, a와 x를 c로 나눈 나머지가 같고 b와 y를 c로 나눈 나머지가 같을 때
① $(a+b)$를 c로 나눈 나머지는 $(x+y)$를 c로 나눈 나머지와 같다.
② ab를 c로 나눈 나머지는 xy를 c로 나눈 나머지와 같다.

위를 이용한다면 합/곱의 나머지와 관련된 문제를 해결할 때 실제로 각 숫자의 값은 중요하지 않다는 것을 알 수 있습니다. 즉, 각 숫자의 나머지만 관찰하면 충분합니다. 예를 들어, $a+b$가 3의 배수인지를 확인하기 위해서는 a, b를 3으로 나눈 나머지의 합이 3의 배수가 되는지를 관찰하면 충분합니다.

2. 나머지와 정수의 분류

위에서 말했듯이, 합/곱의 나머지와 관련된 문제를 해결할 때는 각 숫자의 실제 값은 중요하지 않고 각 수의 나머지만 관찰하면 충분합니다. 이 관찰이 갖는 의미는, 위와 같은 관찰을 통해 우리가 확인해야 하는 경우의 수가 크게 줄어든다는 것입니다. 각 수를 나머지가 같은 수끼리 묶어서 관찰하면 되기 때문입니다.

즉 다음과 같이 모든 정수를 분류하여 관찰할 수 있습니다.

> n으로 나눈 나머지가 i인 수들의 집합을 A_i라 할 때,
> 모든 자연수는 $A_0, A_1, \cdots, A_{(n-1)}$중 하나에 유일하게 속한다.

위와 같은 분류가 유용한 예시 문제를 살펴봅시다. 비슷한 문제를 보더라도 아래와 같은 과정을 통해 문제를 해결하면 됩니다.

예시

다음을 만족하는 자연수의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.
① x, y는 20 이하의 자연수이다.
② $x+y$는 3으로 나눈 나머지가 1이다.

풀이

20이하의 자연수들을 3으로 나눈 나머지에 따라 분류하자. 3으로 나눈 나머지가 0, 1 ,2인 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 두자. 각 집합의 원소 개수는 6, 7, 7이다.

두 수의 합을 3으로 나눈 나머지가 1이 되는 경우는 다음의 세 경우이다.
① x는 A_0의 원소이고 y는 A_1의 원소
② x는 A_1의 원소이고 y는 A_0의 원소
③ x는 A_2의 원소이고 y는 A_2의 원소

각각의 경우의 수는 6×7, 7×6, 7×7이므로 총 경우의 수는 133이 됩니다.

수학 I

수학 1

수열을 다루는 기본적 태도

이번 칼럼에서는 수열 문제를 분석하는 방법에 대해 알아보겠습니다. 교육과정이 개정된 이후로 수열 문제는 종종 가장 어려운 문제 중 하나로 모의고사에 등장하곤 합니다. 우리가 수열 문제를 어렵게 느끼는 이유는, 문제에 정해진 형식이 없기 때문입니다. 실제로 수열은 말 그대로 '수의 나열' 일 뿐, 어떤 규칙성을 가져야 하는 것은 아닙니다. 또한 규칙성을 가진 수열이라도 그 규칙성을 굉장히 다양한 방법으로 정의할 수 있기 때문에 상황을 파악하는 것이 어렵습니다. 그러나 이렇게 형식이 정해지지 않은 수열 문제라도, 문제 상황을 보았을 때 반드시 해보아야 할 몇 가지 행동들이 있습니다.

1. 대입과 계산

수열 문제를 보았을 때 가장 먼저 해볼 것은 대입과 계산입니다. 수열의 값을 계산하는 것을 좋지 못하게 여기거나 두려워하는 분들이 있는데, 사실은 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 등 작은 수에 대한 수열의 값부터 직접 계산해보는 것이 좋습니다. 우리가 이러한 작업을 하는 이유는 크게 두 가지입니다.

① 계산해야 할 값의 범위가 작은 경우에는 대입을 통해 문제 해결이 가능하다.
② 일반항이나 규칙성을 찾을 때 단서로 활용할 수 있다.

예를 들어, 몇 개의 초항과 수열의 점화식이 주어진 상황에서 $a_6, a_7, \cdots$ 등 직접 계산할 수 있을 만한 값을 물어본다면 머리 아프게 규칙성을 찾을 필요가 없습니다. 식에 초항을 대입하고 값을 계산하여 문제를 풀면 되기 때문입니다. 주어진 점화식이 수의 범위를 쉽게 키울 수 있게 주어진다면 (예를 들어 $a_{2n} = 2a_n + 1$등) 두 자릿수까지도 직접 계산하여 구해볼 만합니다. 수열의 규칙성이 식으로 주어지지 않은 상황이더라도, n의 값이 작다면 우리가 직접 값을 구하는 것이 어렵지 않을 것이므로 직접 계산해보면 됩니다.

그러나 우리가 직접 계산하여 구하기 힘든 값을 물어보더라도 작은 수의 값을 계산하는 작업은 반드시 필요합니다. 주어진 수열의 규칙성과 일반항이 바로 보인다면 필요 없을지도 모르겠으나, 이러한 상황이 벌어질 확률은 굉장히 희박합니다. 따라서 작은 숫자부터 대입해보면서 수열의 값을 써보고, 이를 통해 규칙성이나 일반항을 예측하는 과정이 필요합니다. 규칙성을 발견한다면 그 규칙성이 맞는지를 검증하는 것은 비교적 수월하기 때문입니다. 또한 작은 숫자에 대한 값을 계산하는 과정에서 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 간의 규칙성 뿐만 아니라 a_n 자체에 숨어있는 규칙성 역시 발견할 수 있습니다. 예를 들자면, a_n이 특정 조건을 만족하는 경우의 수로 주어진 경우, a_1, a_2, a_3 등 작은 숫자의 경우의 수를 구하는 과정에서 임의의 n에 대한 경우의 수를 구하는 방법을 발견할 수도 있습니다. 이에 관한 내용은 아래에서 더 자세히 알아보도록 합시다.

2. 규칙성과 일반항

위에서 말했듯이 직접 계산할만한 수를 묻는다면 문제를 쉽게 해결할 수 있겠지만, 그렇지 않은 경우라면 일반항을 직접 구해야 합니다. 즉 a_n을 n에 관하여 나타낼 수 있도록 노력해야 합니다. 교과서에도 나온 몇몇 특수한 경우는 일반항을 쉽게 구할 수 있습니다.

① $a_{n+1} = a_n + g(n) \ \Rightarrow\ a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(i)$

② $a_{n+1} = a_n \times g(n) \ \Rightarrow\ a_n = a_1 \times \prod_{i=1}^{n-1} g(i)$

위와 같이 합과 곱에 대한 점화식이 주어진 경우 일반항을 쉽게 구할 수 있습니다. 이때 $g(i)$들을 정리하기 위해서는 주로 합이나 곱에서 소거되는 꼴이 존재하는지를 관찰하게 됩니다.

그러나 점화식이 위보다 더 복잡하게 주어진 경우, 또는 점화식이 주어지지 않고 수열이 정의된 경우는 어떻게 접근해야 할까요? 이 경우 위에서 했던 것처럼 작은 수를 대입해보았던 것을 바탕으로 수열의 규칙성을 추측해보아야 합니다. 예를 들어, 수열의 값을 계산했더니 1, 2, 4, 8, ... 과 같은 값이 나온다면 일반항이 2^{n-1}임을 쉽게 추측해볼 수 있습니다. 주기성에 초점을 맞추는 것도 좋습니다. 특정 주기를 기준으로 일정한 규칙이 반복되는 수열(1, 2, 3, 1, 2, 3, ... 또는 1, 2, 3, 2, 4, 6, 3, 6, 9, ... 등)이라면 일반항을 쉽게 추측할 수 있습니다. 어떤 경우는 주기에도 주기성이 있을 수 있습니다. 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ... 와 같은 수열이 대표적입니다. 이렇게 일반항을 추측하는 것이 중요한 이유는 주어진 규칙만을 갖고 바로 일반항을 구해내는 것보다, 일반항의 꼴을 추측한 후 수열이 이 일반항을 만족함을 보이는 것이 훨씬 쉽기 때문입니다.

일반항을 직접적으로 추측하지 않더라도 작은 수를 대입해보는 것은 일반항을 구하는 데 도움이 됩니다. 작은 수에서의 값을 구할 때 사용했던 방법을 확장시켜 임의의 n에 대한 값을 방법을 알아낼 수 있기 때문입니다. 예를 들어 a_1을 구할 때 한 가지, a_2를 구할 때 두 가지, a_3를 구할 때 세 가지로 케이스를 나누어서 값을 구했다면, 직관적으로 a_n은 n가지로 케이스를 나누어 값을 구하면 편리할 것이라 추측할 수 있습니다.

지금까지 수열 문제를 봤을 때 가져야 할 몇 가지 태도에 대해 알아보았습니다. 모든 수열 문제가 위의 방법만으로 풀린다고 할 수는 없으나, 위에서 설명한 내용은 많은 수열 문제에서 문제에 접근하는 좋은 출발점이 됩니다. 앞으로 수열 문제를 마주했을 때 위에서 설명한 기본적인 태도를 기억하고 문제 해결의 시작점으로 삼는다면 문제를 더 쉽게 해결할 수 있을 것입니다.

수학 1

지수, 로그 그래프에서의 진위판단

수능이나 모의고사에 잊을만하면 나오는 문제 중 하나가 지수함수와 로그함수를 포함하는 진위판별 문제입니다. 이번 6평에서도 아래와 같은 문항이 가형에서 18번으로 출제되었죠.

2020학년도 6월 (가) 18번

18. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이러한 문항이 어렵게 느껴지는 가장 큰 이유는, 문제에서 주어진 값들을 정확히 구할 수 없는 경우가 대부분이기 때문입니다. 즉 방정식의 해를 구하기보다는 다른 정보들을 활용하여 등식이나 부등식을 끌어내야 하는 경우가 많습니다. 이때 활용할 수 있는 정보가 매우 많고 그중에서 어떤 정보를 사용할지 정하는 것이 힘들기에 이러한 유형의 문제를 해결하는 것이 더욱더 어렵게 느껴질 것입니다. 이 칼럼에서는 진위판별에 종종 사용되는 도구들에 무엇이 있고, 어떤 상황에서 각 도구가 사용되는지 정리해보고자 합니다.

진위판별에 사용할 수 있는 도구는 아래와 같습니다.

1) 그래프의 형태
2) 그래프의 위치 관계
3) 직선의 기울기
4) 넓이

1, 2, 3번은 굉장히 많이 사용되므로 반드시 알아두도록 합시다. 아직 4번은 출제되지는 않았으나 이 유형이 가형 범위에 포함되면서 충분히 출제 가능할 것으로 보입니다. 각각을 자세히 살펴보도

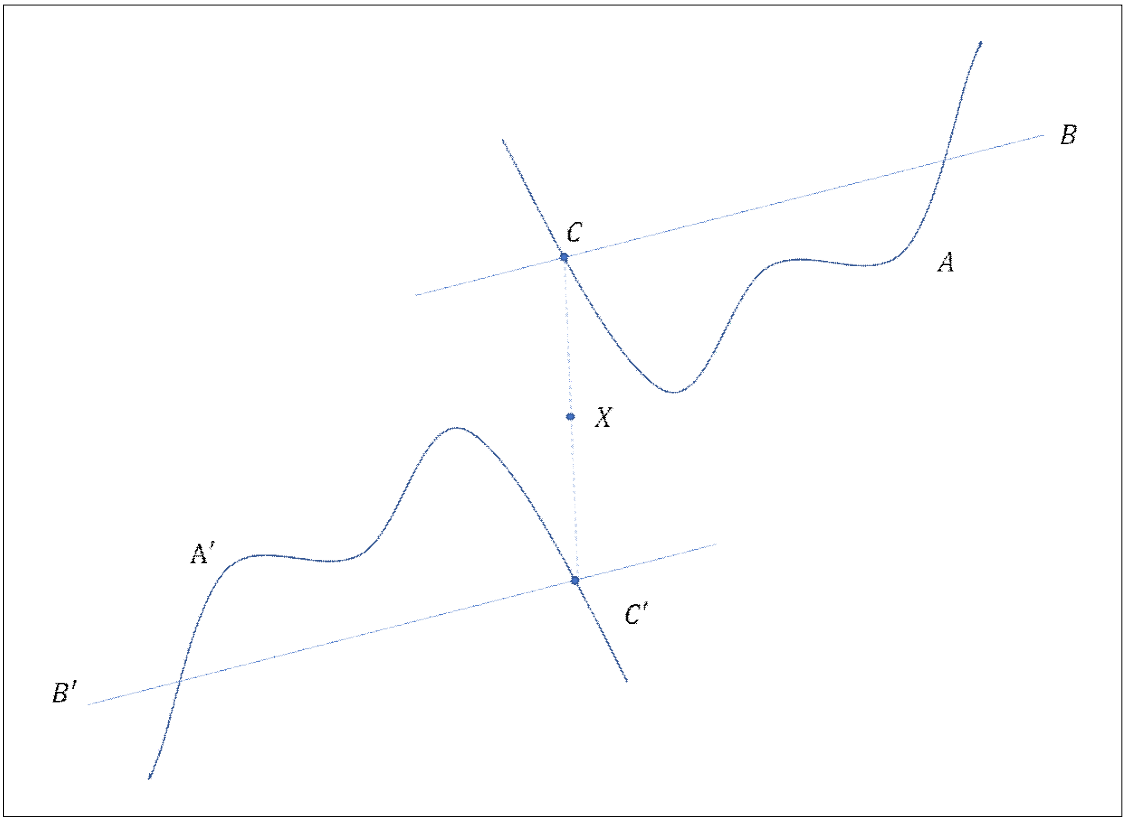
록 합시다.

1. 그래프의 형태

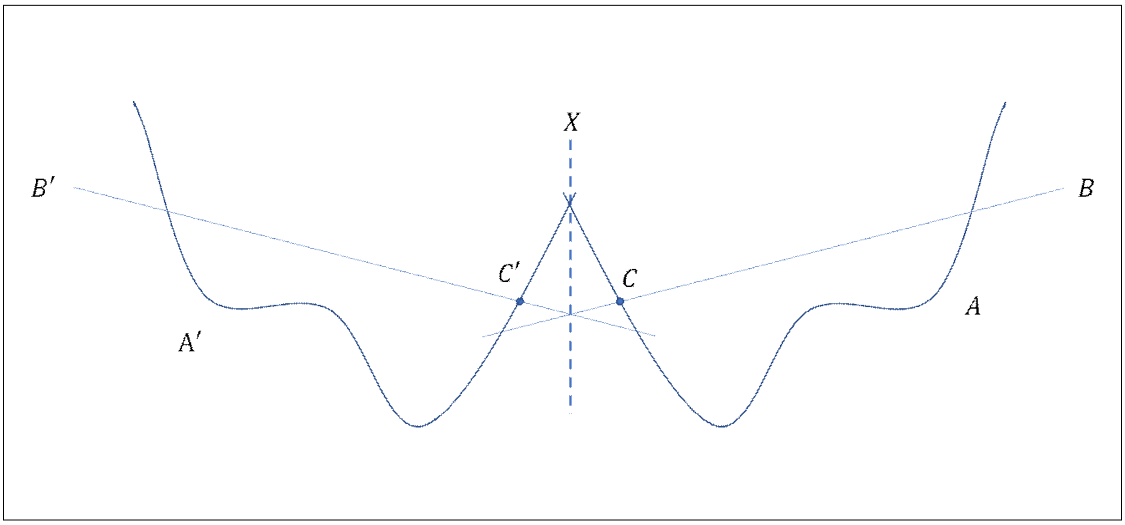
그래프의 형태에서 가장 먼저 살펴보아야 할 것은 대칭성입니다. 로그함수/지수함수가 동시에 등장한다면, 가장 먼저 두 함수가 역함수(선대칭) 관계에 있지 않은지를 생각해보아야 합니다.

그래프의 교점을 분석할 때도 대칭성을 사용할 수 있습니다. 그래프 A와 그래프 B의 교점이 C일 때, A와 B를 X에 대해 대칭 시킨 그래프 A'와 B'의 교점 C'는 C와 X에 대해 대칭이 됩니다. 글로만 보면 어려워 보일 수 있지만, 그림을 보면 자명한 성질임을 알 수 있습니다.

X가 점인 경우



X가 선인 경우

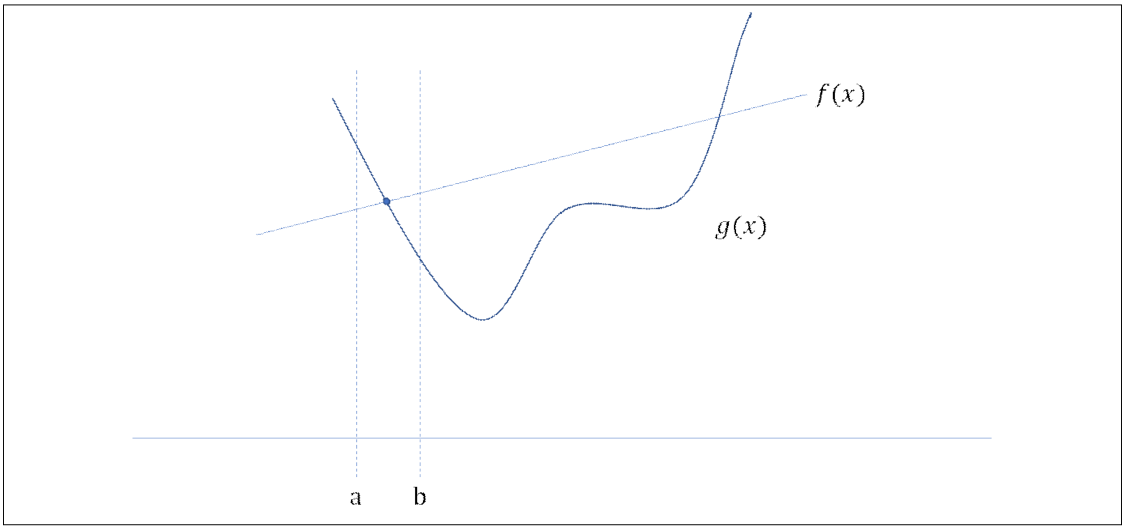


2. 그래프의 위치 관계

그래프의 위치 관계를 통해서 주어진 점들의 x좌표나 y좌표에 관한 간단한 부등식들을 만들 수 있습니다. 한 그래프가 다른 그래프보다 위/아래에 있다면, 같은 x좌표에서의 y좌표를 비교할 수 있습니다. 마찬가지로 한 그래프가 다른 그래프보다 왼쪽/오른쪽에 있다면 같은 y좌표에서의 x좌표를 비교할 수 있습니다.

해의 범위를 알아내는 것 역시 그래프의 위치 관계와 사이값 정리를 활용합니다. $f(a) > g(a)$이고, $f(b) < g(b)$라면 a와 b사이에 $f(x) = g(x)$의 해가 존재한다는 사실을 사이값 정리를 통해 알 수 있습니다. 이를 이용해 해의 범위에 대한 부등식을 알아내는 방법은 자주 사용되므로 반드시 알아야 합니다.

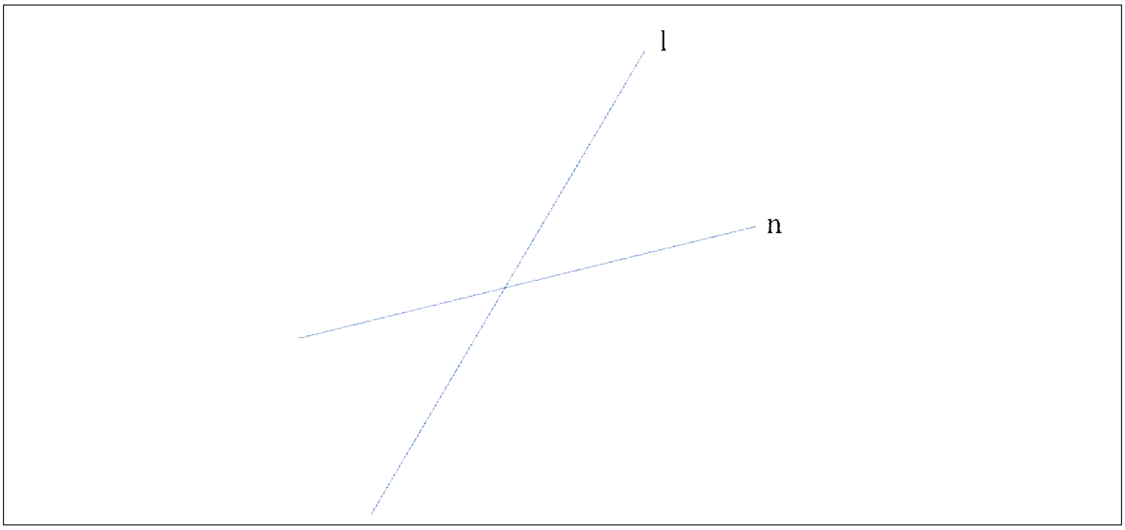
해의 범위



3. 직선의 기울기

직선의 기울기 역시 자주 사용됩니다. 특히 x좌표의 차와 y좌표의 차를 비교하는 부등식이 나올 때 직선의 기울기를 적극적으로 활용할 수 있습니다. 두 직선의 기울기를 비교하는 상황은 주로 다음과 같습니다.

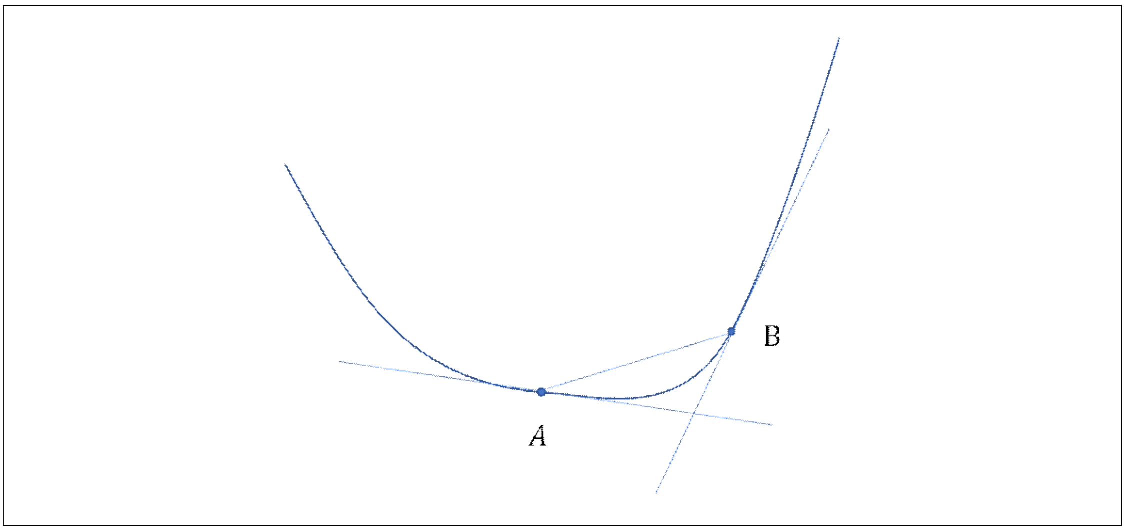
기울기의 비교



위와 같이 두 직선이 교차한다면, 직선 l의 기울기가 직선 n의 기울기보다 크다는 것을 확인할 수 있겠죠? 이때 중요한 것은, 기울기를 비교할 두 직선을 잡는 것입니다. 문제에서 얻고자 하는 정보를 최대한 많이 뽑아낼 수 있는 점들의 기울기를 비교해야 합니다.

접선의 기울기 역시 고려해볼 수 있습니다. 이때는 그래프의 오목/볼록을 고려해야 합니다.

오목/볼록과 기울기

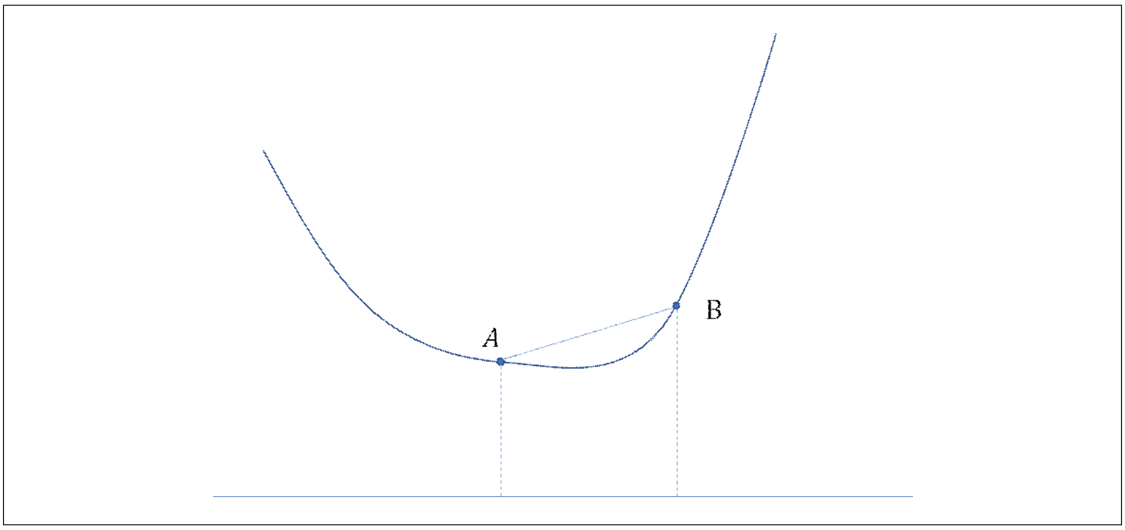


위와 같이 아래로 볼록인 그래프라면, 두 점 A와 B를 잇는 직선의 기울기가 A에서의 접선의 기울기보다 크고, B에서의 접선의 기울기보다는 작습니다. 위로 볼록인 그래프라면 위의 정보가 반대로 바뀌겠죠.

4. 넓이

넓이 역시 중요한 단서가 될 수 있습니다. 한 그래프가 다른 그래프보다 아래에 있다면, 그래프 아래 부분의 넓이 역시 더 작겠죠? 정적분을 활용하여 그래프 아래의 넓이를 구한다면 유용한 부등식을 얻을 수 있을 것입니다. 이때 역시 그래프의 오목과 볼록을 사용할 수 있습니다.

오목/볼록과 넓이



위와 같이 아래로 볼록한 그래프에서는, A와 B를 잇는 직선 아래의 넓이가 그래프 아래의 넓이보다 큽니다. 역시 위로 볼록인 그래프에서는 반대가 되겠죠.

문제가 단순하다면 위의 방법들로 하나의 등식/부등식을 끌어내 문제를 해결할 수 있겠지만, 문제가 더 복잡해진다면 여러 개의 등식/부등식을 엮어야 할 수도 있습니다. 위에서 많은 도구를 알려주었지만 이런 문제 유형에서 가장 중요한 것은, 참/거짓을 판단하는 데 도움이 되는 정보들을 최대한 많이 끌어낼 수 있는 식을 만드는 것임을 항상 기억해야 합니다.

수학 1

지수, 로그 그래프에서의 진위판단 - 적용

지난 칼럼에서 정리했던 내용을 바탕으로 이제 6평 18번을 직접 풀어보도록 하겠습니다.

2020학년도 6월 (가) 18번

18. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

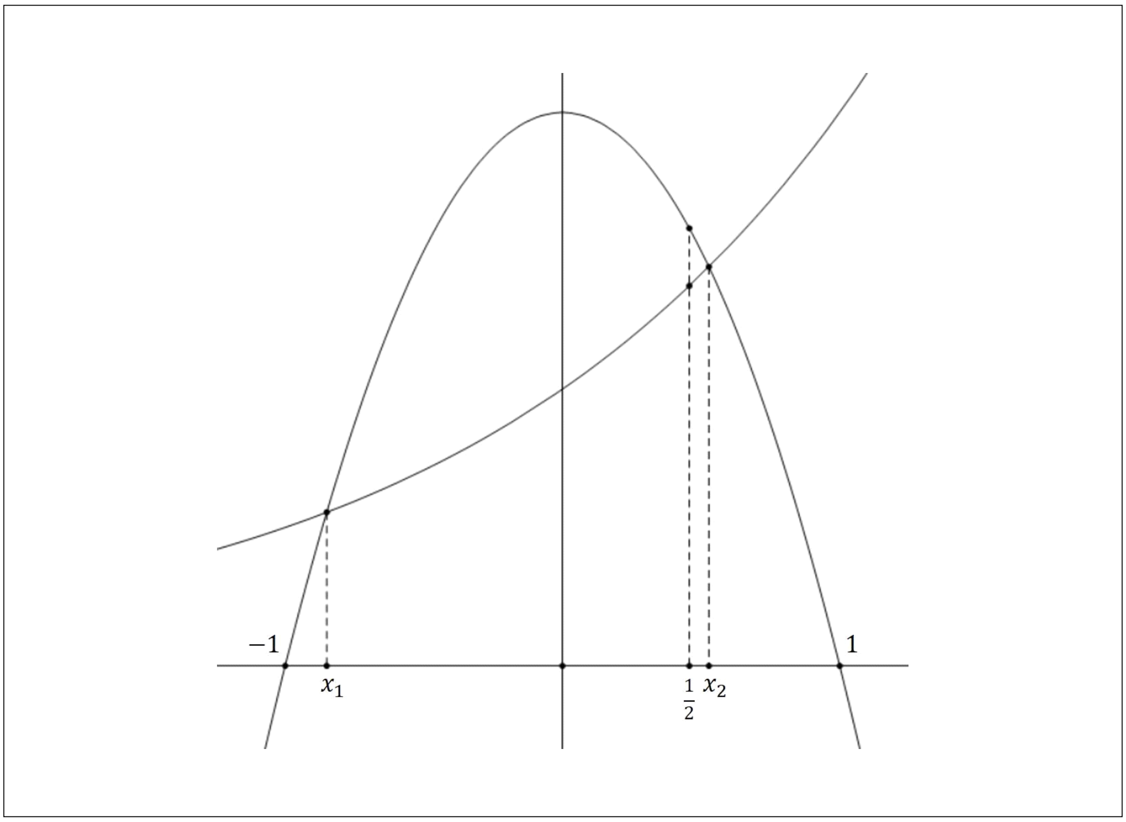
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

선지 하나하나씩 자세히 살펴보도록 합시다.

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

해의 범위를 묻는 문제이므로, 사이값 정리를 사용할 가능성이 높습니다. 함수의 그래프를 그려보면 교점이 정확히 두 개가 생기고, 하나는 음수, 하나는 양수임을 알 수 있습니다.

두 실근의 위치

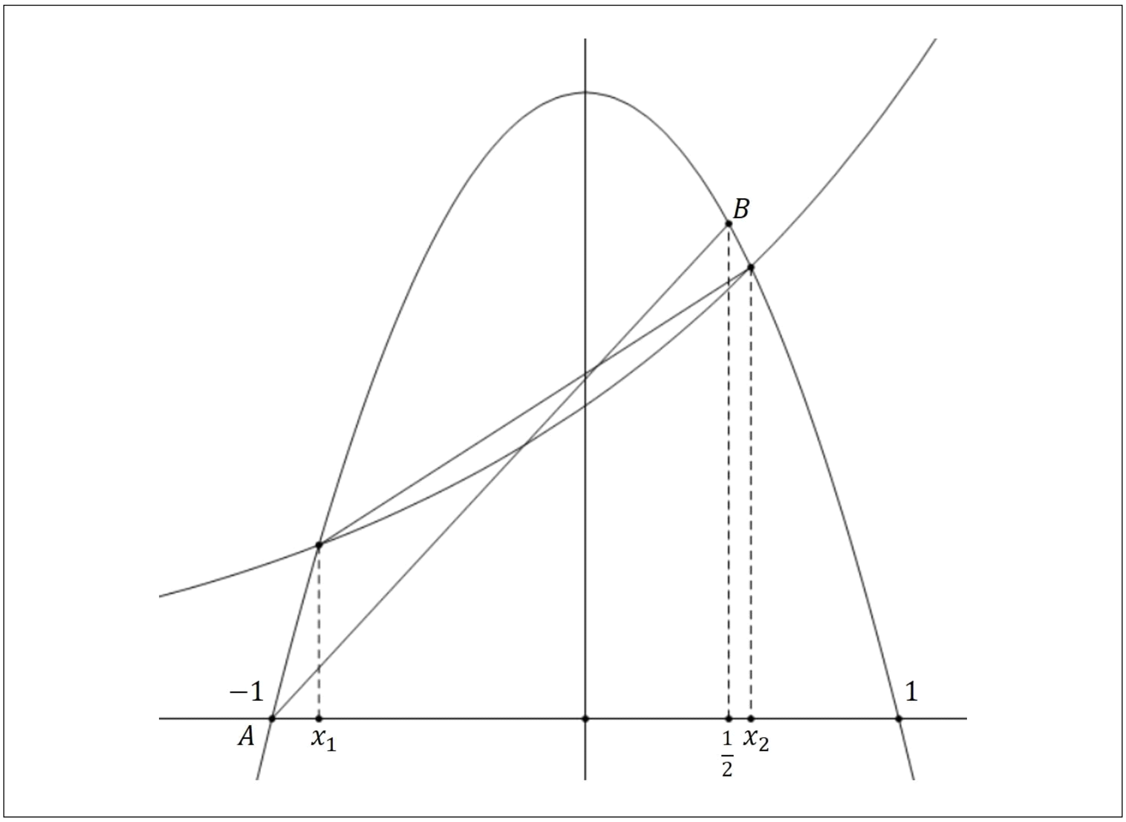


이때 x_2는 양수인 해가 됩니다. $\frac{1}{2}$에서 두 함수의 함수값을 비교하면, $2^{\frac{1}{2}} < \frac{3}{2}$이므로 $y = -2x^2+2$가 더 위쪽에 위치함을 알 수 있습니다. 그러나 x가 충분히 커진다면, 2^x가 $-2x^2+2$보다 커지게 됩니다. 따라서 사이값 정리에 의해 x_2는 $\frac{1}{2}$보다 큼을 알 수 있습니다.

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

x좌표의 차와 y좌표의 차를 비교하는 문제이므로, 직선의 기울기를 사용할 가능성이 높습니다. 식을 정리하면 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$, 즉 두 교점을 잇는 직선의 기울기가 1보다 큰지 작은지를 묻는 문제가 됩니다. 이를 알아내기 위해서는 기울기가 1인 직선을 찾아 비교해야 합니다. $A(-1,0)$과 $B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$를 생각해 봅시다. 두 교점을 잇는 직선의 기울기는 A와 B를 잇는 직선의 기울기보다 작습니다.

기울기 비교

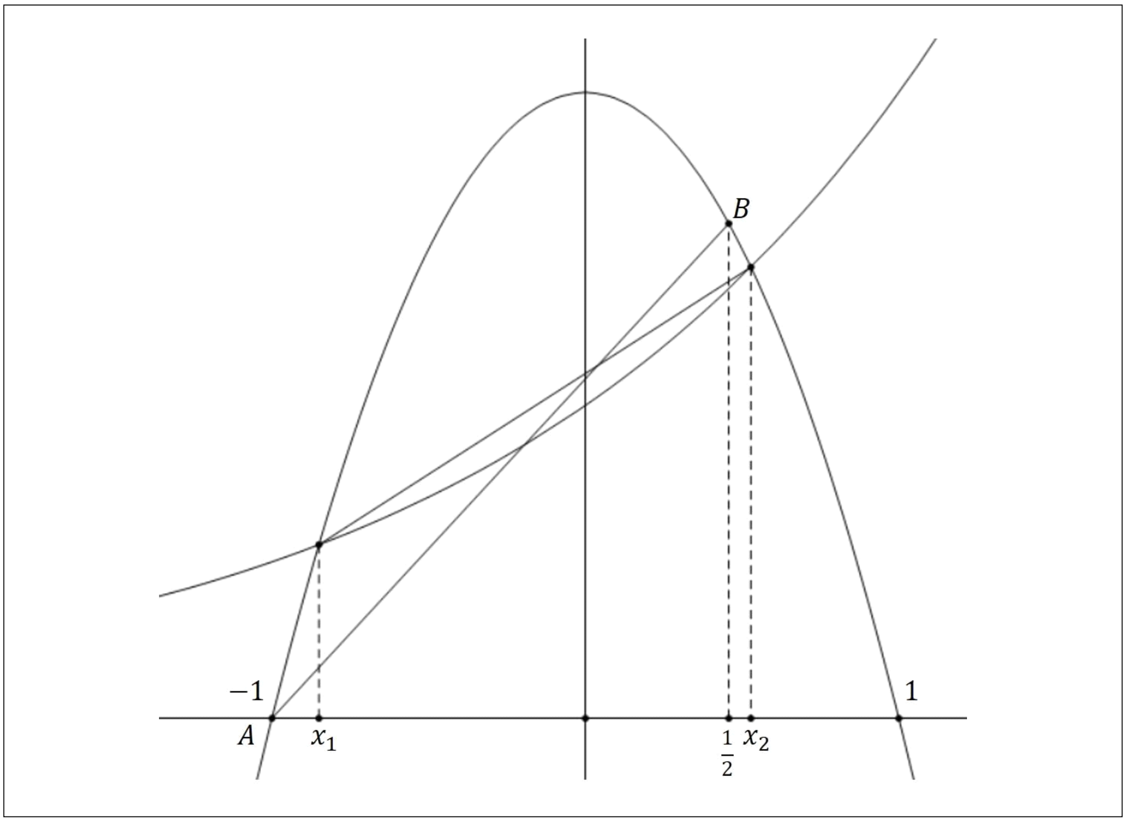


A와 B를 잇는 직선의 기울기는 정확히 1이므로, 주어진 부등식이 성립함을 알 수 있습니다. 여기서 B를 잡는 것이 굉장히 뜬금없다고 생각할 수도 있는데, ㄱ이 큰 단서를 주고 있음을 알아내셔야 합니다. ㄱ에서 양수인 해가 $\frac{1}{2}$보다 크다고 한 것에 힌트를 얻어서 B라는 점을 잡은 것입니다.

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

y좌표에 관한 부등식이 나왔는데, 조금 관찰을 한다면 y좌표를 직접 다루는 것이 쉽지 않음을 알 수 있습니다. 그런데 두 교점이 모두 2^x위에 있으므로, 이 명제는 x좌표에 관한 명제로 바꿀 수 있음을 관찰할 수 있습니다. $y_1 = 2^{x_1}, y_2 = 2^{x_2}$임을 이용하면 ㄷ은 결국 $-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$과 같음을 알 수 있습니다. 이는 결국 해의 범위에 대한 부등식을 다시 만들어야 함을 의미합니다. 우선 그래프의 모양을 보면, $x_1 + x_2 < 0$임은 거의 자명합니다. $y = -2x^2 + 2$은 좌우 대칭이지만 $y = 2^x$는 증가하기 때문에, x_2가 x축에 더 가까울 수 밖에 없기 때문입니다.

해의 범위



이제 반대쪽 부등식을 살펴봅시다. 역시 ㄱ을 활용해야 합니다. $x_2 > \frac{1}{2}$이므로, x_1에 관한 식을 찾아내면 충분합니다. 그런데 역시 그래프를 살펴보면, 2^x는 항상 양수이므로 $x_1 > -1$임을 알 수 있습니다.

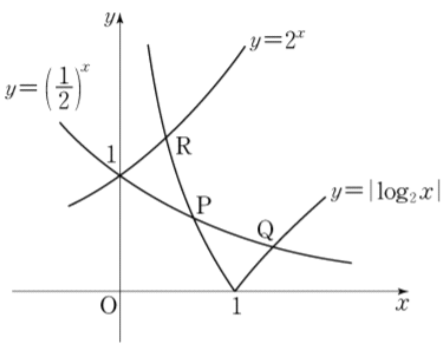
두 부등식을 더하면 $-\frac{1}{2} < x_1 + x_2$를 얻을 수 있습니다.

다른 유명한 문제 하나를 더 살펴보겠습니다.

2011학년도 수능 (가) 16번

16. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 < x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이라 하자.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$

ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

역시 선지 하나하나씩 자세히 살펴보도록 합시다.

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

해의 범위를 묻고 있으므로 사이값 정리를 활용하는 것이 자연스럽습니다. $x=1$에서 $y=(\frac{1}{2})^x$와 $y=|\log_2 x|$의 함수값을 비교하면 $\frac{1}{2} > 0$으로 $(\frac{1}{2})^x$가 더 크고, $x=\frac{1}{2}$에서 두 함수의 함수값을 비교하면 $\sqrt{\frac{1}{2}} < 1$로 $|\log_2 x|$가 더 큽니다. 따라서 두 그래프의 교점인 x_1은 $\frac{1}{2}$과 1 사이에 존재합니다.

ㄴ. $x_2y_2 - x_3y_3 = 0$

로그함수와 지수함수가 등장했으므로 대칭성을 관찰해볼 수 있습니다. $y = 2^x$와 $y = \log_2 x$는 $y = x$ 대칭이고, $y = (\frac{1}{2})^x$와 $y = -\log_2 x$ 역시 $y = x$ 대칭입니다. 따라서 R과 Q 역시 $y = x$ 대칭임을 알 수 있습니다. 따라서 $x_2 = y_3$, $x_3 = y_2$가 성립합니다.

ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

일단 같은 첨자끼리 정리하면 $\frac{x_2}{y_2 - 1} > \frac{y_1}{x_1 - 1}$이 됩니다. 이때 부등식의 우변은 $X(1,0)$과 P를 잇는 직선의 기울기임을 알 수 있습니다. 이제 좌변 역시 기울기로 해석된다면 굉장히 편하겠죠. 그러나 x좌표가 분모에 있어 기울기로 바로 해석하는 것이 어렵습니다. 이때 대칭성을 활용합니다. ㄴ에서 $x_2 = y_3$, $x_3 = y_2$을 얻었으므로 $\frac{x_2}{y_2 - 1} > \frac{y_1}{x_1 - 1}$는 결국 $\frac{y_3}{x_3 - 1} > \frac{y_1}{x_1 - 1}$와 동치임을 알 수 있습니다. 이제 부등식의 좌변은 X와 R을 잇는 직선의 기울기가 됩니다. 그래프에서 확인할 수 있듯이 X와 P를 잇는 직선의 기울기가 더 크므로(기울기가 음수임을 생각해야 합니다!) 틀린 보기임을 알 수 있습니다.

확률과 통계

빈칸추론 문제를 쉽게 접근하는 방법

빈칸추론 문제를 푸는 방법은 크게 두 가지로 나눌 수 있습니다. 하나의 방법은 풀이과정을 처음부터 읽어나가면서 빈칸에 들어갈 식을 찾는 방법으로, 풀이과정에 대한 해석 능력이 필요합니다. 다른 방법은 풀이 전체의 흐름을 보는 것이 아니라, 빈칸 주변의 풀이를 보면서 빈칸에 들어갈 식이나 숫자를 예측하는 방법입니다.

예시를 통해 각 방법을 설명해 보겠습니다. 첫 번째 방법인 풀이를 처음부터 읽고 푸는 방법을 살펴봅시다.

2020년 4월 모의고사 14번

14. 세 숫자 1, 2, 3 만을 사용하여 일곱 자리의 자연수를 만들 때, 세 숫자 1, 2, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하고 숫자 2를 반드시 짝수 번째 자리에만 오도록 놓는 경우의 수를 구하려고 한다. 다음은 이것을 구하는 과정의 일부이다.

> 일곱 자리의 자연수를 만들 때, 짝수 번째 자리는 세 군데이므로 숫자 2는 많아야 세 번 사용할 수 있다.
> (ⅰ) 숫자 2를 한 번 사용한 경우
> 2를 십의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
> 2를 짝수 번째 자리에 한 번 오도록 놓는 경우의 수는 세 군데 중 한 군데를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1$이다.
> 그러므로 숫자 2를 한 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
> (ⅱ) 숫자 2를 두 번 사용한 경우
> ⋮ (중략)
> (ⅲ) 숫자 2를 세 번 사용한 경우
> 2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 나열한 것이므로 그 경우의 수는 $\boxed{(다)}$이다.
> 따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 경우의 수는 290이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 262 ② 267 ③ 272 ④ 277 ⑤ 282

위와 같은 문제는, 빈칸 주변에서 빈칸에 들어갈 수를 파악하는 데 도움이 될만한 식을 찾을 수 없습니다. 따라서 주변 식을 통해 맞춰가는 것이 아니라 풀이를 처음부터 읽으면서 푸는 방법이 더 적합합니다. 특히 확통 빈칸문제의 경우, 직접적으로 풀기 어려운 하나의 문제를 여러 소문제로 쪼개어 각 소문제의 답을 빈칸으로 제시하는 경우가 많으므로 풀이를 처음부터 읽고 푸는 방식을 사용하는 것이 더 좋습니다. 정석적인 방법대로 풀되, 중요한 부분에는 밑줄을 긋는 등의 방법을 통해서 시간을 절약하면 더 좋을 것입니다.

이제 주변 풀이의 흐름으로 빈칸에 들어갈 내용을 알아내는 방법을 설명하겠습니다.

2019년 3월 모의고사 18번

18. 자연수 n에 대하여 원점을 지나는 직선과

곡선 $y=-(x-n)(x-n-2)$가 제1사분면에서 접할 때,

접점의 x좌표를 a_n, 직선의 기울기를 b_n이라 하자.

다음은 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$의 값을 구하는 과정이다.

> 원점을 지나고 기울기가 b_n인 직선의 방정식은 $y=b_n x$이다.
> 이 직선이 곡선 $y=-(x-n)(x-n-2)$에 접하므로
> 이차방정식 $b_n x=-(x-n)(x-n-2)$의 근 $x=a_n$은
> 중근이다.
> 그러므로 이차방정식
> $$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=0$$
> 에서 이차식
> $$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)$$
> 는 완전제곱식으로 나타내어진다.
> 그런데 $a_n>0$이므로
> $$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=\{x-\sqrt{n(n+2)}\}^2$$
> 에서
> $$a_n=\boxed{\text{(가)}},\ b_n=\boxed{\text{(나)}}$$
> 이다.
> 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n=\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 값을 α라 할 때, $2f(\alpha)+g(\alpha)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

주변 흐름을 통해 빈칸추론 문제를 풀 때는 접속어에 집중하는 편리합니다. 지문 주변의 접속어를 통해서 동치인 식들을 추론하여 맞춰갈 수 있기 때문입니다. 위 문제에서는 빈칸 앞의 ‘에서’라는 접속어로부터 앞의 식이 결정적인 단서가 됨을 추측할 수 있습니다. 여기서 a_n은 앞의 식에 나온 방정식의 근이므로 $\sqrt{n(n+2)}$이고, 앞의 식을 전개하면 $b_n-2(n+1)=-2\sqrt{n(n+2)}$,

$b_n = 2\{n+1-\sqrt{n(n+2)}\}$ 임을 알 수 있습니다. 이렇게 문제의 모든 내용을 읽지 않고 주변의 풀이에만 집중하여 풀면 시간을 훨씬 절약할 수 있습니다. 또한 풀이의 전체적인 흐름을 이해하기 어려울 때 역시 이 방법을 사용하면 문제를 더 쉽게 해결할 수 있습니다.

순열, 조합, 분할 구분 tip

확률과 통계 과목에서 기본 중의 기본이 되는 것은 바로 첫 단원인 순열과 조합 단원입니다. 그러나 많은 학생이 이 단원에서 어려움을 느끼곤 합니다. 그 이유는 바로 여러 가지 문제 상황이 주어졌을 때, 순열이나 조합 등 많은 도구 중 무엇을 사용해야 할지를 확실히 알지 못하기 때문입니다. 경우의 수를 구할 때 사용하는 대표적인 도구들은 다음과 같습니다.

① 순열 – 순열, 원순열, 중복순열
② 조합 – 조합, 중복조합
③ 분할 – 집합의 분할, 자연수의 분할

여기서 가장 중요한 것은 어떠한 상황에서 어떠한 도구를 사용해야 할지 파악하는 것입니다.

그러나 문제는 각각의 개념들이 상호 연관되어 있다 보니 혼동하기가 쉬울뿐더러, 한 문제를 서로 다른 도구를 사용하여 서로 다른 방식으로 풀 수도 있다는 점입니다. 대표적으로 순열과 조합은 개념적으로 밀접하게 연결되어 있습니다. 아래의 정의에서 살펴볼 수 있듯이 조합을 계산한 후 순서를 부여하면 순열이 되기 때문입니다.

① 순열 : n개의 대상 중 중복이 되지 않게 r개를 택하고 순서를 배열하는 경우의 수
② 조합 : n개의 대상 중 중복이 되지 않게 r개를 택하는 경우의 수

즉 순열과 조합은 순서를 부여하냐, 그렇지 않냐의 차이가 있을 뿐 개념적으로 굉장히 비슷하다는 것을 확인할 수 있습니다. 핵심 내용만 다시 정리하자면 순열은 중복은 없이, 순서는 부여하는 경우의 수이고 조합은 중복은 없이, 순서도 없이 뽑는 경우의 수입니다. 이렇게 개념끼리 혼동되는 경우가 많으므로 우리는 각각의 도구가 사용되는 상황을 정확히 파악해야 합니다. 예시를 보면서 더 다양한 내용을 살펴보겠습니다.

1. 순열

1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 2개를 택하여 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수는?

위와 같은 문제가 순열의 대표적인 예시입니다. 서로 다른 자연수(1, 2, 3, 4, 5)가 주어져 있고, 이 중 서로 다른 두 개를 뽑아서 자연수를 만드는 것이므로 순서가 존재합니다(10의 자리 수, 1의 자리 수). 이렇게 순열이 사용되는 상황을 쉽게 파악하려면, 뽑힘의 대상이 되는 것과 그것을 활용하

는 방법에 주목하여 중복이 있을 수 있는지, 또 순서를 고려해야 하는지를 확인하면 됩니다. 만약 위와 같은 문제에서 중복을 허용한다면 중복순열을 사용하면 됩니다.

2. 조합

{1, 2, 3, 4, 5}의 부분집합 중 크기가 2인 부분집합의 개수는?

위와 같은 문제가 조합의 대표적 예시입니다. 부분집합이므로 서로 다른 원소를 포함해야 하지만, 순서를 고려하지 않기 때문입니다.

5개의 동일한 물건을 4개의 상자에 넣는 경우의 수는?

이 문제는 중복조합의 대표적 예시입니다. 물건을 담는 것은 결국 상자를 택하는 것과 같다고 볼 수 있습니다. 그런데 물건을 구분하지 않으므로 순서를 생각할 필요가 없고, 상자는 중복하여 택할 수 있으므로 중복조합 즉 ${}_4H_5$를 계산하면 됩니다.

5개의 서로 다른 물건을 4개의 상자에 넣는 경우의 수는?

이렇게 묻는다면 중복순열을 활용해야 합니다. 서로 다른 물건이기 때문에 상자를 택하는 순서 역시 고려해야 하기 때문입니다. 즉 각 물건을 1번, 2번, ... , 5번 물건이라 둔다면 물건의 번호 차례대로 중복을 허락하여 상자를 택한다고 생각하면 되겠습니다.

3. 분할

5개의 서로 다른 물건을 4개의 동일한 상자에 넣는 경우의 수는? (단, 빈 상자는 없다.)

위 문제는 집합의 분할의 대표적인 예시입니다. 집합의 분할은 서로 다른 n개의 대상을 서로 같은 r개의 집합에 나누어 담는 경우의 수이기 때문입니다. 집합끼리는 서로 순서가 없으므로 구분되지 않는 동일한 상자에 물건을 담는 것과 같은 상황으로 생각할 수 있습니다.

5개의 동일한 물건을 4개의 동일한 상자에 넣는 경우의 수는? (단, 빈 상자는 없다.)

이 문제는 자연수의 분할을 활용하는 문제입니다. 자연수의 분할은 서로 같은 n개의 대상을 구분이 되지 않는 r개의 집합으로 나누는 경우의 수와 같습니다.

한 가지 조심해야 할 것은, 위에서 예시로 들었던 중복조합과 집합의 분할이 헷갈릴 수 있다는 점입니다. 이를 쉽게 파악하기 위해서는 물건이 구분되는지, 상자가 구분되는지를 파악하면 됩니다. 중복조합은 서로 동일한 물건을 서로 다른 상자에 나누어 담는 것이며, 집합의 분할은 서로 다른 물건을 서로 동일한 상자에 나누어 담는 것입니다. 특히 각각에서 n의 자리에 오는 대상이 달라짐을 유의해야 합니다. 중복 조합의 경우 선택되는 대상이 n의 자리에 오게 됩니다. 즉 물건이 상자를 선택하는 것으로 보아서 상자의 개수가 n의 자리에 오게 됩니다. 반면 분할에서는 분할되는 대상이 n의 자리에 오게 됩니다. 따라서 물건의 개수가 n의 자리에 오게 되는 것입니다.

이제 연습문제를 풀어 보겠습니다.

연습문제

1. 포도주스, 감귤주스, 사과주스 중에서 7병을 선택하는 경우의 수를 구할 때, 무엇을 사용해야 할까?

2. 서로 다른 4종류의 공을 5명의 학생에게 나누어주는 경우의 수를 구할 때, 무엇을 사용해야 할까? (단, 각 학생은 1개의 공을 받는다.)

3. 서로 다른 종류의 병 10개를 4개의 동일한 박스에 담아서 버리는 경우의 수를 구할 때, 무엇을 사용해야 할까?

4. 정칠각형의 세 꼭짓점을 연결하여 생기는 삼각형의 개수를 구할 때, 무엇을 사용해야 할까?

1. 중복조합 2. 중복순열 3. 집합의 분할 4. 조합

확률과 통계

기댓값의 선형성

이번 칼럼에서는 확률과 통계 단원에서 기댓값에 대한 이해를 높이고, 기댓값과 관련된 문제를 푸는 데 도움을 주는 성질인 '기댓값의 선형성'을 소개하고자 합니다. 기댓값이 선형성을 갖는다는 것은, 기댓값이 다음 식을 만족함을 의미합니다.

임의의 확률변수 X, Y에 대하여
① $cE(X)=E(cX)$가 성립한다.
② $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$가 성립한다.

①번 식은 자명하게 느껴질지도 모릅니다. 그러나 우리가 더 주목해야 할 것은 바로 ②번 성질입니다. ②번 식이 의미하는 것은, 우리가 두 확률변수 각각의 기댓값을 알고 있다면 두 확률변수의 합의 기댓값도 구할 수 있다는 것입니다. 두 확률변수가 독립인 경우에, 우리는 이 성질을 자연스럽게 사용합니다. 예를 들어 다음과 같은 문제를 생각해 봅시다.

예제 1

주사위 두 개를 던질 때, 두 주사위에 적힌 수의 합의 기댓값을 구하시오.

위 문제를 풀 때, 주사위 눈의 합으로 가능한 수(2, 3, … , 12) 각각이 나올 확률을 구하여 문제를 풀 수도 있습니다. 그러나 확통 문제에 조금 익숙한 분들이라면 자연스럽게 각 주사위에서 나올 수 있는 수들의 평균의 두 배, 즉 3.5×2를 계산해 문제를 해결할 것입니다. 이는 결국 기댓값의 선형성을 무의식적으로 사용한 것인데, 두 주사위의 확률변수를 X, Y라 두면 E(X) = 3.5, E(Y) = 3.5이므로 E(X+Y) = 7 이 되기 때문입니다.

이항분포의 기댓값 역시 위의 성질을 사용하면 쉽게 구할 수 있습니다.

예제 2

$X\sim B(n,p)$일 때, $E(X)$를 구하시오.

직관적으로 생각하면 각 시행에서 사건이 일어날 확률이 p이므로 기댓값의 선형성에 의해 사건이 일어나는 횟수의 기댓값은 자명히 np가 됩니다. 엄밀한 풀이는 아래와 같습니다.

풀이

확률변수 X_i,를 i번째 시행에서 사건이 일어나면 1, 그렇지 않으면 0의 값을 갖는 확률변수로 정의하자. 즉 X_i는 p의 확률로 1, $1-p$의 확률로 0의 값을 갖는 확률변수이다. 이때 X는 발생한 사건의 총 횟수이므로 $X = X_1 + \ldots + X_n$이다.
이때 $E(X_i) = p$이므로 $E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = np$가 성립한다.

하지만 기댓값의 선형성이 굉장히 강력한 성질인 이유는, 두 확률변수가 독립이 아닌 상황에도 선형성이 성립하기 때문입니다. 즉 두 확률변수가 서로 종속적으로 영향을 미치더라도 우리는 기댓값의 선형성을 사용할 수 있습니다. 두 확률변수가 종속일 때 기댓값의 선형성을 사용하는 대표적인 예시가 바로 분산의 계산입니다.

예제 3

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$임을 보여라.

풀이

$E(X) = m$이라 두자. 분산의 정의에 의해서 $V(X) = E((X-m)^2)$이다.
이때 기댓값의 선형성에 의해서 $E((X-m)^2) = E(X^2 - 2mX + m^2) = E(X^2) - 2mE(X) + m^2$가 성립하고, $E(X) = m$이었으므로 결국 $V(X) = E((X-m)^2) = E(X^2) - E(X)^2$이 성립한다.

우리가 자주 사용하던 분산 공식에서도 기댓값의 선형성이 숨어 있었음을 알 수 있습니다. 이 외에도 기댓값의 선형성은 복잡한 상황에서의 기댓값을 계산할 때 유용하게 활용될 수 있습니다. 대표적인 예시 하나를 살펴보고 칼럼을 마치겠습니다.

예제 4

모자를 쓰고 있는 5명의 사람이 있다. 5명의 모자를 모두 가져간 후 섞어서 각 사람에게 모자 한 개씩을 임의로 나누어주었다. 모자를 나눠준 후에 자신의 모자를 쓰고 있는 사람의 수의 기댓값을 구하여라.

만약 기댓값의 선형성을 모른다면, 자신의 모자를 쓰고 있는 사람의 수가 0, 1, 2, 3, 4, 5일때의 확률을 난순열을 통해 복잡하게 계산하여 문제를 풀어야 합니다. 그러나 기댓값의 선형성을 사용한

다면 다음과 같이 간단하게 문제를 풀 수 있습니다.

풀이

5명의 사람을 각각 1번, 2번, 3번, 4번, 5번이라고 하자. 각 사람이 모자를 섞은 후 자신의 모자를 받을 확률은 $\frac{1}{5}$이다.
이제 확률변수 X_i,를 i번이 자신의 모자를 받으면 1, 그렇지 않으면 0의 값을 갖는 확률변수로 정의하자. 즉 X_i는 $\frac{1}{5}$의 확률로 1, $\frac{4}{5}$의 확률로 0의 값을 갖는 확률변수이다. 이때 X는 자신의 모자를 받은 사람의 수이므로 $X = X_1 + \dots + X_5$이고, $E(X_i) = \frac{1}{5}$이므로 기댓값의 선형성에 의하여 $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$이다.

기하

기하

평면벡터의 합성과 분해

이번 칼럼에서는 평면벡터의 합성과 분해에 대해 알아보겠습니다. 평면벡터와 관련된 문제를 푸는 과정에서 가장 많이 활용되는 것이 바로 벡터의 합성과 분해입니다. 그렇다면 우리가 벡터의 합성과 분해를 사용하는 이유는 무엇일까요? 바로 다루기 어려운 벡터를 다루기 쉬운 벡터로 바꿀 수 있기 때문입니다.

특히 아래와 같은 상황들을 유도해 낼 수 있다면 문제를 푸는 것이 굉장히 편해집니다.

① 벡터의 개수 줄이기
② 길이가 고정된 벡터 만들기
③ 방향이 고정된 벡터 만들기

이제 자주 출제되는 구체적인 상황들 몇 가지를 살펴보려고 합니다. 그러나 아래의 내용을 무작정 외워서 쓰려고 하지 마시고, 우리의 기본적인 목표는 언제나 문제 해결에 적합한, 다루기 쉬운 벡터를 만들어내는 것임을 명심해야 합니다.

1. 시점/종점 일치

가장 기본적인 합성/분해의 방식은 시점 또는 종점을 일치시키는 것입니다. 두 벡터의 합이 주어졌다면 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을, 차가 주어졌다면 두 벡터의 시점 혹은 종점을 일치시키면 고려해야 하는 벡터의 개수가 줄어드므로 더 다루기 쉽습니다. 간단한 예시를 통해 살펴봅시다.

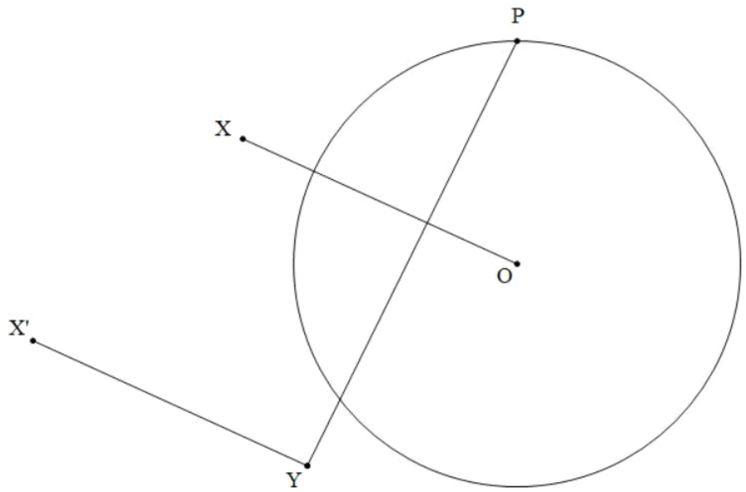
예시

중심이 O인 원과, 원 위의 한 점 P, 원 밖의 두 점 X, Y가 주어져 있다. $\lvert\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{YP}\rvert$가 최소가 되는 P의 위치를 찾아라.

위와 같은 문제에서, 두 벡터를 따로따로 생각하면 문제를 해결하기가 굉장히 어렵습니다. 그러나 $\overrightarrow{XO}$의 종점을 $\overrightarrow{YP}$의 시점으로 평행이동해서 생각하면 한 벡터의 크기의 최솟값을 묻는 문제가 되므로 쉽게 해결할 수 있습니다.

풀이

$\overrightarrow{XO}$를 아래의 그림과 같이 평행이동시킵니다.



결국 $|\overrightarrow{X'P}| = \overline{X'P}$의 최솟값을 묻는 문제가 되고, X', P, O가 순서대로 일직선 위에 있을 때 $\overline{X'P}$가 최소가 됩니다.

2. 중점과 내분점

중점이나 내분점을 활용하는 방법 역시 자주 사용됩니다. 중점이나 내분점을 활용하면 두 벡터의 합을 하나의 벡터로 표현할 수 있기 때문입니다. 고정된 두 점 A, B와 움직이는 점 X에 대하여 $n\overrightarrow{XA} + m\overrightarrow{XB}$꼴이 주어졌을 때, 다음이 성립합니다.

① ($n = m = 1$인 상황) $\overline{AB}$의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = 2\overrightarrow{XM}$이다.
② (일반적인 상황) $\overline{AB}$의 $m : n$ 내분점을 Y라 할 때, $n\overrightarrow{XA} + m\overrightarrow{XB} = (m+n)\overrightarrow{XY}$이다.

그런데 다음과 같이 내적을 묻는 상황이라면 어떻게 해야 할까요?

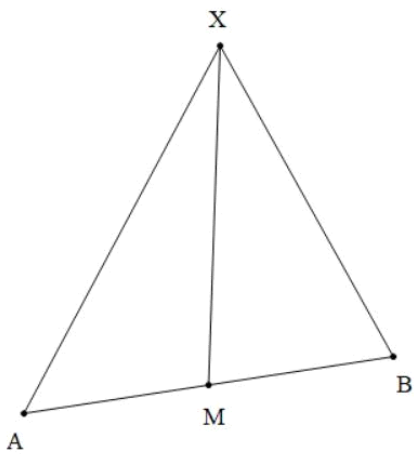
예시

> 고정된 두 점 A, B와 직선 l위의 점 X에 대하여, $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}$가 최소가 되는 X의 위치를 찾아라.

이 경우 역시 중점을 활용합니다. 다만, 두 벡터를 합치는 것이 아니라 중점을 이용하여 두 벡터를 각각 분해하게 됩니다.

풀이

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 두고, $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB}$로 분해합니다. 이때 $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = |\overrightarrow{XM}|^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$가 됩니다. ($\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 0$이므로)



$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$의 값은 일정하므로 결국 $|\overrightarrow{XM}|^2$가 최소인 상황을 찾으면 되고, X가 M에서 l에 내린 수선의 발일 때 $|\overrightarrow{XM}|^2$이 최소가 됩니다.

풀이에서 벡터를 분해할 때 고려해야 하는 벡터의 개수가 늘어난 것처럼 보이지만, $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$는 고정된 벡터이므로 실제로는 $\overrightarrow{XM}$만 생각하면 되어 고려해야 할 벡터의 개수가 감소합니다. 특히 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$가 합이 0인 벡터라는 사실이 편리하게 사용됨을 알 수 있습니다.

3. 원

원이 등장했을 때는 원의 중심을 기준으로 벡터를 분해해보는 것이 좋습니다. 이렇게 벡터를 분해하면 길이가 고정된 벡터를 얻을 수 있기 때문입니다. 그런데 여기서 “위에서는 벡터의 개수를 줄

이는 것이 좋다고 했는데, 벡터를 분해하면 개수가 늘어나는 것 아닌가요?”라는 의문을 품는 분도 있을 것입니다. 그러나 우리의 목표는 문제 해결에 적합한, 다루기 쉬운 벡터를 만드는 것임을 기억해야 합니다. 벡터의 개수가 늘어나더라도 각각의 분해된 벡터들이 문제 해결에 더 적합하다면 얼마든지 벡터의 분해를 시도할 수 있습니다. 간단한 예시 하나를 더 살펴봅시다.

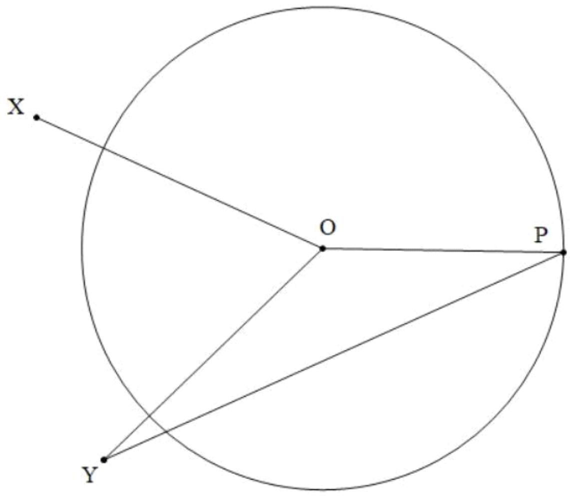
예시

중심이 O인 원과, 원 위의 한 점 P, 원 밖의 두 점 X, Y가 주어져 있다. $\overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{YP}$가 최소가 되는 P의 위치를 찾아라.

위와 같은 문제를 풀 때, $\overrightarrow{YP}$는 방향과 크기 모두가 변하는 벡터이기 때문에 다루기가 어렵습니다. 따라서 $\overrightarrow{YP}$를 고정된 벡터와, 크기가 일정한 벡터로 분해하는 것이 좋습니다.

풀이

$\overrightarrow{YP} = \overrightarrow{YO} + \overrightarrow{OP}$로 분해해서 생각합니다. 이 때 $\overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{YP} = \overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{YO} + \overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{OP}$가 됩니다.



$\overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{YO}$의 값은 일정하므로 결국 $\overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{OP}$의 최솟값을 묻는 문제가 되고, X, O, P가 순서대로 일직선 위에 있을 때 $\overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{OP}$가 최소가 됩니다.

4. 수직 분해

마지막으로는 벡터를 기준이 되는 선에 대하여 수직인 방향과 수평인 방향으로 분해하는 방법이 있습니다. 이 방법을 사용하면 벡터를 방향이 일정한 두 벡터로 분해하여 생각할 수 있으므로 다루기가 더 편해집니다. 벡터를 수직인 두 벡터로 분해하는 것은 좌표계를 도입하는 것과 같은 것으로 생각하여도 됩니다. 기준선을 x축으로 하는 좌표계를 생각해 보면 결국 기준선과 평행인 방향의 벡터는 x좌표, 기준선과 수직인 방향의 벡터는 y좌표를 나타낸다고 생각할 수 있기 때문입니다. 역시 예시 하나를 살펴봅시다.

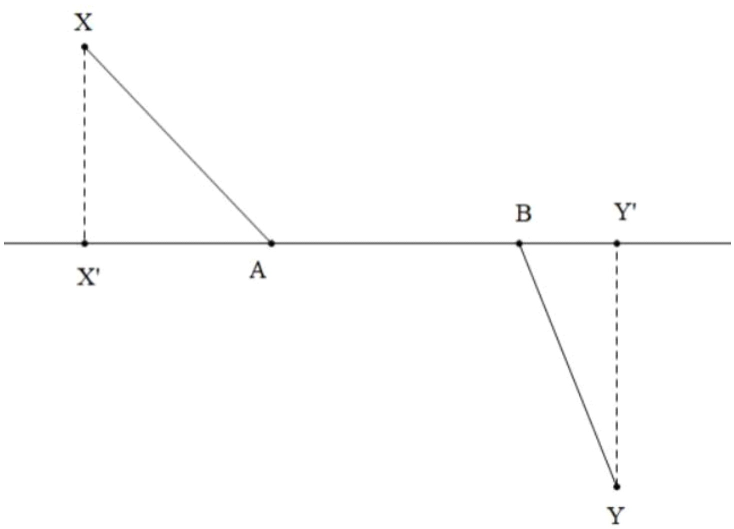
예시

직선 l 위의 두 점 A, B와 l 밖의 고정된 두 점 X, Y가 주어져 있다. $\overline{AB}=1$일 때, $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{YB}$가 최소가 되는 A, B의 위치를 찾아라.

위 문제의 경우 l을 기준으로 각 벡터를 분해하면 문제를 쉽게 해결할 수 있습니다. 그리고 내적이 주어진 경우, 수직인 벡터의 내적은 0이 되기 때문에 수직분해를 하면 많은 항이 사라지게 되어 문제 해결에 도움이 될 수 있습니다.

풀이

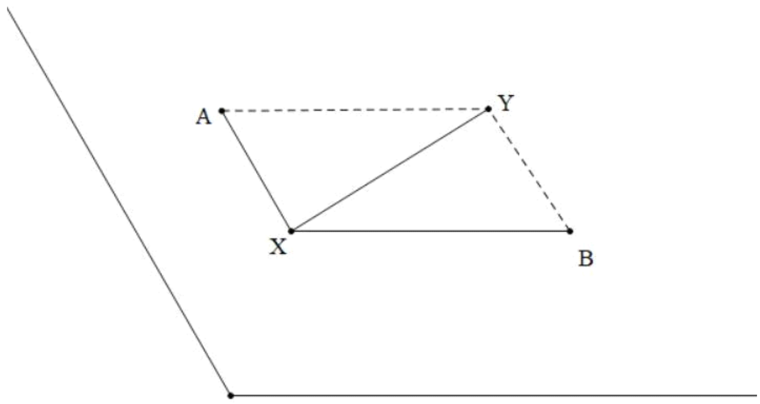
X, Y에서 l에 내린 수선의 발을 각각 X', Y'으로 둡시다. 이 때 수직인 벡터의 내적은 0이므로 $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{YB} = \overrightarrow{XX'} \cdot \overrightarrow{YY'} + \overrightarrow{X'A} \cdot \overrightarrow{Y'B}$가 됩니다.



$\overrightarrow{XX'} \cdot \overrightarrow{YY'}$의 값은 일정하므로 결국 $\overrightarrow{X'A} \cdot \overrightarrow{Y'B}$의 최솟값을 묻는 문제가 됩니다. 이때 X', A, Y', B 모두 l위의 점이므로 좌표를 도입하면 쉽게 해결할 수 있습니다. 계산하면

위에서는 수직으로 분해하는 경우만 고려하였지만, 아래의 그림처럼 수직이 아닌 두 직선 l, m을 기준으로 벡터를 분해하는 것도 고려할 수 있습니다. 이 경우 l, m을 기준으로 기울어진 좌표계가 생성된 것으로 생각하면 좋습니다.

벡터의 분해



$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$$

기하

공간도형의 상황파악

공간도형 문제를 만났을 때 가장 먼저 해야 할 일이 무엇일까요? 바로 문제에서 주어진 조건들이 어떤 상황을 나타내고 있는지 파악하고 이해하는 것입니다. 문제의 최종적인 목표가 되는 길이/부피의 값이나 최대/최솟값을 구하는 것 모두 상황에 대한 파악이 선행되지 않고서는 할 수 없기 때문입니다. 따라서 이번 칼럼에서는 공간도형에서 상황을 파악하는 데 도움이 되는 몇 가지 방법들을 알아보고자 합니다.

칼럼을 본격적으로 시작하기에 앞서서 한 가지를 강조하자면, 아래의 내용은 모든 상황에 절대적으로 적용할 수 있는 것은 아닙니다. 문제의 상황을 파악한다는 것은 결국 조건에 숨겨진 정보들을 찾아서 정보의 양을 늘려나가는 것과 같고, 우리의 궁극적인 목적은 조건에서 최대한 많은 정보를 뽑아내는 것입니다. 아래에 설명된 내용은 정보를 찾아내는 과정에 자주 사용되는 도구들일 뿐이며, 문제 풀이의 과정에서 이 도구들을 사용하는 본질적인 목적을 잊어서는 안됩니다.

이 칼럼에서 소개할 도구들은 다음과 같습니다.

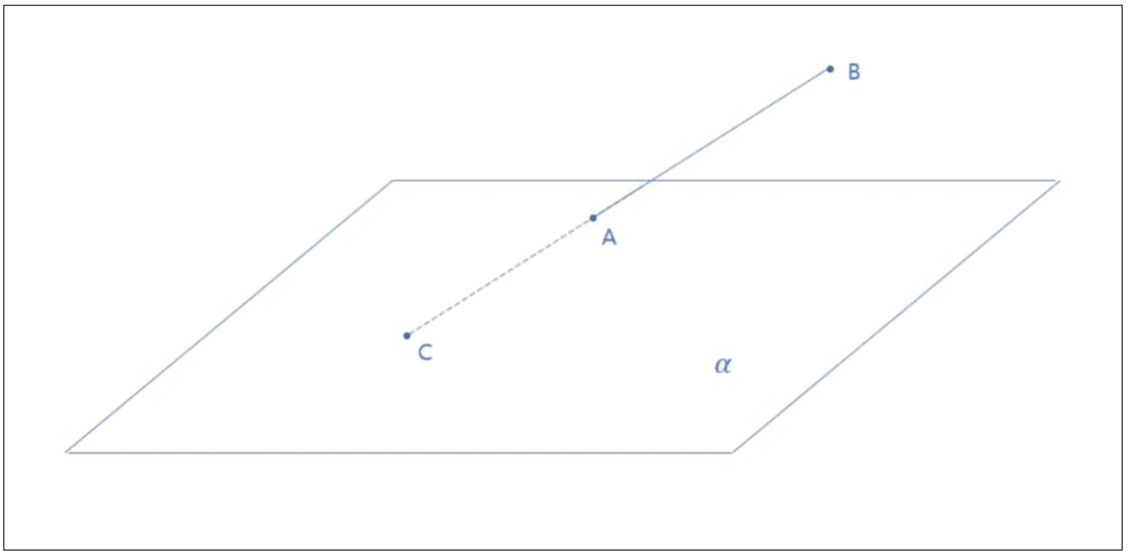
① 공간도형의 교집합 찾기
② 공간도형 간의 거리/각 계산하기
③ 특수한 관계 찾기
④ 조건을 도형의 교집합으로 해석하기

1. 공간도형의 교집합 찾기

공간도형의 상황을 파악하는 데 가장 기본이 되는 것은 도형들의 교집합을 표시하는 것입니다. 교집합을 표시하는 이유는, 두 공간도형의 교집합을 기준으로 하여 두 도형의 상대적인 관계를 파악할 수 있기 때문입니다. 구체적인 예시를 들어 살펴봅시다.

공간에서 어떠한 평면 α와, 선분 $\overline{AB}$가 주어졌다고 합시다. 두 도형 사이의 위치관계를 파악하기 위해서 우리가 가장 먼저 하는 일은, 선분 $\overline{AB}$를 직선 $\overleftrightarrow{AB}$로 연장한 후 평면 α와의 교점 C를 표시하는 것입니다. C를 표시하는 이유는 C를 이용하여 직선과 평면 사이의 각을 구할 수 있으며, $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ 등을 알아내면 평면과 점 사이의 거리 역시 구할 수 있기 때문입니다. 즉 우리는 C를 기준으로 삼아 평면 α와 선분 $\overline{AB}$ 사이의 관계를 파악하게 됩니다.

평면과 선분



평면과 평면이 주어졌을 때도 우리는 두 평면의 교선을 자연스럽게 생각하게 됩니다. 교선을 기준으로 하여 이면각 등 중요한 성질들을 계산할 수 있기 때문입니다. 마찬가지로 구와 평면, 구와 직선 등이 주어졌을 때도 우리는 도형들의 교집합을 생각하여서 위치 관계를 파악하게 됩니다.

2. 각과 길이

이렇게 교집합을 표시하고 난 후에, 우리가 다음으로 하는 것은 여러 각과 길이를 계산해보는 것입니다. 교집합을 기준으로 도형들의 관계를 파악하기 위해서는, 결국 도형들 사이의 각과 길이를 알아내어야 하기 때문입니다. 예를 들자면 평면과 평면의 관계에서는 이면각, 평면과 직선 사이의 관계에서는 직선과 평면이 이루는 각, 직선과 직선 사이의 관계에서는 두 직선이 이루는 각과 직선 간의 거리가 중요한 변수가 됩니다. 이러한 변수들을 쉽게 알아내기 위해서는 여러 변수 사이의 관계를 정확하게 알고 있는 것 역시 중요합니다. 이 칼럼에서 직접적으로 다루지는 않겠으나 교과서를 비롯하여 여러 개념서에 등장하는 내용이므로 다른 책을 참고하셔서 반드시 숙지해야 합니다.

3. 특수한 관계

길이나 각에 대한 정보들을 얻고 난 후, 특수한 관계들이 성립하는지 확인해보는 것이 좋습니다. 도형 사이에 특수한 관계가 성립할 경우 활용할 수 있는 좋은 성질들이 많아지기 때문입니다. 특수한 관계의 대표적인 예시들은 다음과 같습니다.

① 수직 (직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면 등)
② 평행 (직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면 등)
③ 한 직선/평면 위

이런 특수한 관계들을 찾아낸다면, 우리는 많은 정보들을 추가적으로 이끌어낼 수 있습니다. 예를 들어, 수직한 두 도형을 발견하였다면 피타고라스 정리를 사용하여 길이를 쉽게 구할 수 있으며, 삼각비를 이용하여 각을 쉽게 구할 수 있습니다. 또한 삼수선의 정리를 활용하여 새로운 수직관계를 찾아낼 수도 있고, 수직 관계를 통해서 평행인 도형을 찾아낼 수도 있습니다.

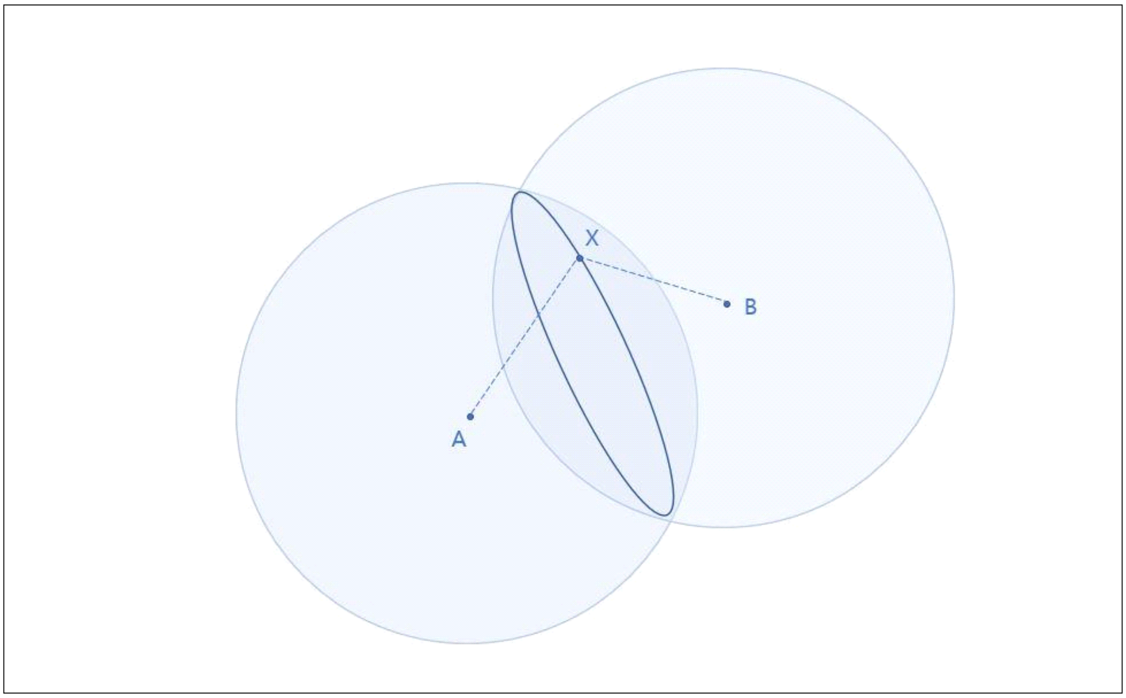
평행인 두 도형을 찾아냈다면, 우선 엇각/동위각 등을 활용하여 각에 대한 정보를 얻어낼 수 있습니다. 또한 닮음 관계인 삼각형을 찾아내 길이에 대한 정보 역시 얻을 수 있습니다.

마지막으로 한 직선/한 평면 위에 있는 점들을 찾아낸다면, 점들의 위치관계를 그 직선/평면 위에서만 생각하면 되므로 점들을 다루는 것이 훨씬 편해집니다.

4. 조건의 해석

마지막으로 주어진 조건들을 파악할 때, 각 조건이 의미하는 도형을 생각하면 문제 상황을 파악하는 것이 좋습니다. 예를 들어 문제에 $AX = BX = 5$라는 조건이 주어졌다고 합시다. 이 조건을 그대로 파악하는 것은 힘들지만, 아래의 그림과 같이 A와 B를 중심으로 하고 반지름이 5인 구의 교선 위에 X가 위치한다고 생각하면 조건을 파악하는 것이 훨씬 쉽습니다.

두 구의 교선



즉 복잡한 조건이 주어진 문제에서는, 각 조건이 의미하는 도형과 그 교집합을 그리면서 문제 상황을 구성해나가는 것으로 생각하면 편리합니다.

기하

공간도형의 상황파악 – 평면화

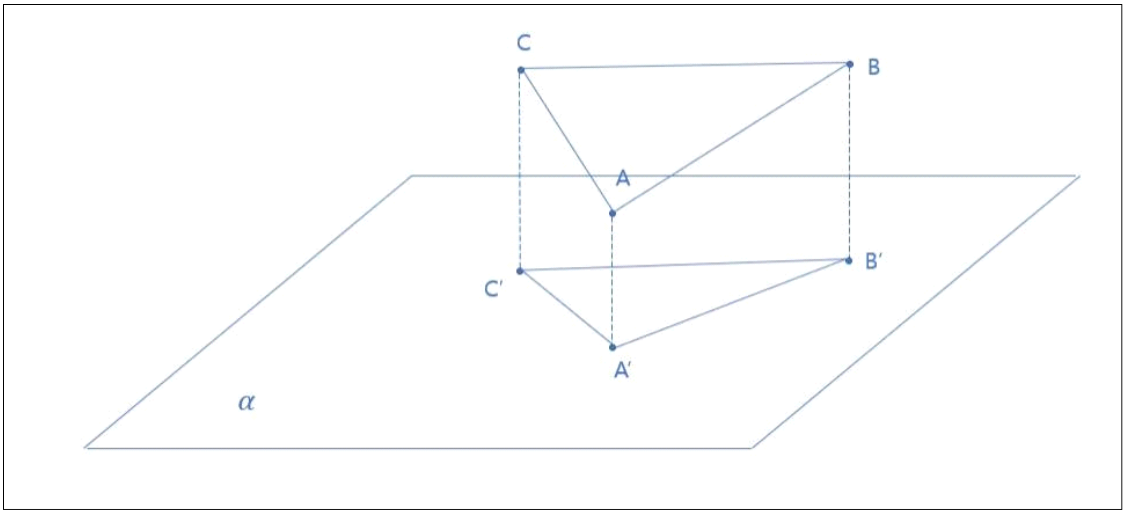
지난 칼럼에서는 공간도형 문제의 상황을 파악하는 몇 가지 원칙에 대해 알아보았습니다. 그런데 공간도형의 상황 파악을 위해서 사용할 수 있는 도구가 하나 더 있습니다. 우리가 공간도형 문제를 어렵게 느끼는 이유는 무엇일까요? 우리가 한눈에 파악할 수 있고, 시험지 위에 그릴 수 있는 평면에 비해서 공간의 상황은 한 번에 상상하기가 어렵기 때문입니다. 따라서 공간도형의 상황을 평면에서의 상황으로 바꿀 수 있다면 문제를 해결하기가 훨씬 쉬워집니다. 즉 공간도형의 상황파악에서는 평면화를 적극적으로 사용할 수 있습니다. 평면화를 위한 도구로는 대표적으로 아래 두 가지가 있습니다.

① 사영 활용하기
② 단면 활용하기

1. 사영과 평면화

사영을 활용한다는 것은 결국 한 평면 α를 기준으로 하여 이 평면에 수선의 발을 내리는 것이고, 이는 일종의 좌표계를 구성하는 것과 같습니다. 이런 작업을 하면 공간도형을 아래 그림과 같이 α 위에서의 평면도형에서 높이가 추가된 것으로 생각할 수 있습니다. 즉 우리가 파악하기 쉬운 α 위에서의 관계를 먼저 분석하고, 높이가 추가되었을 때의 상황을 다음으로 분석하면 문제 상황을 파악하기가 쉬워집니다.

사영

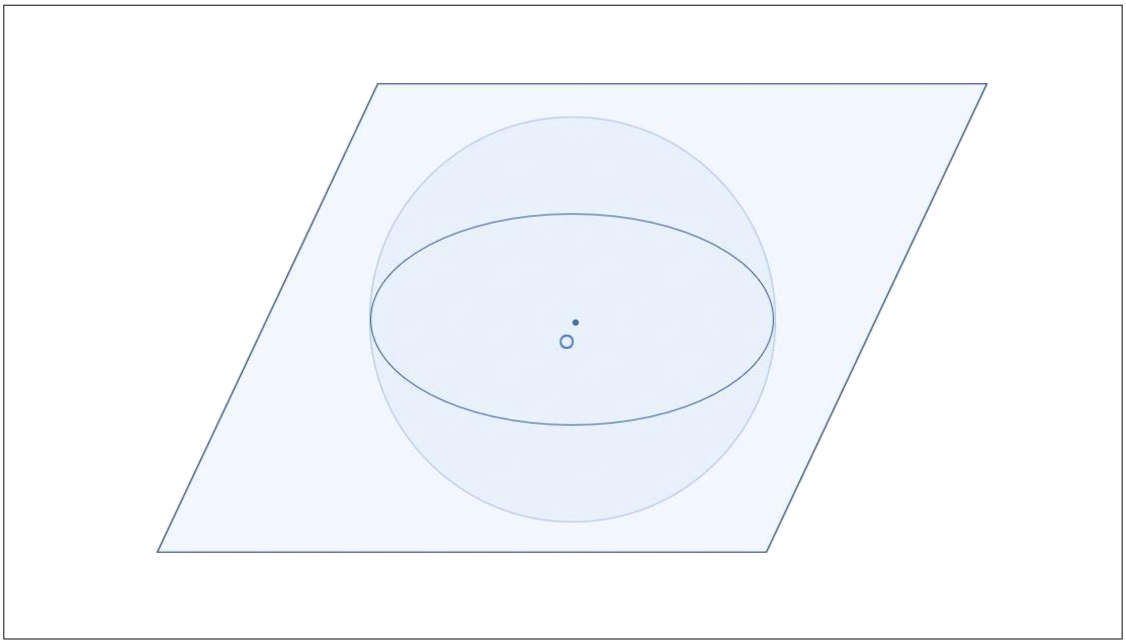


이때 중요한 것은 기준이 되는 평면 α의 설정입니다. 전 칼럼에서도 말했지만 우리의 목적은 문제 풀이에 유용한 정보를 최대한 많이 뽑아내는 것이고, 이를 위해서는 α 역시 우리의 목적을 고려하면서 설정해야 합니다. 정해진 법칙은 없지만, 문제에서 제시된 직선이나 평면에 수직하게 α를 잡으면 좋습니다. 이 경우 사영을 하였을 때 직선은 점이, 평면은 직선이 되어 상황을 파악하기가 더 쉬울뿐더러 많은 수직 관계 역시 보존되기 때문입니다. 또한 α를 문제에서 제시된 직선이나 평면에 평행하게 잡거나, 문제에서 직접 제시된 평면으로 설정하는 것 역시 좋습니다.

2. 단면과 평면화

단면화는 공간도형의 상황을 특정 평면 α로 잘라 그 단면을 관찰하는 것입니다. 단면화 역시 특정한 점들과 도형의 관계를 평면 위에서 파악하고 싶을 때 사용하게 됩니다.

단면



단면을 활용하는 경우 역시 기준이 되는 평면 α의 설정이 중요합니다. 문제 풀이에 유용한 정보를 만들어내기 위해서는, 당연하게 들릴 수도 있지만 중요한 점들이나 직선을 포함하는 단면을 만드는 것이 좋습니다. 단면화를 통해서는 α 위의 점들 간의 관계만을 파악할 수 있고, 따라서 우리가 관계를 파악하려는 도형들이 α 안에 있어야 하기 때문입니다. 중요한 점이나 직선의 대표적인 예시를 들자면 구의 중심, 공간도형의 축이나 꼭짓점, 접점 등이 있습니다.

수학Ⅱ & 미적분

수학 2

합성함수 그래프 쉽게 그리기

가장 쉽게 접할 수 있는 일차함수와 일차함수의 합성함수는 구간을 나누고 대입하여서 쉽게 그릴 수 있습니다. 예시를 통해 살펴봅시다.

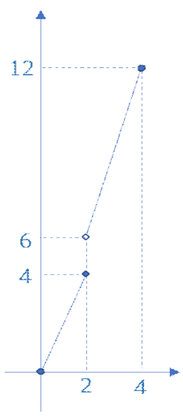
예시

$0 \le x \le 4$에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \le x \le 2) \\ 3x & (2 < x \le 4) \end{cases}$라 하자. $0 \le x \le 2$에서 정의된 함수 $h(x) = (f \circ f)(x)$의 그래프를 그려라.

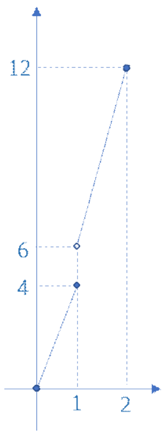
위와 같은 문제는 함수를 직접 대입하는 것이 효율적입니다.

풀이

$h(x) = f(f(x))$, $h(x) = \begin{cases} 2f(x) & (0 \le f(x) \le 2) \\ 3f(x) & (2 < f(x) \le 4) \end{cases}$이다. $f(x)$는 아래의 그림과 같이 나타낼 수 있습니다.



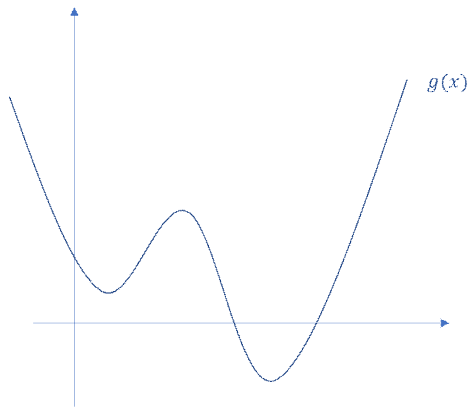
그림에서 $0 \le f(x) \le 2$인 x의 범위는 $0 \le x \le 1$입니다. 이 범위에서 $h(x) = 2f(x) = 4x$가 됩니다. 또한 $2 < f(x) \le 4$인 x의 범위는 $1 \le x \le 2$입니다. 이 범위에서 $h(x) = 3f(x) = 6x$입니다. 종합하면 $h(x)$의 그래프는 아래와 같습니다.

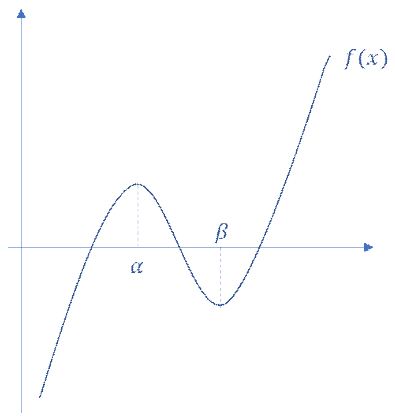


하지만 차수가 클수록 대입을 하여서 그래프를 그리기는 어려워집니다. 이번에는 차수가 클 때 합성함수의 그래프를 쉽게 그리는 방법을 알아보도록 하겠습니다. 아래의 방법을 사용하면 그래프의 모든 요소를 정확히 그릴 수는 없지만, 함수의 증감/극값을 효율적으로 파악할 수 있습니다. 역시 예시를 통해 살펴봅시다.

예시

사차함수 $g(x)$와 두 개의 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. $g(f(x))$ 그래프의 개형을 그려라.

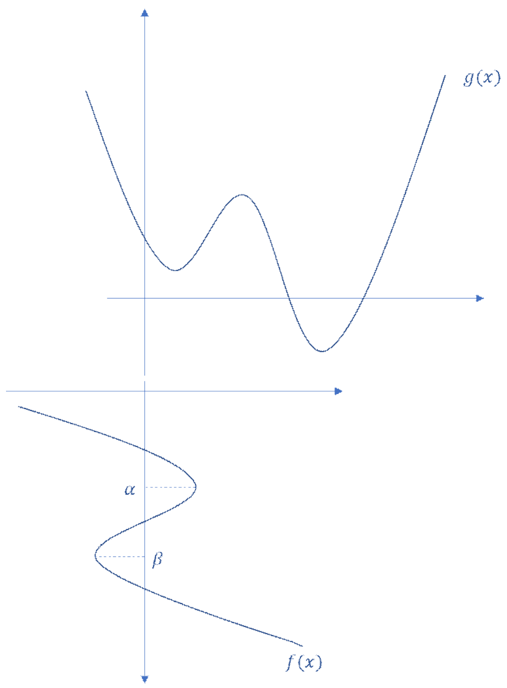




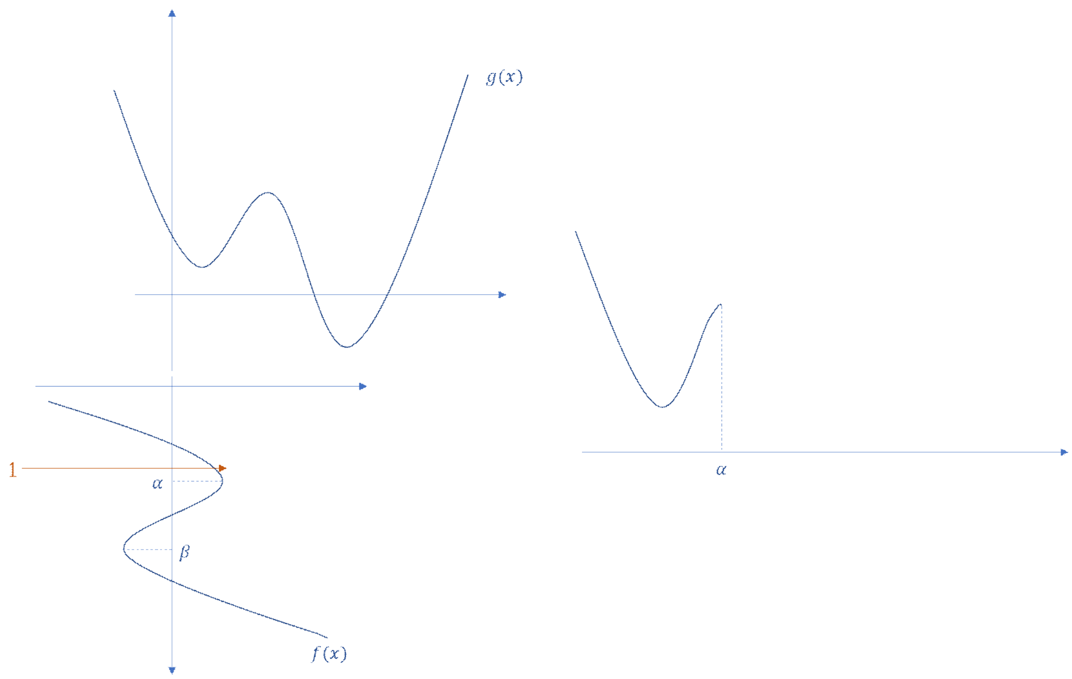
사차함수와 삼차함수의 합성은 12차 함수가 될 텐데, 이 함수를 직접 미분해서 그래프의 개형을 그리는 것은 어렵습니다. 따라서 다른 방법을 사용하는 것이 좋습니다.

풀이

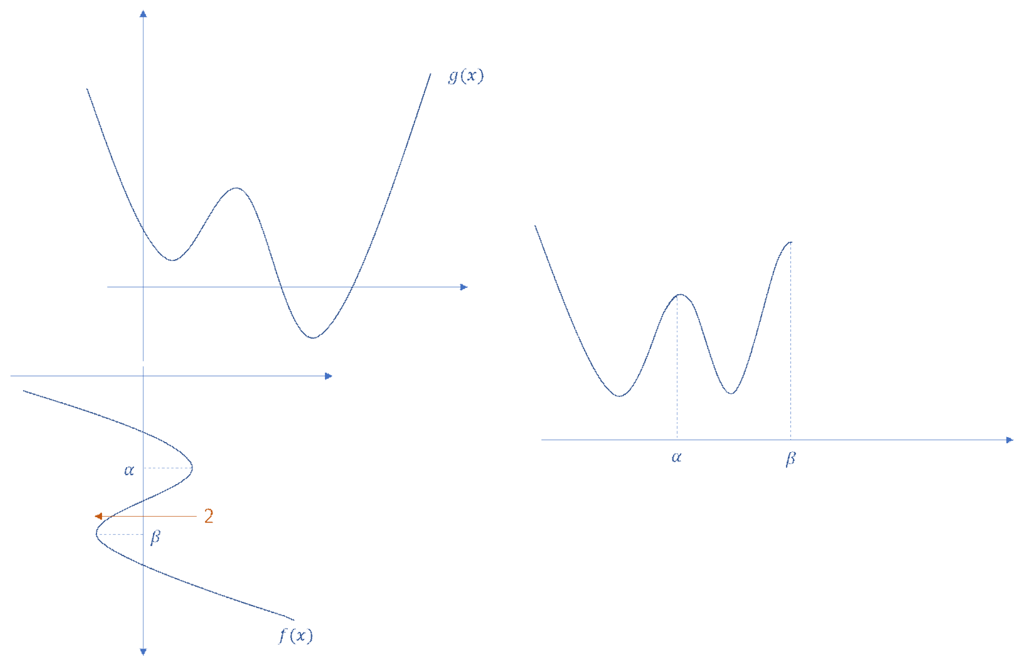
우선 겉에 있는 함수인 $g(x)$는 그대로 두고 속에 있는 함수인 $f(x)$는 90도로 돌립니다. 그 이후 두 그래프를 합칩니다.



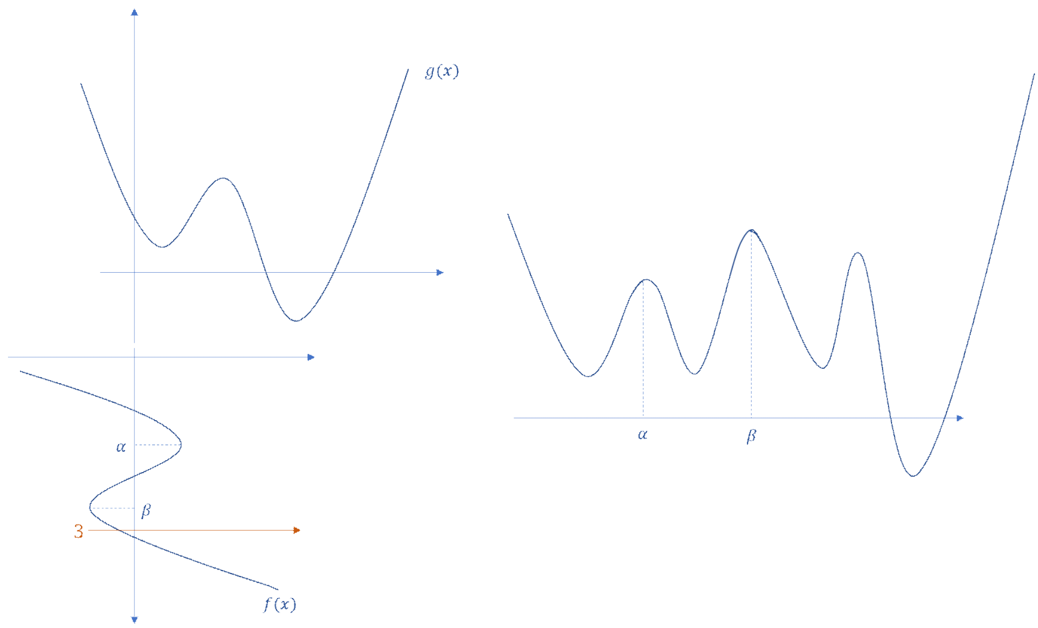
$(-\infty,\alpha)$ 에서는 $f(x)$가 1의 방향으로 증가하므로, $g(f(x))$의 형태는 대략 아래와 같습니다.



(α,β) 에서는 $f(x)$가 2를 따라 감소하므로, $g(f(x))$의 형태는 대략 아래와 같습니다.



(β, ∞) 에서는 $f(x)$가 3을 따라 증가하므로, $g(f(x))$의 형태는 대략 아래와 같습니다.



이렇게 세 부분을 합치면 합성함수의 그래프를 파악할 수 있습니다.

위와 같은 방법을 사용한다면 각 범위에서의 합성함수의 증가와 감소를 쉽게 파악하여 합성함수의 그래프를 쉽게 그릴 수 있습니다.

수학 2

합성함수의 연속성 판단

이번 칼럼에서는 수능 수학 나형에서 자주 접하는 유형을 살펴볼 텐데요, 바로 불연속 점에서 합성함수를 합성하면 합성함수가 불연속인지 연속인지를 판단하는 유형입니다. 정의를 떠올리면 합성함수가 연속이 되기 위해서는 우극한과 좌극한, 그리고 함수값이 모두 같아야 합니다.

우선 가장 기본적인 함수를 통해서 합성함수의 연속과 불연속을 판단하는 방법에 대해 간단히 알아보겠습니다.

예시

$f(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 일 때 $f(f(x))$는 연속인가?

풀이

$x\ge 0$일 때 $f(x)=1$이고, $f(f(x))=f(1)=1$ 입니다.
$x<0$일 때 $f(x)=-1$이고, $f(f(x))=f(-1)=-1$ 입니다.
따라서 $f(f(x))=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$이고 $x=0$에서 극한값을 갖지 않으므로 불연속입니다.

위의 경우에서는 합성함수가 불연속이 되었지만, 사실 원래 함수에 불연속점이 존재한다 해서 합성함수가 반드시 불연속인 것은 아닙니다. 즉 아래의 네 가지 경우가 모두 가능합니다.

가) $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 $f(f(x))$ 역시 $x=a$에서 연속
나) $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 $f(f(x))$는 $x=a$에서 불연속
다) $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이고 $f(f(x))$는 $x=a$에서 연속
라) $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이고 $f(f(x))$ 역시 $x=a$에서 불연속

이와 같은 상황이 모두 가능하므로 결국 중요한 것은 기본적인 정의에 충실하게 문제를 해결하는 것입니다.

즉, 가)나 다)와 같은 상황이 되려면 다음 조건을 만족해야 합니다.

1) $f(f(x))$가 $x=a$에서 정의된다.
2) $x=a$에서 $f(f(x))$의 극한값이 존재한다.
3) 함수값과 극한값이 일치한다.

반대로 1), 2), 3) 중 하나라도 만족하지 못한다면 나) 또는 라)와 같은 상황이 되겠죠.

이번에는 합성함수에서 극한값을 쉽게 판단하는 방법에 대해 알아보겠습니다.

예를 들어 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 \ x<0 \\ x^2+1 \ x \geq 0 \end{cases}$ 와 같은 함수에서 $x \to 0-$, $x \to 0+$으로의 극한을 구할 때, $\lim_{x \to 0+} f(x)=a_1$과 같이 표현하는 것이 아니라 극한의 방향을 포함하여 $\lim_{x \to 0+} f(x)=a_1+$와 같이 표현한다면 합성함수의 극한을 계산하는 것이 더 편해집니다. 실제로 합성함수의 극한을 구할 때 $\lim_{x \to 0+} f(f(x))=\lim_{t \to a_1+} f(t)$ 가 된다는 것을 위의 극한 표현으로부터 바로 알 수 있으므로 계산을 더 편하게 할 수 있습니다.

마찬가지로 $f(f(f(x)))$등 합성함수를 다시 합성한 함수의 연속 불연속을 확인할 때도 이러한 방법을 쓸 수 있습니다. 이때도 결국 $f(f(f(x)))$의 연속성을 확인하려면 최종적으로 합성된 함수에서의 값들, 즉 $f(f(f(x)))$의 우극한과 좌극한, 그리고 함숫값을 확인하여 연속성을 판단하면 됩니다.

수학 2

절대값과 구간별로 정의된 함수

이번 칼럼에서는 구간별로 다르게 정의된 함수, 그 중에서도 구간이 특이하게 정의된 함수를 분석하는 방법에 대해 알아보겠습니다.

우선 구간별로 정의된 함수의 가장 기본적인 예시를 살펴봅시다.

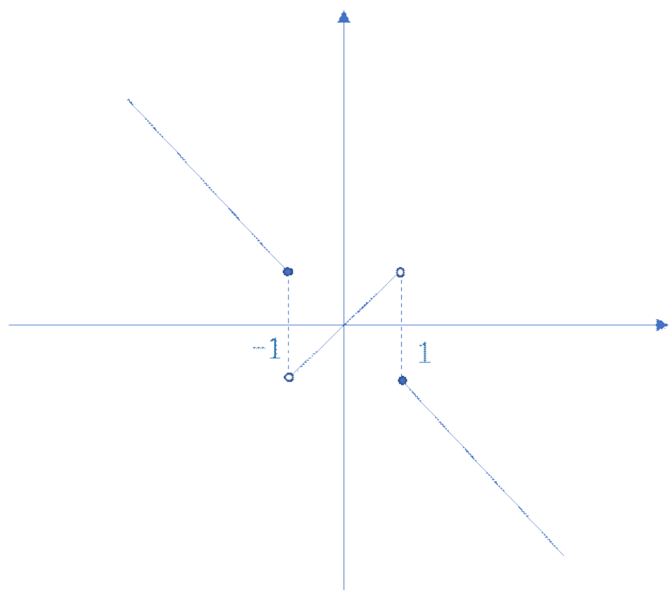
예시 1

$f(x)=\begin{cases}-x & (|x| \geq 1)\\ x & (|x|<1)\end{cases}$의 그래프를 그리시오.

위와 같이 비교적 간단한 상황으로, x가 직접 등장한 경우는 누구나 쉽게 해결할 수 있습니다. 풀이는 아래와 같습니다.

풀이 1

$x \geq 1$ 또는 $x \leq -1$일 때 $f(x)=-x$이고, $-1<x<1$일 때 $f(x)=x$이므로 그래프의 모양은 아래와 같습니다.



하지만 위보다 조금 더 복잡한 상황이라면 어떻게 해야 할까요? 예를 들어 아래와 같은 문제를 살펴봅시다.

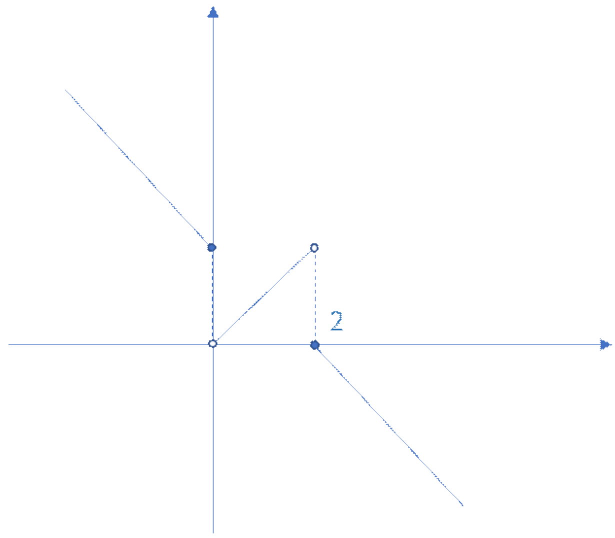
예시 2

$g(x)=(x-1)^2$일 때, $f(x)=\begin{cases} -x & (g(x)\geq 1) \\ x & (g(x)<1) \end{cases}$ 의 그래프를 그리시오.

이 경우는 문제를 어떻게 풀어야 할까요? 사실 무서운 비주얼과는 달리, 푸는 방법은 위의 문제와 완전히 똑같습니다! 어쨌든 우리가 찾아야 할 것은 각 구간별 함수가 갖는 정의역의 범위, 즉 x의 범위이기 때문에 이를 풀어주기만 하면 됩니다.

풀이 2

$g(x)\geq 1$은 $(x-1)^2\geq 1$과 동치이고, 이는 결국 $x\geq 2$ 또는 $0\geq x$와 동치입니다. 반대로 $g(x)<1$은 $2>x>0$과 동치가 됩니다.
따라서 $x\geq 2$ 또는 $0\geq x$ 일 때 $f(x)=-x$ 이고, $2>x>0$ 일 때 $f(x)=x$이므로 그래프의 모양은 아래와 같습니다.



이제 더 심화된 상황으로, 절댓값이 포함된 상황을 살펴봅시다. 이 경우에도 결국 정의역의 범위를 잡아주면 뒤므로 방법은 본질적으로 같습니다. 다만 범위를 나타내는 부등식에 절댓값이 들어가 있으므로 절댓값이 들어간 부등식을 푸는 방법을 활용하기만 하면 됩니다.

예시 3

$g(x)=x(x-3)$일 때, $f(x)=\begin{cases} x & (|g(x)|\geq 1) \\ -x & (|g(x)|<1) \end{cases}$ 의 그래프를 그리시오.

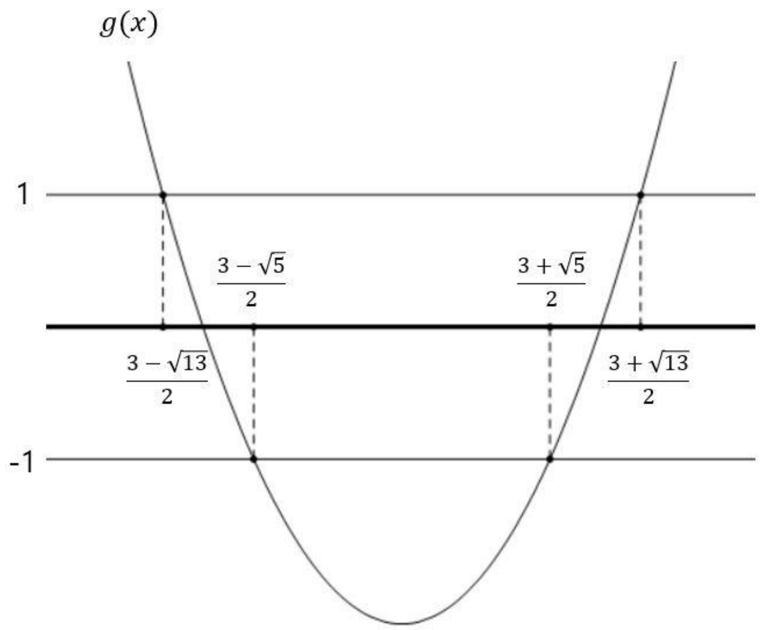
이렇게 범위에 절댓값이 들어간다면 다음 두 가지 방법 중 하나를 사용할 수 있습니다.

① 그래프를 그린 후 x축과의 교점, 그래프의 개형을 확인하는 방법
② 함수의 절대값과 부등식이 경계값이 같아지는 x값들을 찾아서 판단하는 방법

차수가 낮을 때는 첫 번째 방법도 시도해볼 수 있지만, 차수가 높아지면 두 번째 방법이 더 편리하게 됩니다. 우선 첫 번째 방법부터 살펴봅시다.

풀이 3

$g(x) \le -1$ 또는 $g(x) \ge 1$일 때 $f(x) = x$이고 (1), $-1 < g(x) < 1$일 때 $f(x) = -x$가 된다 (2). 이때 $g(x)$의 그래프와 $y=1, y=-1$ 그래프를 그려서 교점을 확인하면 아래와 같다.



위에 그래프에서 확인할 수 있듯이 (1)의 범위에 해당하는 것은 $x \le \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ 또는 $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 또는 $\frac{3+\sqrt{13}}{2} \le x$ 이며, (2)의 범위에 해당하는 것은 $\frac{3-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{13}}{2}$이다. 이제 각 범위별로 $f(x)$의 그래프를 그려주면 된다.

마지막으로 차수가 높을 때 두 번째 방법을 적용하는 예시를 살펴보도록 합시다. 이때 절댓값이 들어간 부등식의 경계가 될 수 있는 값들을 모두 찾아 정의역을 여러 구간들로 나눈 후, 각 구간에서 적당한 수들을 하나씩 대입하여 각 구간이 부등식의 어느 영역에 속하는지를 파악하면 됩니다.

예시 3

$g(x)=(x-2)x(x+2)$일 때, $f(x)=\begin{cases} x & (|g(x)|\geq 3) \\ -x & (|g(x)|<3) \end{cases}$ 의 그래프를 그리시오.

예를 들어 이 문제의 경우, $|g(x)|=3$이 되는 x값들을 기준으로 실수들을 여러 구간으로 나눈 후, 각 구간에서 적당한 수를 대입하여 그 구간에서 $|g(x)|>3$인지 $|g(x)|<3$ 인지를 확인하면 됩니다.

풀이 3

$|g(x)|=3$을 풀기 위해서는 $g(x)=3, g(x)=-3$의 근들을 확인하면 됩니다. 즉 $x^3-4x+3=0, x^3-4x-3=0$을 풀어 해들을 구하고, 각 구간에서 적당한 수를 대입해서 부등식을 확인하면 됩니다.

절대값과 미분가능성

절댓값 함수의 미분 가능성을 물어보는 대표적인 예시는 아래의 문제입니다. 이렇게 절댓값 함수의 미분 가능성을 묻는 경우 그래프를 정확히 파악하는 것이 좋습니다. 그래프의 모양을 통해서 미분 가능 여부를 확인할 수 있기 때문입니다. 문제와 풀이를 통해 자세히 알아보겠습니다.

2010학년도 6월 평가원 24번

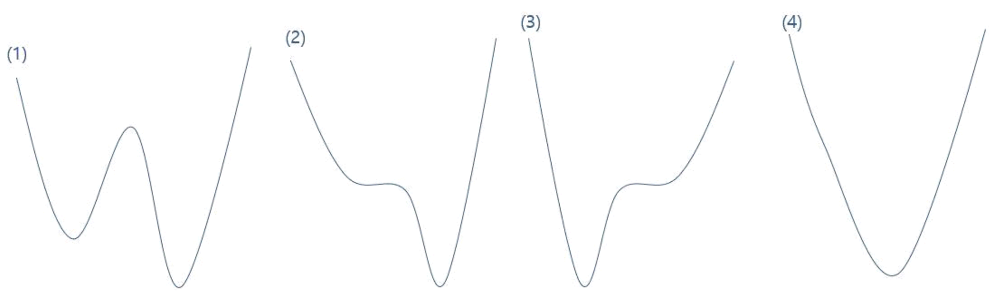
24. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [4점]

> **(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.**
>
> **(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a\ (a>2)$에서만 미분가능하지 않다.**

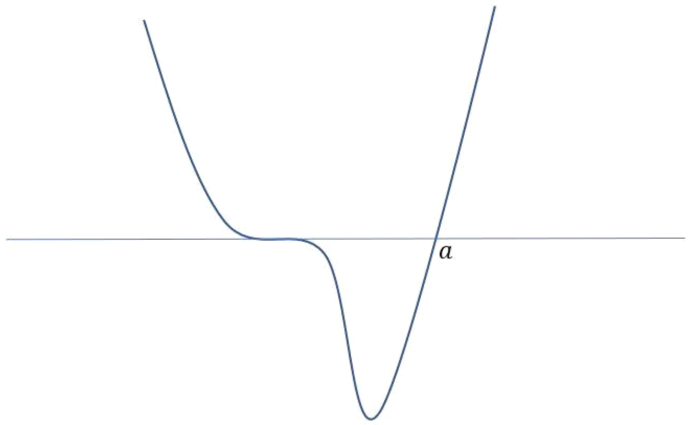
풀이

(가) 조건은 쉽게 파악이 가능합니다. 하지만 (나) 조건을 해석할 때 함수의 그래프를 정확히 파악하지 못한다면 문제에 접근조차 하지 못할 수 있습니다.

최고차항의 계수를 양수로 둔다면 4차 함수의 그래프의 개형으로 가능한 것은 아래 네 가지가 있습니다.



여가서 $a>2$이므로 (나) 조건을 만족시킬 수 있는 그래프의 개형은 (2) 밖에 없습니다. $x=a$에서만 미분이 불가능하므로 아래 그림과 같이 그래프가 그려져야 합니다.



즉 $k(x-b)^3(x-a)=f(x)-f(1)$이 됩니다. 이때 x에 1을 대입하면 $b=1$임을 확인할 수 있고, $f'(2)=0$에서 $a=\frac{7}{3}$임을 알 수 있습니다. 따라서 답은 9가 됩니다.

수학 2

절대값이 포함된 함수의 적분

절댓값이 포함된 함수의 적분을 해석하는 방법은 아래 두 가지가 있습니다.

① 범위를 나누어서 푸는 방법
② 함수의 의미를 찾는 방법

우선 첫 번째 방법부터 살펴봅시다.

예시 1

$\int_{-1}^{1}|x|dx$를 계산하는 문제가 나온다면, $x=0$으로 범위를 나누면 되므로

$\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{1}x\,dx$로 표현할 수 있다.

조금 더 복잡한 예시를 살펴봅시다.

예시 2

$\int_{-1}^{x}|t-1|dt$를 계산하라는 문제가 나온다면, $x=1$로 범위를 나누면 된다.

$$\int_{-1}^{x}|t-1|dt=\begin{cases}\int_{-1}^{1}(-t+1)dt+\int_{1}^{x}(t-1)dt & (x\geq 1)\\ \int_{-1}^{x}(-t+1)dt & (x<1)\end{cases}$$ 이다.

위의 문제를 풀 때 가장 중요한 것은 변수를 정확하게 파악하는 능력입니다. $\int_{-1}^{x}|t-1|dt$는 결국 x에 대한 함수이므로 범위를 나누어서 함수를 구할 때는 t가 아닌 x로 범위를 나누어야 할 것이며, 적분식 안에서는 x가 아닌 t가 적분의 대상이 되는 변수이므로 t값을 기준으로 구간을 쪼개어야 할 것입니다. 절댓값 안에 더 복잡한 함수가 들어간 경우를 살펴봅시다.

예시 3

$f(t)=(t-1)(t-2)$일 때, $g(x)=\int_0^x |f(t)|dt$를 구하여라.

풀이 3

$$g(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)\,dt & (x<1) \\ \int_0^1 f(t)dt+\int_1^x (-f(t))dt & (1\le x<2) \\ \int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 (-f(t))dt+\int_2^x f(t)dt & (2\le x) \end{cases}$$ 이다.

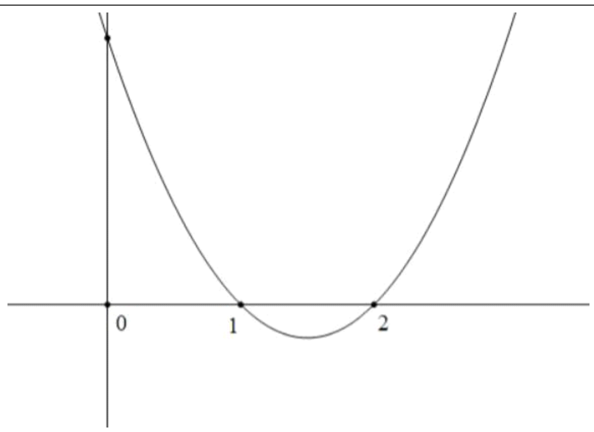
이 역시 변수가 무엇인지 잘 생각해야 합니다. 예를 들어 아래와 같이 절댓값을 풀어버린다면 틀린 풀이가 됩니다.

잘못된 풀이

$$g(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)dt & (f(x)>0) \\ \int_0^x (-f(t))dt & (f(x)\le 0) \end{cases}$$ 이다.

무엇이 잘못된 것일까요? 적분되는 변수는 x가 아니라 t임에도 불구하고 $f(x)$의 부호로 $|f(t)|$의 값을 결정하여 적분식을 나눈 것이 잘못되었습니다. 만약 위처럼 식으로 파악하는 것이 어렵다면 아래 풀이와 같이 그래프를 활용하는 방법도 있습니다.

그래프를 활용한 풀이



위의 그래프를 봅시다. $g(x)=\int_0^x |f(t)|dt$는 결국 0부터 x까지 그래프 사이의 넓이가 됩니다.

이때 t가 1 이하인 범위와 2 이상인 범위에서는 $f(t)$의 값이 양수이므로, 이 구간에서 적분을 할 때는 $f(t)$를 그대로 적분해주면 됩니다. 반대로 1과 2 사이의 범위에서는 $f(t)$의 값이 음수이므로 $-f(t)$를 적분해주면 됩니다.

이제 두 번째 방법을 기출문제를 통하여 살펴보겠습니다.

2019학년도 7월 모의고사 나형

30. $x=-3$과 $x=a\,(a>-3)$에서 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3) \\ \int_0^x |f'(t)|dt & (x\ge -3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(-3)=-16$, $g(a)=-8$
(나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(다) 함수 $g(x)$는 극솟값을 갖는다.

$\left|\int_a^4 \{f(x)+g(x)\}dx\right|$의 값을 구하시오. [4점]

우선 첫 번째 방법대로, 절댓값의 범위를 나누어서 풀어보겠습니다.

풀이 1

우선 (다) 조건부터 해석해봅시다. 만약 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수라면 $x<3$에서 $g(x)$가 증가하고, $|f'(x)|$ 역시 양수이므로 $x\ge -3$에서 역시 $g(x)$가 증가합니다. 이 경우 $g(x)$는 극소값을 갖지 않고, 이는 (다) 조건에 모순입니다. 따라서 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수가 됩니다.

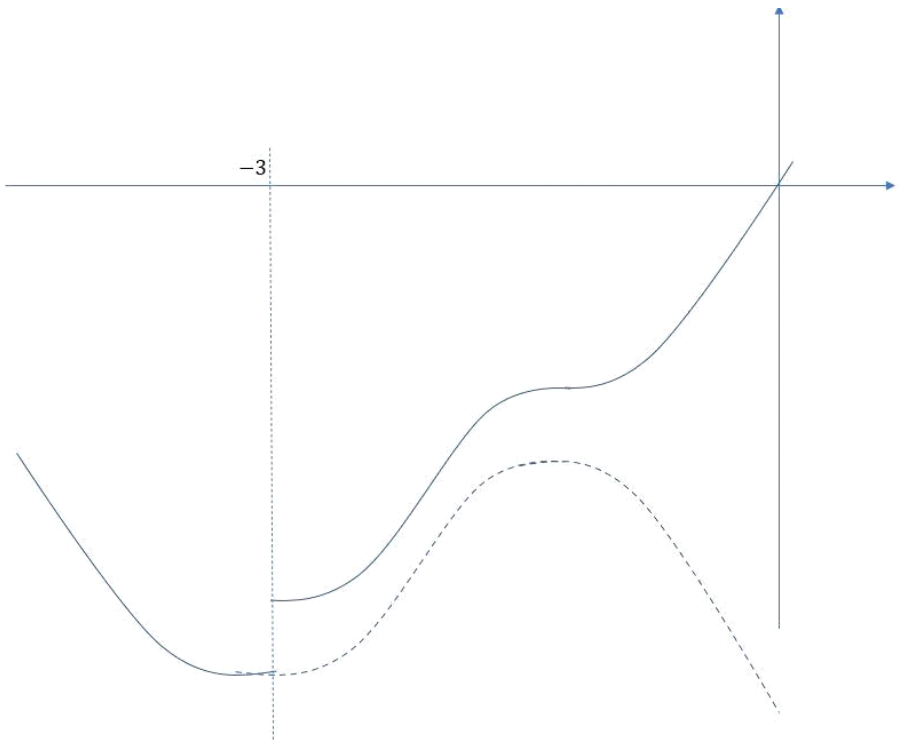
이제 $g(x)$를 본격적으로 분석해 봅시다. $-3<x<a$에서 $f'(x)<0$이고, $a<x$에서 $f'(x)>0$이므로 $g(x)=\begin{cases} \int_0^a -f'(t)dt+\int_a^x f'(t)dt = f(x)+f(0)-2f(a) & (x<a) \\ \int_0^x -f'(t)dt = -f(x)+f(0) & (x\ge a) \end{cases}$가 됩니다.

이제 함수가 바뀌는 $x=-3$에서 함수의 연속성을 분석하면 $f(-3)=f(-3)+f(0)-2f(a)$이 나옵니다. 즉 $f(0)=2f(a)$가 됩니다. 이제 $g(a)=-8$을 이용하면 $f(0)=-16, f(a)=-8$이고 $g(-3)=-16$에서 $f(-3)=-16$을 얻을 수 있습니다. 마지막으로 $f'(x)=k(x+3)(x-a)$를 적분해서 $f(x)$를 구하면 $f(x)=-2x^3-12x^2-18x-16$이고, 우리가 구하고자 하는 값을 계산하면 됩니다.

풀이 2

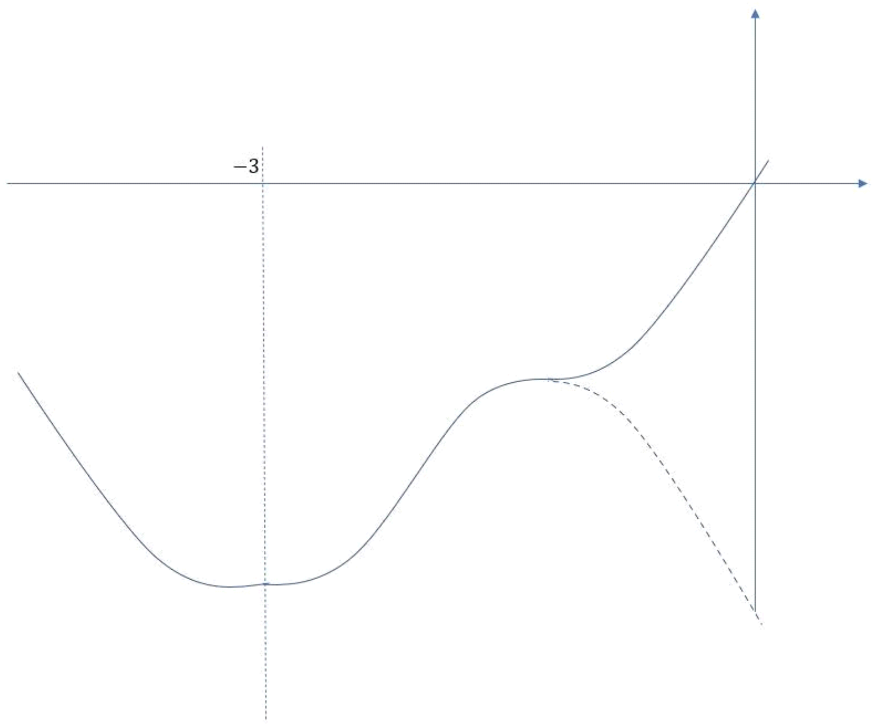
마찬가지로 (다) 조건부터 생각하면 최고차항의 계수는 음수입니다. 이제 절댓값이 붙은 함수의 의미를 해석해 봅시다.

$\int_0^x |f'(t)|dt$의 의미를 생각해 봅시다. $f(t)$가 증가하는 구간, $f'(t)>0$인 구간에서는 함수의 형태가 변하지 않습니다. 반대로 $f(t)$가 감소하는 구간, $f'(t)<0$인 구간에서는 함수의 형태가 뒤집히게 됩니다. 즉 $f(t)$가 감소하는 구간에서는 $f(t)$가 감소하는 양만큼 $\int_0^x |f'(t)|dt$가 증가하게 됩니다. 그래프의 모양은 이렇게 결정되고, $\int_0^x |f'(t)|dt$은 원점을 지나므로 그래프의 위치 역시 결정됩니다. 따라서 그래프의 형태는 아래와 같습니다.



이렇게 만들어진 그래프가 연속이려면 $g(x)$의 그래프는 아래와 같이 그려져야 합니다.

이렇게 만들어진 그래프가 연속이려면 $g(x)$의 그래프는 아래와 같이 그려져야 합니다.



$g(-3)=16, g(a)=-8$이므로 $f(0)=-16$이 되어야 합니다. 여기서 삼차함수의 비율관계를 생각하면 $a=\frac{2}{3}\times(-3)=-1$이 되고, 그림에서 $x\geq-1$일 때 $f(x), g(x)$가 $y=-8$에 대해 대칭이므로 $\int_{-1}^{4}|f(x)+g(x)|dx = 16\times5=80$이 됩니다.

이처럼 절댓값이 포함된 함수가 어떤 의미인지를 생각하여 문제를 해결하면, 문제를 더 쉽게 풀 수 있는 경우가 많습니다.

미적분

무한등비급수의 도형 활용

도형을 활용한 무한등비급수 문제를 쉽게 해결하는 순서는 다음과 같습니다 : 1. 첫째항을 구한다. 2. 구한 그 수는 헷갈리지 않게 표시해 둔다. 3. 닮음을 찾는다. 4. 닮음비를 이용해 넓이비를 구하고, 공비를 구한다. 5. 무한등비급수 공식에 대입한다. 특히 무한등비급수의 도형 활용 문제는 문제가 기므로 문제를 끝까지 읽을 필요 없이 핵심만 밑줄을 긋거나 찾고 풀면 시간을 절약을 할 수 있습니다.

예를 들어 이러한 문제가 있습니다.

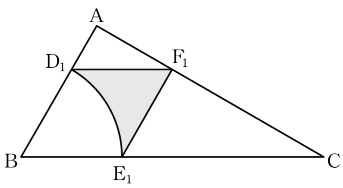
2019학년도 10월 모의고사

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 $\angle\mathrm{ABC}=60°$인 삼각형 ABC가 있다. 사각형 $\mathrm{D_1BE_1F_1}$이 마름모가 되도록 세 선분 AB, BC, CA 위에 각각 점 $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$을 잡고, 마름모 $\mathrm{D_1BE_1F_1}$의 내부와 중심이 B인 부채꼴 $\mathrm{BE_1D_1}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

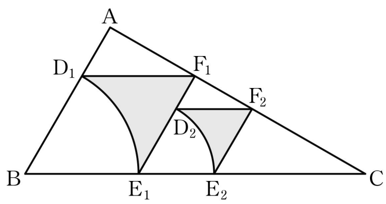
그림 R_1에서 사각형 $\mathrm{D_2E_1E_2F_2}$가 마름모가 되도록 세 선분 $\mathrm{F_1E_1}$, $\mathrm{E_1C}$, $\mathrm{CF_1}$ 위에 각각 점 $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{E_2}$, $\mathrm{F_2}$를 잡고, 마름모 $\mathrm{D_2E_1E_2F_2}$의 내부와 중심이 $\mathrm{E_1}$인 부채꼴 $\mathrm{E_1E_2D_2}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\dfrac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$ ② $\dfrac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$ ③ $\dfrac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$ ④ $\dfrac{2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$ ⑤ $\dfrac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$

위 문제의 풀이는 아래와 같다.

풀이

그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이를 a_n이라 하자.
그림 R_1에서 삼각형 ABC와 삼각형 F_1E_1C가 닮음이므로 $\overline{AB} : \overline{F_1E_1} = \overline{BC} : \overline{E_1C}$

마름모 $D_1BE_1F_1$의 한 변의 길이를 x라 하면 $2 : x = 4 : (4-x)$이므로 $x = \frac{4}{3}$

그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 마름모 $D_1BE_1F_1$의 넓이에서 부채꼴 BE_1D_1의 넓이를 뺀 값이므로

$$a_1 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \sin 60° - \pi \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{60°}{360°} = \frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}$$

그림 R_2에서 삼각형 ABC와 삼각형 F_1E_1C의 닮음비는 $1 : \frac{2}{3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} = \frac{4}{9} a_n$이 성립한다.

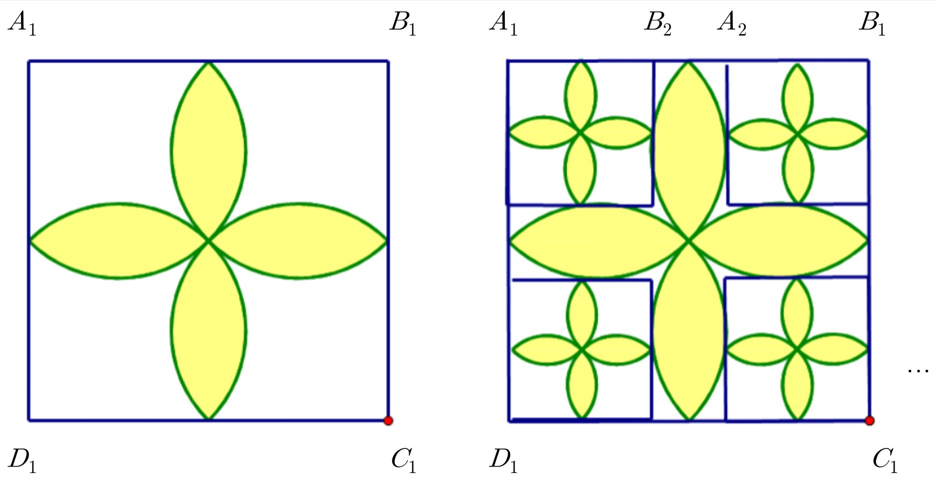
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}$이고, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$$

위와 같은 문제에서는 각 단계를 거칠 때마다 늘어나는 도형이 하나입니다. 하지만 문제 유형에 따라 단계를 거칠 때 여러 개의 도형이 추가될 수도 있습니다. 예를 들어서, 닮음인 도형이 n개씩 새로 생긴다고 가정해 봅시다. 이때 도형의 개수를 직접 구해서 도형의 넓이에 곱해 주어도 되겠지만, 수능에서 문제를 빨리 해결하기 위해서는 단순히 공비가 n배 되는 것으로 생각하면 됩니다.

(예를 들어, 위의 문제처럼 도형이 하나씩 추가되는 경우에는 공비가 $\frac{4}{9}$이지만 n개씩 늘어나는 경우 공비는 $\frac{4}{9}n$이 됩니다.)

응용 자작문제

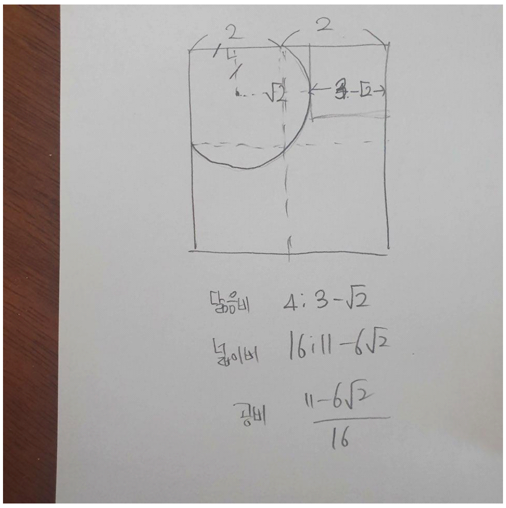


R_1 R_2

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$가 있다. A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 P_1, Q_1, R_1, S_1이라 하고, P_1R_1과 Q_1S_1의 교점 M_1을 잡자. 네 호 $\overset{\frown}{P_1M_1S_1}$, $\overset{\frown}{Q_1M_1P_1}$, $\overset{\frown}{R_1M_1Q_1}$, $\overset{\frown}{S_1M_1R_1}$이 만드는 도형의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. $A_1B_1C_1D_1$과 두 변을 공유하고, R_1에서 색칠된 부분과 외접하는 네 정사각형을 잡자. 네 정사각형 각각에 위와 같은 작업을 반복하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 마찬가지로 R_2에서 그린 네 정사각형 각각에 R_2를 그릴 때와 같은 작업을 반복하여 얻은 도형을 R_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?

풀이

A_1, P_1, M_1, S_1을 지나는 원을 그리고 반지름을 찾으면 이때 원의 반지름은 $\sqrt{2}$입니다. 그 후 부채꼴 모양을 찾은 후, 부채꼴 모양에서 삼각형을 빼면 색칠 되어있는 도형에서 한 날개의 반쪽이 나옵니다. 그 반쪽이 8개 생기므로 첫째항은 $8(\frac{1}{2}\pi-1)$입니다. 닮음비는 $4:3-\sqrt{2}$이고 넓이비는 $16:11-6\sqrt{2}$입니다. (아래 그림 참조)이때 한 단계를 거칠 때마다 도형이 4개씩 생기고 있으므로 넓이비인 $\frac{11-6\sqrt{2}}{16}$에 4배를 해준 후, 등비급수 공식에 대입하면 답은 $\frac{16(\pi-2)(6\sqrt{2}+7)}{23}$가 됩니다.



미적분

적분으로 표현된 함수의 미분

고등학교 수학 문제에서 종종 등장하는 토픽 중 하나가 적분으로 표현된 함수의 미분입니다. 이러한 문제가 어렵게 느껴지는 이유는, 바로 함수식에 여러 변수가 등장하면서 기존의 공식들을 그대로 적용할 수 없는 경우가 생기기 때문입니다. 예를 들어 아래와 같은 문제를 풀어봅시다.

예시

$f(x)=\int_0^x (x+t)dt$ 일 때, $f'(x)$를 구하시오.

이러한 문제를 풀 때, 가장 많이 하는 실수 중 하나가 바로 다음과 같은 풀이를 쓰는 것입니다.

(틀린)풀이

$f(x)=\int_0^x g(t)dt$ 일 때, $f'(x)=g(x)$이다. 위의 문제에서는 $g(t)=x+t$로 놓으면 되므로 $f'(x)=g(x)=2x$가 된다.

위 풀이가 잘못된 이유는 무엇일까요? 가장 많이 들어본 설명은, $g(t)=x+t$에서 x역시 변수이기 때문에 단순히 위와 같이 계산할 수 없다는 설명일 것입니다. 하지만, $\int_0^x g(t)dt$에서 적분 계산은 t에 대해 이루어지므로 x는 상수로 취급할 수 있다고 배웠는데, 그렇다면 어디서 문제가 생긴 것일까요? "$f(x)=\int_0^x g(t)dt$ 일 때, $f'(x)=g(x)$이다."라는 명제가 틀린 것일까요?

그렇지는 않습니다. 문제는 바로, 우리가 위에서 작성한 $g(t)$가 고정된 함수가 아니라는 점입니다. "$f(x)=\int_0^x g(t)dt$ 일 때, $f'(x)=g(x)$이다."가 성립하기 위해서는, 매우 당연하게도 $g(t)$라는 함수 자체가 변해서는 안됩니다. 그런데 $g(t)=x+t$로 정의하게 되면, x값에 따라서 $g(t)$라는 함수 자체가 변하게 되므로 위의 명제를 그대로 적용할 수 없습니다. 더 자세히 말하자면, $g(x,t)=x+t$라는 이변수 함수를 일변수 함수로 혼동하여 $g(t)$라는 고정된 함수가 존재한다고 본 것이 문제입니다.

따라서 새로운 함수를 도입하여 위의 문제를 해결하고자 한다면, 아래와 같은 표현을 사용해야 합니다.

풀이

$g(x,t)=x+t$로 두면 $f(x)=\int_0^x g(x,t)dt$이고 이때 $f'(x)$를 구하면 된다.

그런데 우리는 이변수 함수가 포함된 적분식을 쉽게 미분하는 법을 알지 못합니다. (최소한 지금까지의 고등학교 교육과정에는 등장하지 않았습니다.) 그렇다면 이러한 계산을 쉽게 하는 방법이 있을까요? 그것이 바로 여러곳에서 종종 언급되던 라이프니츠 적분 공식입니다. 공식의 형태는 다음과 같습니다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,t)dt = f(x,x)+\int_a^x \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt$$

다만 위의 공식을 수험생이 알 필요는 없고, 단지 이변수 함수의 경우 적분식을 미분하는 것을 일변수 함수의 경우처럼 단순히 생각해서는 안 된다는 것만 기억해두면 되겠습니다.

그렇다면 수험생의 입장에서는, 저러한 유형의 문제를 풀 때 적분식을 직접 계산하여서 함수를 구한 후 미분을 수행해야 합니다. 이때 유의해야 할 것은, 적분식 안에서 적분되는 변수와 그렇지 않은 변수를 구분하는 것입니다. 위에서 말했듯이 적분의 대상이 되는 변수 외에는 상수 취급을 하여 계산하여주면 됩니다.

풀이

$\int_0^x (x+t)dt$는 t에 대한 적분이므로 계산하면 $\int_0^x (x+t)dt=\frac{3}{2}x^2$이고,
이를 x에 대해 미분하면 $f'(x)=3x$가 된다.

비슷한 유형의 문제를 보더라도 이 칼럼에서 언급한 사실들을 기억하면서 문제를 해결한다면 실수 때문에 문제를 틀릴 일은 없으리라 믿습니다.