기·출·의 파·급·효·과

수학2 (상)

수학2 (상)

기출의 파급효과

orbi.kr

수학2 (상)

저자의 말

1. 수학Ⅱ 기출을 푸는 데 필수적인 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

1년 동안 열심히 공부한 학생이 현장에서 평가원 문제를 틀리는 이유는 개념이 부족해서가 아니라, 조건이 필연적으로 요구하는 태도와 도구가 없기 때문입니다. 따라서 각 Chapter를 교과서 목차를 따르지 않고 기출을 푸는데 필요한 태도와 도구를 바탕으로 작성했습니다.

2. 분권의 이유

'미적분도 아니고 수학Ⅱ 수준에서 분권이 필요할 정도의 분량이 나올 수 있나?' 하는 의문이 들 수도 있습니다. 분권에는 크게 두 가지 이유가 존재하는데,

(1) 필수적이지만 교과서에는 없는 Chapter의 존재

〈Chapter 3. 다양한 정리와 함수의 극대, 극소〉, 〈Chapter 4. 다항함수, 대칭성〉, 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉, 〈Chapter 10. 복합적 개념이 포함된 킬러 문항〉 다섯 개의 챕터는 교과서에 없지만 중요한 태도와 도구를 정리한 챕터입니다.

특히 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉는 저학년 과정에서 모두 배우는 내용이지만 방정식, 항등식, 부등식, 합성함수, 역함수의 대강의 '느낌'만 가진 채 실제 문제에서 '어떻게' 처리해야 하는지 모르는 학생이 많아 독립된 챕터를 구성했습니다. 따라서 실제 수학Ⅱ 교육과정에서 직접적으로 다루는 내용보다 훨씬 많은 내용을 다룹니다.

(2) 자세한 해설

기출 해설을 정말 자세히 썼습니다.

어떤 조건부터 적용해야 하는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 할 수밖에 없는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 하면 안 되는지,
여기서 왜 식으로 풀어야 하는지,
여기서 왜 그래프로 풀어야 하는지에 관한 내용을 다 담았습니다.

'딱딱하고', '불친절하게' 해설하면 분량은 많이 줄일 수 있겠으나, 그 경우 '기출의 파급효과'를 선택하는 의미가 퇴색되죠. 진정한 기출 분석은 위와 같은 질문에 모두 답할 수 있게끔 공부하는 것이기에 최대한 해설을 자세하게 썼습니다.

따라서 위의 두 가지 이유로 불가피하게 분권하게 되었습니다. 추천하는 것은 상하권을 순차적으로 학습하는 것이지만 본인이 어느 한 권에 해당하는 내용에는 자신이 있으면 다른 한 권만 공부하셔도 됩니다.

3. 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 준킬러 이상급의 기출을 칼럼 예시로 들었습니다.

칼럼 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

4. 선별 문항

선별한 문항은 모두 중요합니다. 그중에서도 특히 중요한 문항은 예제로 넣었고, 나머지 문항은 유제로 넣었습니다. 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 각 Chapter 별 태도와 도구를 기준으로 분리되었습니다.

최근 평가원 문항뿐만 아니라 옛 평가원 문항, 교육청, 사관학교, 그리고 일부 경찰대 문항도 중요한 기출들입니다. 하지만 교육청, 사관학교, 경찰대 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다. 따라서 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교, 경찰대 문항을 필요한 만큼만 선별했습니다. 그러나

(1) 단순 유형의 반복에 해당하는 문제들은 그 유형을 대표하는 몇 문제만 넣었습니다.

(2) 지나치게 쉬운 개념 확인 수준의 2, 3점 문항은 거의 넣지 않았습니다. 개념 공부만 제대로 했다면 별다른 태도와 도구가 전혀 필요하지 않은 문항들이므로 이 책에서 불필요하게 학습할 필요는 없습니다.

(3) 교육청, 사관, 경찰대 문항은 필요한 만큼만 선별했습니다. 따라서 이 책에서 수록한 문항만 완벽하게 풀 수 있다면, 적어도 수능을 대비하기 위해서는 다른 '평가원 외 기출 문제'를 푸실 필요가 없습니다. 즉, 책에서 배우는 내용만 꼭꼭 씹어 소화하시면 됩니다.

물론 올해 출제된 교육청, 평가원, 사관 문항은 직접 풀고 난 다음 책에서 배운 태도와 도구를 바탕으로 분석해야 합니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

CHAPTER

04 다항함수, 대칭성

이차함수

1. 이차방정식을 다루는 도구

먼저 이차방정식의 근을 다룰 때 사용할 수 있는 4가지 도구를 소개하겠다. 당연히 알고 있는 개념이겠지만 이번 기회에 좀 더 체계적으로 내용을 이해, 숙지하여 **실전에서 자연스레 활용할 수 있는 것**을 목표로 하자.

(1) 판별식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$에서 판별식 $D=b^2-4ac$, $\dfrac{D}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac$

판별식은 **이차방정식의 실근의 개수**를 구해야 할 때,
이차함수의 그래프와 x축의 관계를 알고 싶을 때 쓸 수 있는 도구다.

$D>0$이면 이차방정식은 서로 다른 두 개의 실근을, $D=0$이면 중근을, $D<0$이면 허근을 갖는다.

※ **이차방정식의 실근의 개수를 구해야 하는 모든 경우에 반드시 판별식을 사용해야 하는 것은 아니다.** 예를 들어, **$(x-a)^2=b$의 실근의 개수**를 구하기 위해 이를 전개한 다음 $x^2-2ax+a^2-b=0$의 판별식을 볼 필요가 있을까?
아니다. **모든 실수 x에 대해 $(x-a)^2\geq 0$이므로 b의 부호**를 통해 실근의 개수를 알 수 있다. $b<0$이면 허근을, $b=0$이면 중근을, $b>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다. 가장 강력한 도구는 관찰과 생각이다.

(2) 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 두 근을 α, β라 할 때,
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

※ α, β**는 중근일 수도 있고, 허근일 수도 있다.**

e.g. $x^2-4x+4=0$은 중근 $x=2$를 가지고 $2+2=4$, $2\times 2=4$이다.
e.g. $x^2+4x+5=0$은 허근 $-2\pm i$를 가지고,
$(-2+i)+(-2-i)=-4$, $(-2+i)\times(-2-i)=4-(-1)=5$

※ 근과 계수의 관계 맹목적 적용 주의

근과 계수의 관계는 2가지 정보를 바로 얻을 수 있으므로 굉장히 매력적인 도구이다. **그러나 이유 없이, 목적 없이 푸는 습관은 수능 수학이 추구하는 방향과 정반대이며 근과 계수의 관계도 맹목적으로 사용해선 안 된다.**

예제(1) 20학년도 6월 평가원 13번

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2 - nx + 4(n-4) = 0$$

이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha < \beta)$를 갖고, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은? [3점]

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 14 ⑤ 17

1. 쉬운 3점짜리 문항이다. 그런데 당시 현장에서 적잖은 학생들이 이 문항에서 애를 썼는데 그 이유는 바로 근과 계수의 관계에 있다.

근과 계수의 관계를 적용하면
$\alpha+\beta=n$
$\alpha\beta=4(n-4)$

$1,\ \alpha,\ \beta$**가 순서대로 등차수열을 이루므로**
$2\alpha=1+\beta$

2. 근과 계수의 관계, 등차수열을 이용하여 3가지 관계식을 얻었다. 미지수는 $\alpha,\ \beta,\ n$ 3개이다. **미지수의 개수와 정보의 개수가 같으므로 연립방정식을 이용해** $\alpha,\ \beta,\ n$**의 값을 모두 얻을 수 있다.**

그러나 연립방정식을 시도해보면 원래 출제 의도보다 풀이가 굉장히 길어진다. 애초에 근과 계수의 관계는 출제 의도가 아니었다.

이차방정식 $x^2-nx+4(n-4)=0$을 보자마자 인수분해 반응이 바로 와야 한다. 인수분해 반응이 오지 않았다면 아직 충분한 경험치가 누적되지 않았다는 것이다.

3. 인수분해를 하면 $x^2-nx+4(n-4)=(x-4)(x-n+4)=0$이므로 서로 다른 두 실근은 4, $n-4$이 된다.

4**와** $n-4$ **중 어느 것이 더 큰지 알 수 없으므로 CASE를 분류하자.**

(i) $4<n-4$
이 경우 $\alpha=4,\ \beta=n-4$이므로 $1,4,n-4$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 등차중항을 이용하면 $\frac{1+n-4}{2}=4,\ n-3=8,\ n=11$ (O)

(ii) $n-4<4$
이 경우 $\alpha=n-4,\ \beta=4$이므로 $1,n-4,4$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 등차중항을 이용하면 $\frac{1+4}{2}=n-4,\ 5=2n-8,\ n=\frac{13}{2}$ (X)

n은 자연수이므로 $n=11$이다.

답은 ③!!

comment

이처럼 근의 '관계'를 아는 것보다 근의 '값 자체'를 아는 게 훨씬 좋으므로 **이차방정식을 볼 때는 근과 계수와의 관계보다는 인수분해를 먼저 떠올려야 한다.**

예제(2) 20학년도 9월 평가원 26번

n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$의 값을 구하시오. [4점]

1. 마찬가지로 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$을 보자마자 인수분해 반응이 바로 와줘야 한다.

$$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$$
$$\Leftrightarrow\ (x-n)(x-n+1)=0$$

따라서 $\alpha_n=n$, $\beta_n=n-1$

(α_n, β_n의 대소관계를 알 수는 없다. 아무렇게나 설정해도 답은 똑같이 나온다.)

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}=\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

분모에 근호($\sqrt{\ }$)가 있으므로 유리화를 해주자.

$$\sum_{n=1}^{81}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}=\sum_{n=1}^{81}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$
$$=0+\sqrt{1}-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\cdots-\sqrt{80}+\sqrt{81}=9$$

답은 9!!

(3) (정수단위의) 인수분해

‘정수단위’라고 표현한 이유는 근의 공식과 구별 짓기 위함이다.

$x^2-4x+3=0$ 과 $x^2-5x+3=0$을 비교해 보자.

① $x^2-4x+3=0$

이 경우 정수단위의 인수분해가 바로 가능하다.
$(x-3)(x-1)=0$

물론 이것도 근의 공식을 통해 근을 구할 수도 있지만, 이런 방정식을 보고 근의 공식을 적용하는 사람은 없을 것이다. 혹시나 그렇게 해왔다면... 이차방정식을 보자마자 인수분해하는 법을 배우기를 바란다.

② $x^2-5x+3=0$

이 경우 정수단위의 인수분해는 불가능하다. 그러나 근의 공식을 통해 억지로 인수분해할 수는 있다.

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$이므로
$\left(x-\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)=0$

이 책에서 이차방정식의 인수분해는 ① 처럼 정수단위로 곧바로 인수분해가 되는 경우만을 칭하도록 하겠다.

※ 단, 여기서 말하는 정수단위는 방정식의 근이 ‘정수’여야 한다는 것이 아니라, 각각의 인수가 포함한 항들의 계수가 정수여야 한다는 말이다. 예를 들어, 이차방정식 $3x^2-4x+1=0$을 인수분해하면 $(3x-1)(x-1)=0$이 되어 방정식의 근은 $x=\dfrac{1}{3}$, $x=1$이지만 $(3x-1)(x-1)=0$도 정수단위의 인수분해로 취급한다.

주의 : 방정식이 미지수를 포함하더라도 인수분해가 항상 불가능한 것은 아니다. 앞선 예제(1), (2)에서도 $x^2-nx+4(n-4)=0$, $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$은 모두 인수분해가 가능했다.

태도 : 제시된 식이 미지수를 포함하더라도 인수분해를 곧바로 포기하지는 말자.

(4) 근의 공식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 또는 $x=\dfrac{-b'+\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ (단, $b'=\dfrac{b}{2}$)

※ b가 짝수인 경우 $x=\dfrac{-b'+\sqrt{b'^2-ac}}{a}$을 이용하는 것이 효율적이다.

수능 수학에서 근의 공식은 잘 쓰이지 않는다.
근의 공식은 인수분해와 마찬가지로 방정식의 근을 직접 구하기 위해 쓰는 도구인데,
수능 수학은 복잡한 계산을 지양하기 때문에 '정수단위로 인수분해가 가능한 형태로' 방정식을 제시하는 경우가 많다.

따라서 근의 공식도 거의 마지막에 고려해야 하되 만약 **정수단위로 인수분해가 되지 않음에도 불구하고 '근의 값 자체'를 구해야 할 필요성이 있다면 근의 공식을 적용해라.**

(5) 도구의 우선순위

지금까지 살펴본 이차방정식을 다루는 4가지 도구에도 우선순위가 존재한다.
판별식은 써야 할 상황이 분명하므로 독립적으로 보고, 나머지 3개의 도구를 놓고 봤을 때

인수분해 〉 근과 계수의 관계 〉= 근의 공식
순으로 중요하다.

◆ 2. 조건 해석을 통한 이차함수의 그래프 그리기

제시되는 표현을 잘 보자. 똑같은 그래프를 나타내는 데에도 여러 표현을 사용할 수 있다. 단, 이런 표현들을 외우려고 하지 말자. '공부'해서 주어진 문장을 그 자리에서 바로 따질 있는 실력을 갖춰야 한다.

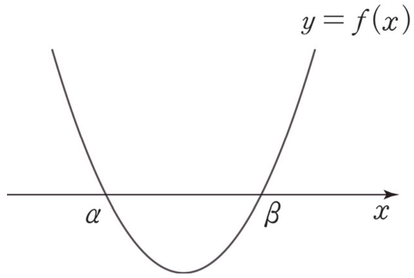
$f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이고 α, β는 $\alpha < \beta$인 실수라 하자.

① $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

$f(x) = 0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가진다.

$f(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$를 인수로 가진다.

$f(x) = 0$의 판별식 $D > 0$

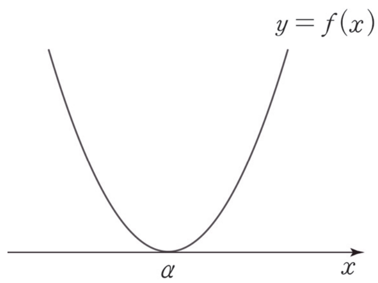


② $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$

$f(x) = 0$이 α를 중근으로 가진다.

$f(x)$가 $(x-\alpha)^2$을 인수로 가진다.

$f(x) = 0$의 판별식 $D = 0$



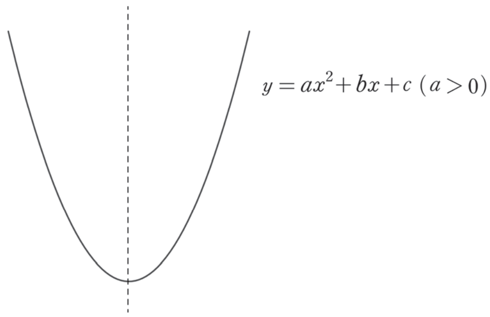
이처럼 다항함수 $f(x)$의 경우, 도함수인 $f'(x)$를 관찰하지 않고 $f(x)$의 식만 가지고도 $f(x)$의 그래프 개형을 알 수 있는 경우가 있다.

3. 이차함수의 그래프 특징

(1) 대칭성

이차함수 그래프에서 가장 중요한 특징이다. **이차함수가 등장하면 반드시 대칭성을 떠올리자.**

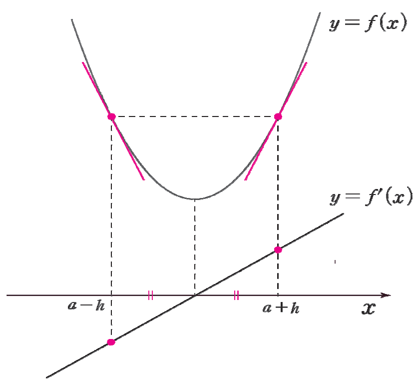
① 이차함수의 꼭짓점의 x좌표를 α라 할 때, 이차함수의 그래프는 직선 $x=\alpha$에 대하여 대칭이다.



② 이차함수 $f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 a일 때, $f'(a-h)=-f'(a+h)$이다.

도함수인 일차함수에서 x절편을 기준으로 대칭인 두 점에서의 함숫값은 부호가 다르고 절댓값이 같다.

$\Leftrightarrow$ 원함수인 이차함수에서 대칭축을 기준으로 대칭인 두 점에서의 미분계수는 부호가 다르고 절댓값이 같다.



(2) 이차함수의 그래프 개형은 최고차항의 계수에만 영향받는다.

서로 다른 두 이차함수 $y=ax^2+bx+c$와 $y=ax^2+dx+e$의 그래프 개형이 $b,\ c,\ d,\ e$의 값과 상관없이 동일하다는 것을 보여주면 증명할 수 있다. (단, $a\neq 0$이다.)

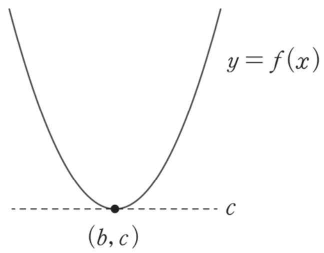
두 함수식을 완전제곱식 꼴로 변형하자. $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c,\ y=a\left(x+\dfrac{d}{2a}\right)^2+e$

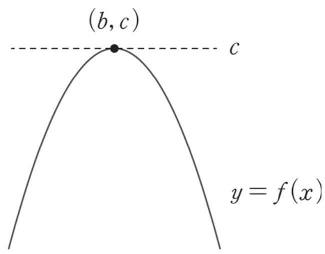
이차함수 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c$를 x축 방향으로 $\dfrac{b-d}{2a}$만큼 평행이동하고, y축 방향으로 $e-c$만큼 평행이동하면, $y-e+c=a\left(x-\dfrac{b-d}{2a}+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c$이므로 $y=a\left(x+\dfrac{d}{2a}\right)^2+e$이다.

즉, 최고차항의 계수만 같다면 평행이동 통해 언제나 같은 함수로 만들어줄 수 있으므로 두 함수의 그래프 개형은 서로 같다. 따라서 이차함수의 그래프 개형은 최고차항의 계수에만 영향받는다.

(3) 최대·최소

대칭성 다음으로 중요한 이차함수의 그래프 특징이다. $f(x)=a(x-b)^2+c\ (a\neq 0)$일 때,
$a>0$이면 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 c를 갖고, $a<0$이면 $f(x)$는 $x=b$에서 최댓값 c를 갖는다.

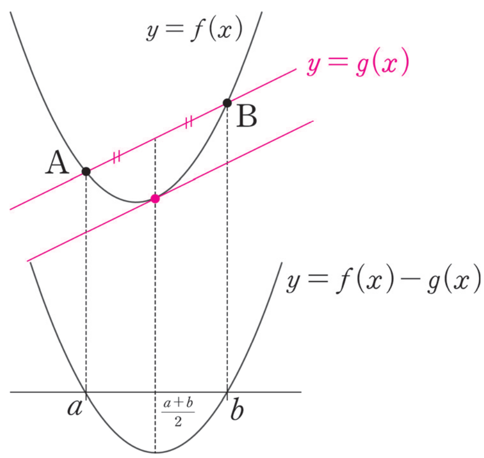




(4) 대칭성 확장 : 이차함수와 일차함수

① 이차함수 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$와 $\mathrm{B}(b, f(b))$를 잇는 직선의 기울기와 동일한 미분계수를 갖는 지점의 x좌표 : $\dfrac{a+b}{2}$

② 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$와 $\mathrm{B}(b, f(b))$를 지나가는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때,
이차함수 $f(x)-g(x)$의 꼭짓점의 x좌표 : $\dfrac{a+b}{2}$



②, ①의 순으로 이유를 살펴보자.

② 위의 그림에서 이차함수 $f(x)$의 최고차항 계수가 1이라고 할 때, $f(x)$, $g(x)$의 차이함수를 작성하면 다음과 같다. $f(x)-g(x)=(x-a)(x-b)$
$y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점 $(a, 0)$, $(b, 0)$에서 만나므로 $f(x)-g(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\dfrac{a+b}{2}$가 된다.

① $f(x)-g(x)=(x-a)(x-b)$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)-g'(x)=2\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$
$x=\dfrac{a+b}{2}$를 대입하면 $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=g'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

$g'(x)$ = (두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$와 $\mathrm{B}(b, f(b))$를 잇는 직선의 기울기)
이므로 $g'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$는 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$와 $\mathrm{B}(b, f(b))$를 잇는 직선의 기울기와 동일하다.
따라서 이차함수 $f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$와 $\mathrm{B}(b, f(b))$를 잇는 직선의 기울기와 동일한 미분계수를 갖는 지점의 x좌표는 $\dfrac{a+b}{2}$가 된다.

예제(3) 06학년도 9월 평가원 가형 7번

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

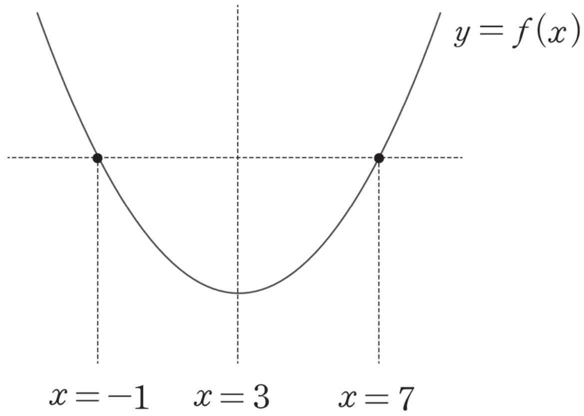
<보 기>

ㄱ. $y=f(x)$에서 x의 값이 -1에서 7까지 변할 때의 평균변화율은 0이다.

ㄴ. 두 실수 a, b에 대하여 $a+b=6$이면 $f'(a)+f'(b)=0$이다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{15} f'(k-3)=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



1. 식으로 따져도 되지만, 이차함수의 대칭성을 생각하면 옳은 보기임을 바로 알 수 있다. (O)

2. $a+b=6$이므로 $a,\ b$는 서로 $x=3$에 대해 대칭인 관계에 놓여있다($\Leftrightarrow$ $a,\ b$의 평균은 3이다).
$\therefore\ f'(a)+f'(b)=0$이다. (O)

3. ㄷ을 풀 때는 태도 측면에서 두 가지 사항을 고려해야 한다.

① **15개의 미분계수 값을 다 더하는 것이 출제 의도일 리가 절대 없다. (생각 없이 풀어서 맞혔다면 틀린 것과 다름없다.)** 반드시 이차함수의 대칭성을 이용해서 계산을 줄여야 한다.

② **ㄱㄴㄷ 문항에서 선지 (ㄱ), (ㄴ)은 ㄷ의 길잡이다.** 여기서도 선지 (ㄷ)을 해결할 때 선지 (ㄴ)을 활용하는 것이 출제의도이다.

$$\begin{aligned}
&f'(-2)+f'(-1)+\cdots+f'(11)+f'(12)\\
&=f'(3)\\
&+f'(2)+f'(4)\\
&+f'(1)+f'(5)\\
&\qquad\quad\vdots\\
&+f'(-2)+f'(8)\\
&+f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)\\
&=f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)\neq 0
\end{aligned}$$

따라서 ㄷ은 틀렸다.

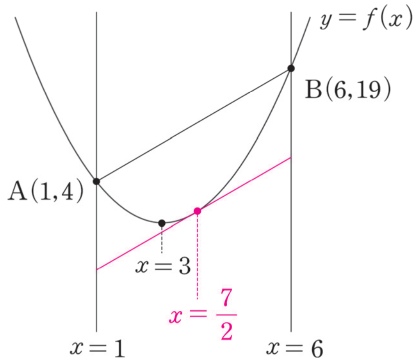
옳은 선지는 ㄱ, ㄴ이므로 **답은 ③!!**

예제(4) 19학년도 경찰대 7번

이차함수 $f(x)=x^2-4x+7$의 그래프 위에 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 19)$가 있다. 직선 AB와 평행하고 포물선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 두 직선 $x=1$, $x=6$과 만나는 점을 각각 D, C라 할 때, 평행사변형 ABCD의 넓이는? [4점]

① 30 ② $\frac{125}{4}$ ③ $\frac{65}{2}$ ④ $\frac{135}{4}$ ⑤ 35

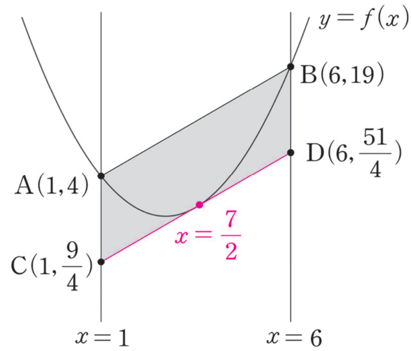
1. **상황 파악을 위해 그래프를 그리자.**



본문에서 배운 **이차함수 대칭성 확장**을 고려하면 직선 AB와 평행한 직선이 곡선 $f(x)$에 접하는 점의 x좌표는 $\frac{1+6}{2}=\frac{7}{2}$이다. $f\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{21}{4}$이므로 접선은 점 $\left(\frac{7}{2},\ \frac{21}{4}\right)$을 지나고, 접선의 기울기는 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 19)$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로 접선의 방정식은 다음과 같다.

$y=\frac{19-4}{6-1}\left(x-\frac{7}{2}\right)+\frac{21}{4}=3x-\frac{21}{4}$

2. 접선이 두 직선 $x=1,\ x=6$과 만나는 점의 좌표는 $\mathrm{C}\left(1,\ -\frac{9}{4}\right)$, $\mathrm{D}\left(6,\ \frac{51}{4}\right)$



평행사변형 ABCD에서 밑변을 선분 AC로 보면 높이는 두 직선 $x=1,\ x=6$ 사이의 거리가 된다. 따라서 평행사변형의 넓이는 $\left\{4-\left(-\frac{9}{4}\right)\right\}\times 5=\frac{125}{4}$이다.

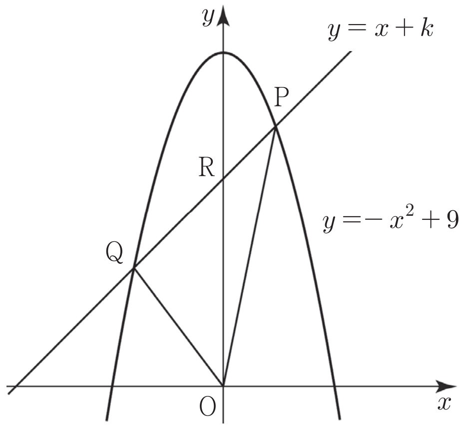
답은 ②!!

※ 답을 구하기 위해서 두 점 C, D 중 한 점의 좌표만 구해도 된다.

한편, 두 점 C, D의 좌표를 구하기 귀찮다면 다음과 같은 방법도 있다. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 19)$의 중점 $\left(\frac{7}{2},\ \frac{23}{2}\right)$과 직선과 이차곡선의 접점 $\left(\frac{7}{2},\ \frac{21}{4}\right)$ 사이의 거리가 선분 AC의 길이와 같으므로 평행사변형의 넓이는 $\left(\frac{23}{2}-\frac{21}{4}\right)\times 5=\frac{25}{4}\times 5=\frac{125}{4}$이다.

예제(5) 17학년도 사관 20번

그림과 같이 직선 $y=x+k$ $(3<k<9)$가 곡선 $y=-x^2+9$와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, y축과 만나는 점을 R라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이고, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.) [4점]



<보 기>

ㄱ. 선분 PQ의 중점의 x좌표는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

ㄴ. $k=7$일 때, 삼각형 ORQ의 넓이는 삼각형 OPR의 넓이의 2배이다.

ㄷ. 삼각형 OPQ의 넓이는 $k=6$일 때 최대이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. **이차함수 대칭성 확장**을 적용하자. $f(x)=-x^2+9$라 할 때, 선분 PQ의 중점의 x좌표는 함수 $f(x)$에서 선분 PQ의 기울기와 동일한 미분계수를 갖는 x좌표이다. $f'(x)=-2x$이므로 방정식 $-2x=1$을 풀어주면 $x=-\frac{1}{2}$이다. (O)

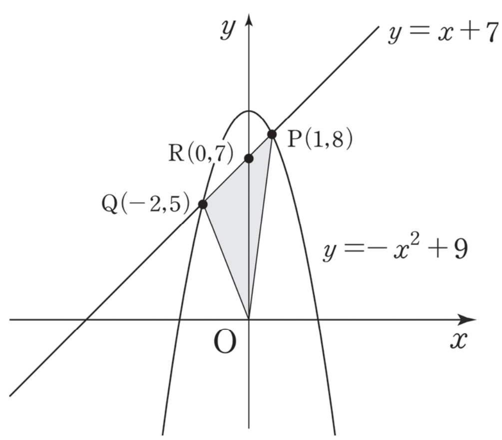
※ 근과 계수의 관계를 이용하는 방법

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 할 때, 이차방정식 $-x^2+9=x+k$의 서로 다른 두 실근이 p, q이다. 근과 계수의 관계에 의해 $p+q=-1$이므로 선분 PQ의 중점의 x좌표는 $\frac{p+q}{2}=-\frac{1}{2}$이다.

2. (ㄴ)에서 묻고 있는 것은 두 삼각형의 구체적인 넓이가 아닌 두 삼각형의 넓이의 '비'이다. **삼각형 ORQ와 OPR은 서로 밑변 $\overline{\mathrm{OR}}$을 공유하고 있으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 높이의 비와 같다. 두 삼각형의 높이만 구하자.**

(삼각형 ORQ의 높이) : | 점 Q의 x좌표 | , (삼각형 OPR의 높이) : 점 P의 x좌표

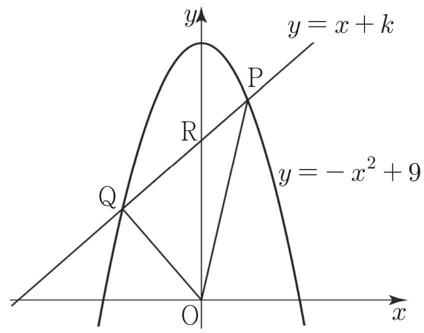
두 점 Q, P의 x좌표는 방정식 $x+7=-x^2+9$의 두 실근이다. $x+7=-x^2+9$,
$x^2+x-2=0$
$\therefore$ 점 Q의 x좌표는 -2이고, 점 P의 x좌표는 1이다. ($\because$ 점 P의 x좌표 $>$ 점 Q의 x좌표)



따라서 (삼각형 OPR의 높이)$\times 2$=(삼각형 ORQ의 높이) 이므로
(삼각형 OPR의 넓이)$\times 2$=(삼각형 ORQ의 넓이)이다. (O)

※ 두 삼각형의 넓이를 구할 필요가 전혀 없었다. 보기를 생각하며 읽지 않고, 그래프를 관찰하지 않았다면 삼각형의 넓이를 구했을 확률이 높다. 항상 손이 가기 전에 눈으로 관찰하는 습관을 들이자.

3. 선지 (ㄴ)에서는 $k=7$이라는 구체적인 값을 준 반면 (ㄷ)은 k값을 특정하지 않았다. (ㄴ)을 통해 구체적인 사례를 학습했다면 일반적인 사례도 충분히 풀 수 있어야 한다는 출제자의 의도다.



삼각형 OPQ의 넓이를 나타내는 식을 작성하여 최댓값을 갖는 k값을 따지자. 이때, k의 범위는 $3<k<9$임에 주의해야 한다.

(삼각형 OPQ의 넓이)=(삼각형 OPR의 넓이)+(삼각형 ORQ의 넓이)

두 삼각형 OPR, ORQ의 밑변 길이는 모두 점 R의 y좌표로 k이다. 두 삼각형의 높이를 구하기 위해 곡선 $y=-x^2+9$와 직선 $y=x+k$의 교점의 x좌표를 구하자.

$$-x^2+9=x+k,\ x^2+x+k-9=0 \qquad \therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{37-4k}}{2}$$

이 중 더 큰 값인 $\frac{-1+\sqrt{37-4k}}{2}$가 (삼각형 OPR의 높이)가 되고,

더 작은 값에 절댓값을 씌운 $\frac{1+\sqrt{37-4k}}{2}$가 (삼각형 ORQ의 높이)가 된다.

(삼각형 OPR의 넓이)$=k\times\frac{-1+\sqrt{37-4k}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{-k+k\sqrt{37-4k}}{4}$

(삼각형 ORQ의 넓이)$=k\times\frac{1+\sqrt{37-4k}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{k+k\sqrt{37-4k}}{4}$

$\therefore$ (삼각형 OPQ의 넓이)$=\frac{-k+k\sqrt{37-4k}+k+k\sqrt{37-4k}}{4}=\frac{k\sqrt{37-4k}}{2}$

$\frac{k\sqrt{37-4k}}{2}$이 최댓값을 갖는 k의 값을 구하자. 루트 바깥에 있는 k는 상당히 거슬리므로 루트 안으로 집어넣자. $\frac{k\sqrt{37-4k}}{2}=\frac{\sqrt{-4k^3+37k^2}}{2}$

$-4k^3+37k^2=h(k)$라 할 때, $3<k<9$에서 삼차함수 $h(k)$가 최댓값을 가지는 순간이 곧 $\frac{\sqrt{-4k^3+37k^2}}{2}$이 최댓값을 가지는 순간이다. $h(k)=-4k^3+37k^2=-4k^2\left(k-\frac{37}{4}\right)$이므로 삼차함수 비율에 따라 $h(k)$는 $k=0$에서 극솟값, $k=\frac{37}{6}$에서 극댓값을 가진다.

※ 삼차함수 비율은 이번 챕터의 ⟨삼차함수 파트⟩에서 배울 것이다. 아직 삼차함수의 비율을 모르는 학생은 $h(k)$를 미분하여 극댓값과 극솟값을 갖는 k값을 구하면 된다.

$3<k<9$이므로 해당 정의역에서 $h(k)$는 $k=\dfrac{37}{6}$에서 최댓값을 가진다. (X)

옳은 선지는 ㄱ, ㄴ이므로 **답은 ③!!**

comment

(ㄷ)은 현장에서 충분히 혼란을 줄 만한 선지이다.
‘우리가 언제 무리함수의 최대·최소를 배웠지?’라는 생각이 드는 것도 당연하다.

하지만 뚜껑을 열어보니 선지 (ㄷ)은 결국 삼차함수의 최대·최소를 묻는 문항이었다. 사관학교 출제 문항이지만 이처럼 비주얼로 학생들에게 겁을 주는 것은 평가원이 가장 잘하는 영역이다.

따라서 기출을 공부하면서 ‘비주얼에 겁먹지 않는’ 연습만 하더라도 많은 것을 얻어갈 수 있다.

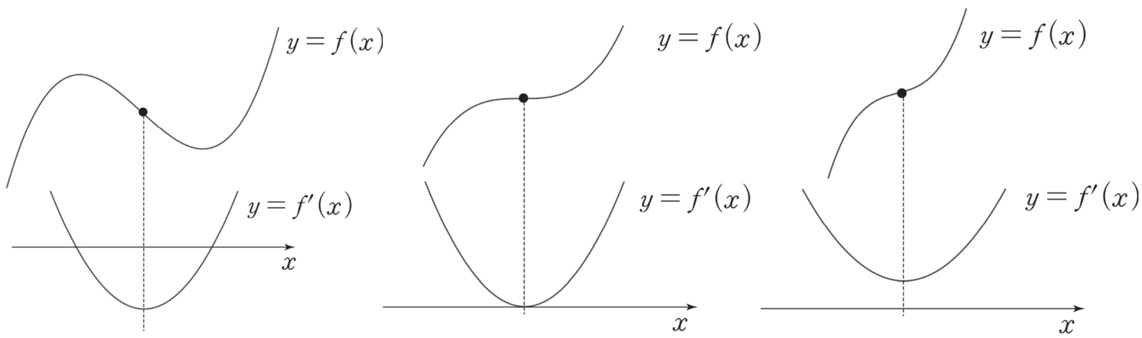
삼차함수

1. 변곡점

변곡점이라는 개념은 수학II 교육과정에서는 다루지 않는다. 변곡점을 다루기 위해서는 미분을 두 번 하는 이계도함수를 언급해야 하는데 이계도함수는 수학II 교육과정에 포함되지 않기 때문이다.

물론 여기서도 이계도함수 내용을 언급하면서까지 변곡점을 가르치지는 않을 것이다. 본 교재에서 변곡점은 **'삼차함수의 점대칭 점'의 의미로만 받아들이자.** 이때, 삼차함수의 점대칭 점(변곡점)의 x좌표는 삼차함수의 도함수인 이차함수의 꼭짓점의 x좌표와 같다. 여러 수II 강의에서 언급하는 변곡점도 이런 의미인 경우가 많다.

매번 삼차함수의 점대칭 점으로 표현하기 번거로우므로 변곡점이라는 표현을 도입한다는 느낌으로 받아들이자.

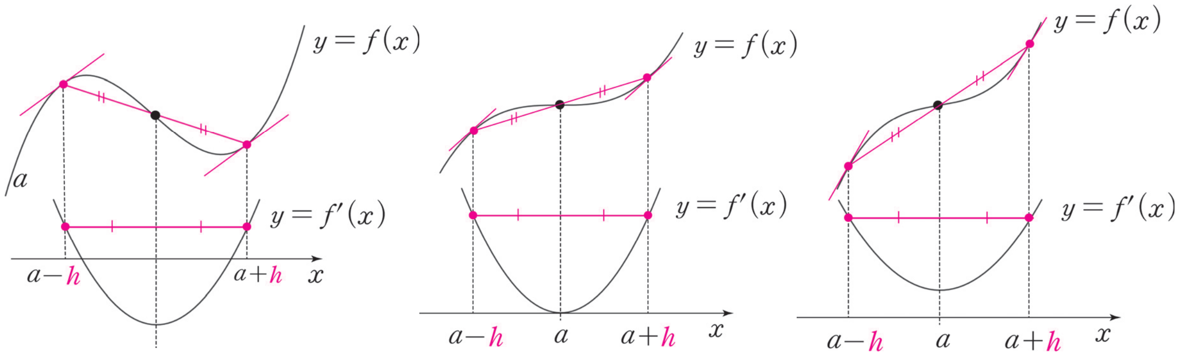


※ **변곡점의 x좌표는 $f''(x)=0$을 만족하는 x이다.** 삼차함수 $f(x)$의 변곡점의 x좌표는 이차함수 $f'(x)$의 꼭짓점의 x좌표와 같다. 이차함수의 꼭짓점의 x좌표는 미분계수가 0이 되는 지점이므로 변곡점의 x좌표는 $f'(x)$의 미분계수가 0이 되는 x, 즉 $f''(x)=0$을 만족하는 x이다.

$f''(x)$는 미적분에서 배우는 이계도함수이므로 삼차함수의 변곡점의 x좌표를 구할 때를 제외하고는 거의 쓸 일이 없다.

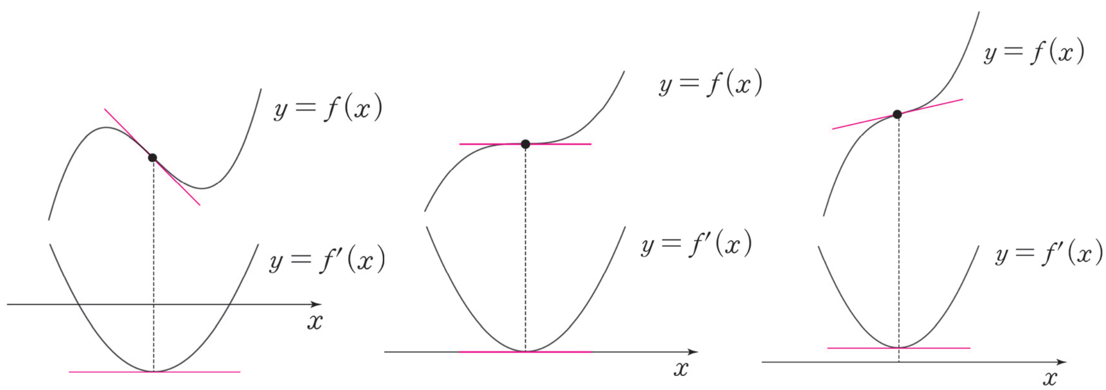
(1) 변곡점을 기준으로 대칭인 두 점에서의 미분계수는 서로 같다.

아래의 그림에서 알 수 있듯이 도함수인 이차함수는 대칭축을 기준으로 대칭이다.
따라서 도함수인 이차함수에서 대칭축을 기준으로 대칭인 두 점에서 함숫값은 같다.
= 원함수인 삼차함수에서 변곡점을 기준으로 대칭인 두 점에서 미분계수는 같다.



만약 $y=f(x)$ 위에서 그은 서로 다른 두 접선의 기울기가 같다면, 두 접점은 변곡점에 대하여 대칭이다.

(2) 삼차함수의 미분계수는 변곡점에서 최솟값 혹은 최댓값을 갖는다.



(그림에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이다.)

삼차함수의 변곡점의 x좌표는 도함수인 이차함수의 꼭짓점의 x좌표와 일치한다.
이때, **이차함수의 함숫값은 꼭짓점에서 최소 혹은 최대**가 된다.
도함수의 함숫값은 원함수에서 미분계수를 의미하므로 변곡점에서 미분계수는 최소 혹은 최대가 된다.

예제(6) 18학년도 9월 평가원 20번

삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제에서 새롭게 정의한 함수인 $g(t)$가 등장했으므로 빠르게 $g(t)$라는 함수를 이해해야 한다.

※ 문제에서 새롭게 정의한 함수를 다루는 태도와 관련해서는 〈Chapter 5. 도함수의 활용〉 함수 추론 파트에서 상세히 설명한다.

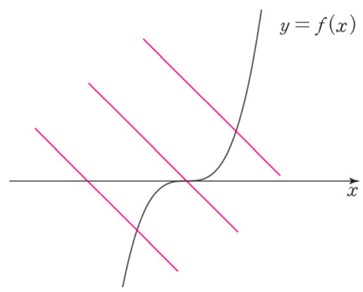
새롭게 정의한 함수에서 가장 중요한 것은 정의역과 치역의 실질적 의미이다.

정의역(t) : t에 따라 기울기가 -1인 일차함수가 위아래로 움직인다.

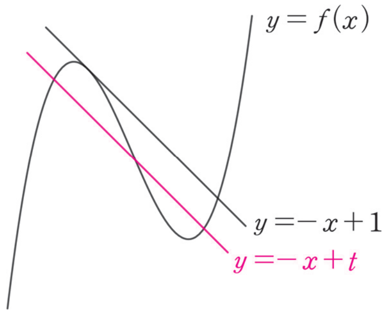
치역($g(t)$) : 기울기가 -1인 직선과 삼차함수 $f(x)$의 교점의 개수

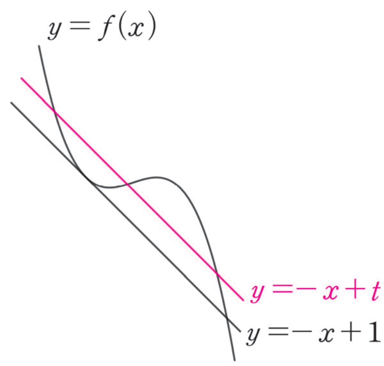
포인트는 치역이 '교점의 개수'라는 점이다. $g(t)$라는 함수를 제대로 이해했으니 보기로 들어가자.

1. $y=x^3$의 그래프를 그려 본다면 쉽게 파악할 수 있는 보기이다. 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=1$이므로 함수 $g(t)$는 상수함수이다. (O)



2. $g(1)=2$이므로, 직선 $y=-x+1$와 곡선 $f(x)$의 교점이 2개다. 즉, 한 점에서 접하고 한 점에서 만난다. 조건을 만족시키도록 곡선 $f(x)$와 직선 $y=-x+1$의 위치 관계를 그래프로 표현하면 $f(x)$의 최고차항의 계수에 따라 다음과 같이 두 가지 경우가 가능하다.





당연히 $g(t)=3$인 t가 존재한다. (O)

3. 변곡점을 다루는 중요한 보기이다. 해설을 보면서 ㄷ 보기와 변곡점의 연관성을 잘 공부하길 바란다.

함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

이 진술은 전형적인 ㄱㄴㄷ 합답형 문항의 '단정적 진술'이면서, 조건문($p \to q$)에 해당한다.
태도 : 단정적 진술의 참, 거짓을 판별하기 위해서는 반례를 찾으려고 하자.

ㄷ과 같은 '$p \to q$ 조건문'의 경우에는 '$p \to \sim q$에 해당하는 케이스'가 반례가 되겠다. **함수 $g(t)$가 상수함수일 때, 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지는 케이스를 찾으면 되는데 그렇게 쉽지는 않다.** 함수 $g(t)$가 상수함수인 모든 경우를 따지기는 어렵기 때문이다.

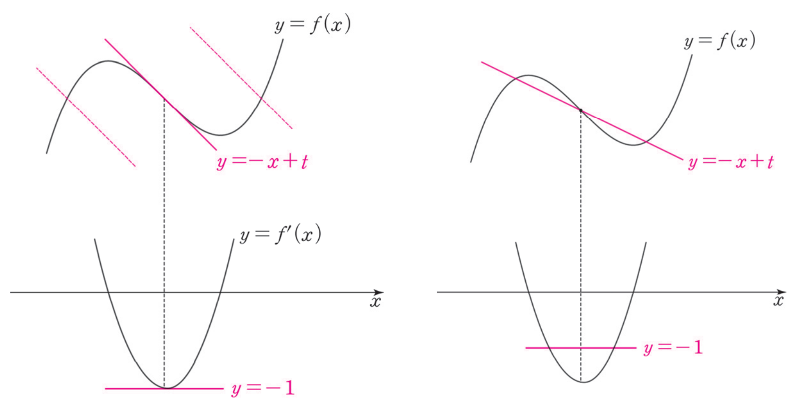
따라서 '대우명제'를 생각할 수 있어야 한다. $p \to q$가 아닌 $\sim q \to \sim p$로 바라보자.

함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다. ⇔ **삼차함수 $f(x)$의 극값이 존재하면, 함수 $g(t)$는 상수함수가 아니다.**

대우명제의 경우는 반례를 찾기 훨씬 수월하다. 삼차함수 $f(x)$의 극값이 존재하는 개형은 딱 하나 존재하기에 $f(x)$를 확정할 수 때문이다.
태도 : 조건문인 명제를 그 자체로 따지기 어렵다면 대우 명제를 떠올리자.

(ㄷ)의 대우 명제의 반례는 '$f(x)$의 극값이 존재하면서 $g(t)$가 상수함수인 CASE'이다. 변곡점에서 삼차함수의 미분계수가 최소 혹은 최대가 된다는 특징을 떠올리자.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때, '(변곡점에서의 기울기)≥ -1'이면 $g(t)$는 상수함수이다.



따라서 최고차항의 계수가 양수이고 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 $x=a$에서 변곡점을 가질 때, $-1 \leq f'(a) < 0$이면 $g(t)$는 상수함수이므로 ㄷ은 틀렸다. (X)

옳은 것은 ㄱ, ㄴ이므로 **답은 ③!!**

comment

도구

삼차함수의 변곡점의 특징

태도

1. 단정적 진술의 참, 거짓을 판별하기 위해서 반례를 찾자.
2. 조건문인 명제를 그 자체로 따지기 어렵다면 '대우명제'를 떠올리자.

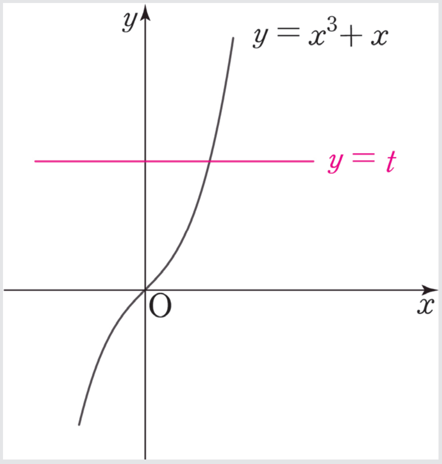
※ 예제(4) 차이함수 풀이

차이함수는 〈Chapter 5. 도함수의 활용〉에서 자세히 다룬다. 아직 차이함수를 배우기 전이지만 이 풀이를 이해하는 데에는 큰 어려움이 없을 것이다. 차이함수 풀이가 출제 의도인지는 확신이 들진 않지만 충분히 좋은 풀이이므로 알아두자.

$y=f(x)$와 $-x+t$의 교점의 개수는 삼차함수와 일차함수의 교점의 개수인데, **삼차함수와 일차함수를 따로따로 보기 불편할 수도 있다.**

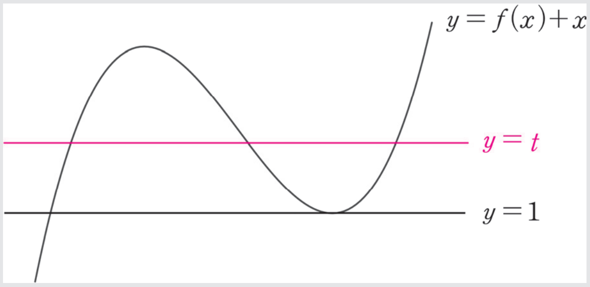
$f(x)=-x+t$의 실근은 $f(x)+x=t$의 실근과 동일하므로 **$y=f(x)+x$와 $y=t$의 교점의 개수로 보자.** 이 경우 **삼차함수와 x축과 평행한 직선의 교점**이므로 비교적 수월하게 관찰할 수 있다.

1. $y=x^3+x$와 $y=t$의 교점을 관찰하자. $y'=3x^2+1$이므로 $y=x^3+x$은 극값을 갖지 않는다. 따라서 교점의 개수는 항상 1이다. (O)



2. $g(1)=2$이므로 방정식 $f(x)+x=1$의 실근의 개수가 2이다.

$f(x)+x$도 마찬가지로 삼차함수이므로 다음과 같이 그래프를 그릴 수 있다.



$g(t)=3$인 t는 당연히 존재한다. (O)

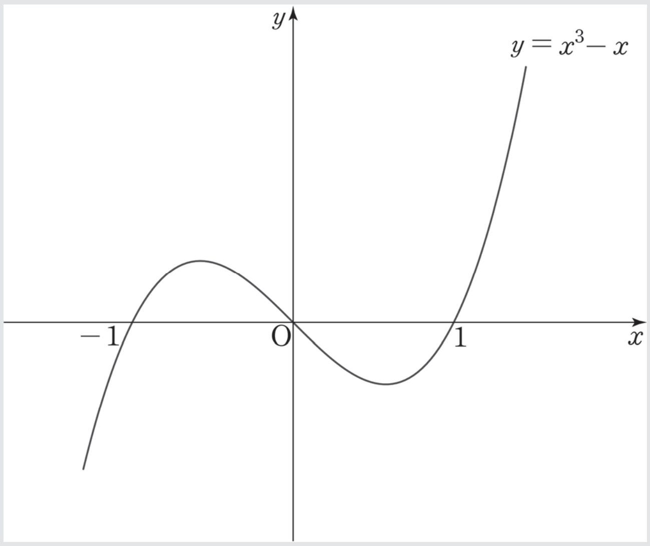
3. '$g(t)$는 상수함수이다.'는 '$f(x)+x$의 극값이 존재하지 않는다.'와 같으므로 선지 (ㄷ)을 다음과 같이 서술할 수 있다.

함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

⇔ 함수 $f(x)+x$의 극값이 존재하지 않으면 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

$f(x)+x$를 극값이 존재하지 않는 가장 대표적인 삼차함수인 x^3라고 한다면,

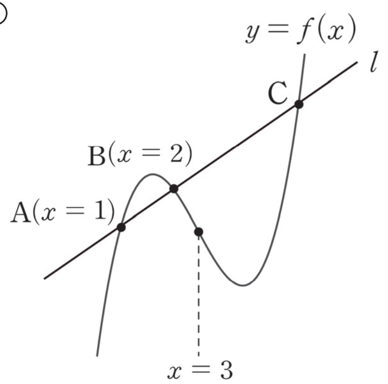
$f(x)=x^3-x$가 되고 $f(x)$의 극값은 존재한다. 반례가 존재하므로 ㄷ은 틀렸다. (X)



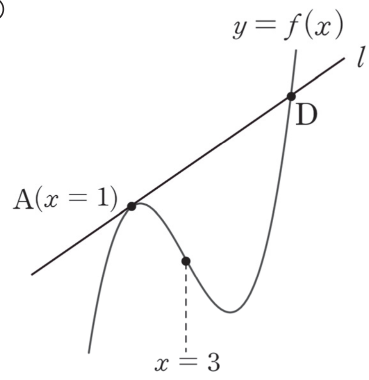
(3) 3×(변곡점의 x좌표)=삼차방정식의 세 근의 합

Q) 아래 그림에서 삼차함수 $f(x)$의 변곡점의 x좌표가 3일 때, 점 C의 x좌표와 점 D의 x좌표는?

①



②



A) 점 C의 x좌표는 6이고, 점 D의 x좌표는 7이다. 지금부터 천천히 그 이유를 알아보자.

$y=ax^3+bx^2+cx+d$, $y'=3ax^2+2bx+c$ (단, $a\neq 0$)

변곡점의 x좌표는 이차함수의 꼭짓점의 x좌표와 같으므로 변곡점의 x좌표 : $-\dfrac{b}{3a}$

(혹은 두 번 미분하여 구할 수 있다. $y''=6ax+2b=0$에서 $x=-\dfrac{b}{3a}$)

근과 계수의 관계에 의해 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근의 합 : $-\dfrac{b}{a}$

∴ 3×(변곡점의 x좌표)=삼차방정식의 세 근의 합

이 내용을 바탕으로 위의 두 그림을 다시 보자.
그림 ①에서 점 C의 x좌표를 c라 하고, 직선 l의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.
그림 ②에서 점 D의 x좌표를 d라 하고, 직선 l의 방정식을 $y=h(x)$라 하자.

① 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 세 실근은 $1,\ 2,\ c$이다.
② 삼차방정식 $f(x)-h(x)=0$의 세 실근은 $1,\ 1,\ d$이다.

한편, 삼차함수와 직선을 연립한 삼차방정식에서 직선은 **삼차함수의 삼차항과 이차항에 아무런 영향도 주지 않는다. (변곡점의 x좌표)와 (삼차방정식의 세 근의 합)은 삼차항과 이차항에만 영향받으므로 삼차함수의 그래프와 직선이 만날 때에도 '3×(변곡점의 x좌표)=삼차방정식의 세 근의 합'은 유효하다!**

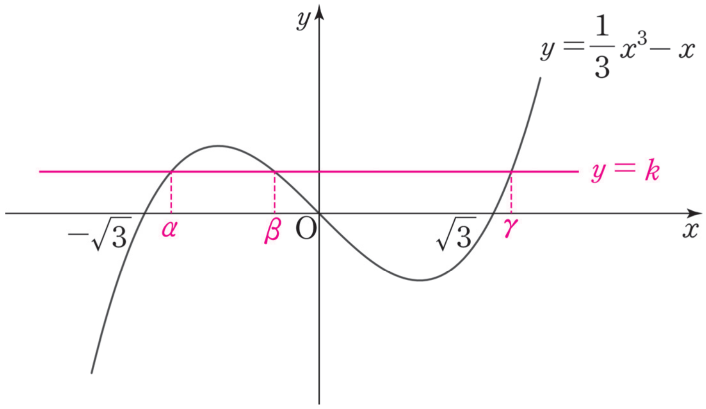
① $f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 3이므로 $3\times3=1+2+c$ $\therefore$ $c=6$
② $f(x)-h(x)$의 변곡점의 x좌표는 3이므로 $3\times3=1+1+d$ $\therefore$ $d=7$

예제(7) 05학년도 수능 가형 24번

x에 대한 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3 - x = k$가 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다. 실수 k에 대하여 $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]

1. x**에 대한 삼차방정식** $\frac{1}{3}x^3 - x = k$**의 근** ⇔ **함수** $y = \frac{1}{3}x^3 - x$**와 함수** $y = k$**의 교점**

$y = \frac{1}{3}x^3 - x$와 $y = k$ 그래프를 그리자.



※ $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$의 최솟값을 구하는 데에 k의 부호와 α, β, γ의 대소관계는 상관없으므로 $\alpha < \beta < \gamma$, $k \geq 0$으로 설정했다.

2. **문제에서 요구하는** $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$**은 서로 다른 세 교점의 합과 굉장히 유사하다.**
삼차함수의 '근과 계수의 관계'에 의해 $\alpha + \beta + \gamma = 0$

$\alpha + \beta + \gamma$와 $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$를 연결지어야 하는데 이 둘을 어떻게 연결지을 수 있을까?
여기서 그래프 관찰의 중요성이 드러난다. 그래프를 관찰하면 서로 다른 세 실근의 '부호'를 알 수 있다. α, $\beta < 0$, $\gamma > 0$

따라서 $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = -(\alpha + \beta) + \gamma$이 되고 $\alpha + \beta = -\gamma$이므로
$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = -(\alpha + \beta) + \gamma = 2\gamma$

γ**은** $k = 0$**일 때 최솟값** $\sqrt{3}$**을 가지므로** $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$의 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.
$\therefore (2\sqrt{3})^2 = 12$

답은 12!!

comment

1. α, β, γ의 부호를 알기 위해서는 **그래프를 관찰**해야만 했고, $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$을 보고 근과 계수의 관계를 떠올려 **삼차방정식의 세 근의 합을 이용**할 수 있어야 했다. 식과 그래프 모두가 필요했던 문항이므로 굉장히 잘 만든 문항이다. 특히나 그래프를 필수적으로 관찰해야 했다는 점이 너무 마음에 든다.

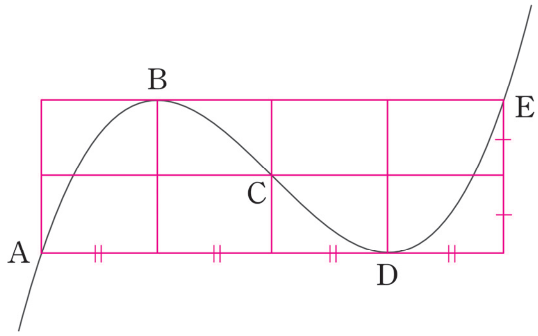
2. $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$의 최솟값을 구하는 데에 k의 부호와 α, β, γ의 대소관계는 상관없다고 한 것이 찝찝하다면 직접 $k \leq 0$일 때를 따져보면 된다. **제시된 삼차함수는 '기함수'이기 때문에** $k \leq 0$일 때에도 똑같은 답이 나온다.

2. 삼차함수의 비율

(1) $1:1:1$

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수가 점 C에서 변곡점, 두 점 B, D에서 극값을 가질 때, **점 A, B, C, D, E의 x좌표는 순서대로 등차수열을** 이룬다.

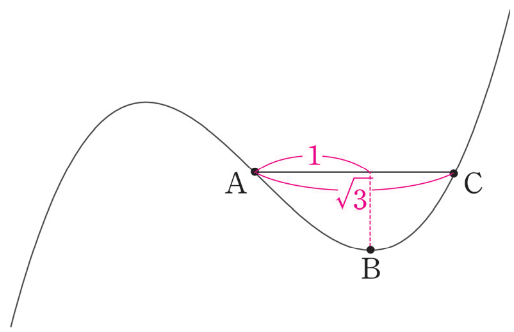
또한, 두 점 A, E는 점 C에 대하여 대칭이고, 두 점 B, D는 점 C에 대하여 대칭이다.
(그래프로 이해하자.)



설명을 외우기보다는 위의 그림 자체를 이해하여 문제에서 자유자재로 활용하는 것이 중요하다.
$1:1:1:1$ 비율 혹은 $1:2$ 비율로도 불리지만 모두 의미는 같다.

(2) $1:\sqrt{3}$

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수가 점 A에서 변곡점이고 점 B에서 극값을 가질 때, A, B, C의 x좌표를 각각 a, b, c라 하자. 이때, $b-a:c-a=1:\sqrt{3}$이다.
(그래프로 이해하자.)



위의 두 비율은 삼차함수 그래프의 본질적 특성이므로 삼차함수의 최고차항의 계수가 음수일 때도 성립한다.

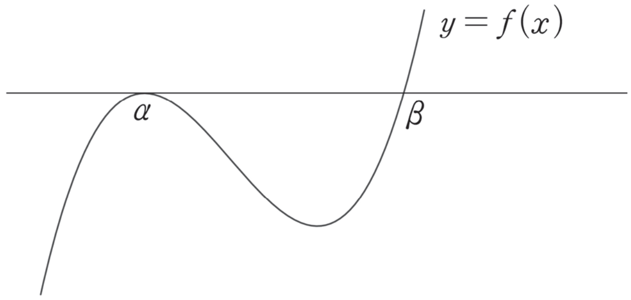
예시 04학년도 수능 10번

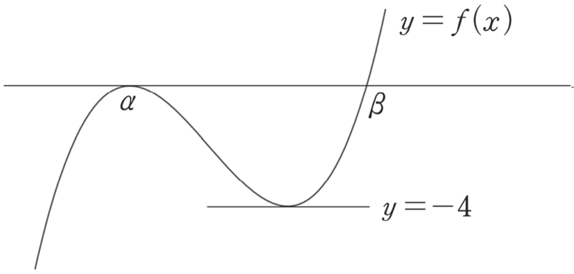
삼차함수 $y = f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극값을 갖고, 그 그래프가 원점에 대하여 대칭일 때, 이 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표 중에서 양수인 것은?

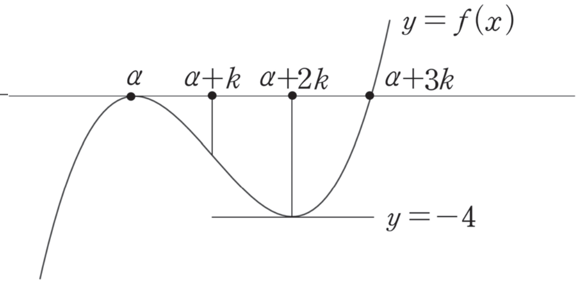
① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

$1 : \sqrt{3}$ 비율에 따라 **답은 ②!!** 앞으로는 $1 : 1 : 1$ 비율과 $1 : \sqrt{3}$ 비율은 외워둠으로써, 매번 삼차함수를 미분하여 x좌표를 찾는 수고를 덜자.

(3) 삼차함수 비율과 미지수 설정







다음과 같이 극솟값이 -4인 삼차함수가 제시되었을 때, 비율 관계를 고려한다면 $\beta=\alpha+3k$로 설정하는 것이 계산에 훨씬 편하다.

β를 **그대로 사용한 채 삼차함수의 극솟값을 구한다고 생각해보자.**

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$에서 삼차함수의 비율에 의해 $f(x)$는 $x=\dfrac{\alpha+2\beta}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

그러나 $f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)=-4$를 계산하기는 까다롭다.

반면, $\beta=\alpha+3k$**로 설정해보자.**

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-3k)$에서 비율관계에 따라 $x=\alpha+2k$에서 극솟값을 갖는다.

이 경우 계산이 훨씬 간단해진다.

이렇게 삼차함수의 $1:1:1$ 비율에서 1을 k로 설정하는 것이 실전에서 계산할 때 많은 도움이 되므로 적극 활용하자.

예제(8) 18학년도 사관 20번

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(6)$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

(가) $f(2)=f'(2)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq -3$이다.

① 128 ② 144 ③ 160 ④ 176 ⑤ 192

1. **도함수인 이차함수 $f'(x)$의 최솟값이 -3 이상임을 적용하여 이차함수의 최솟값 풀이로 풀 수도 있지만 삼차함수 파트에서 배운 내용을 활용해보자.**

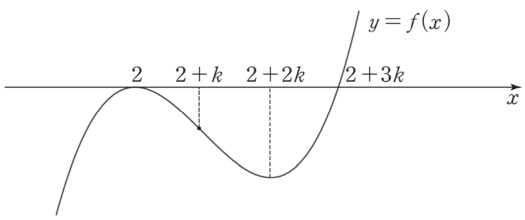
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq -3$ 이다.

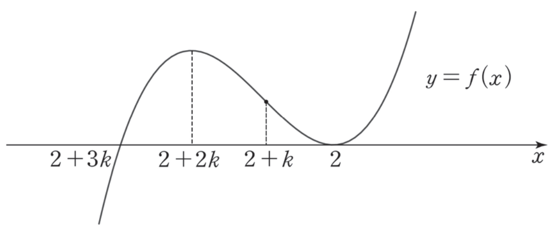
→ 최고차항 계수가 양수인 삼차함수의 미분계수는 변곡점에서 최소가 되므로 '(변곡점에서의 미분계수) ≥ -3'으로 해석할 수 있다.

조건 (가)에서 $f(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로 $f(x)$의 식을 다음과 같이 작성할 수 있다.

$f(x)=(x-2)^2(x-k)$ (k는 실수)

삼차함수 비율을 통해 변곡점의 x좌표를 구한 다음 이를 '(변곡점에서의 미분계수) ≥ -3'에 대입하여 풀면 된다. 이때, $f(x)$의 나머지 인수 $(x-k)$를 그대로 살려서 간다면 계산이 많이 복잡해지므로 비율을 고려하여 미지수를 바꿔서 작성하자.





$f(x)=(x-2)^2(x-2-3k)$

$k=0$인 경우에도 $2=2+k=2+2k=2+3k$이므로 변곡점의 x좌표는 $2+k$라 할 수 있다.

2. **삼차함수 비율에 따라 변곡점의 x좌표는** $2+k$이므로 $f'(2+k) \geq -3$

$f'(x)=2(x-2)(x-2-3k)+(x-2)^2$

$f'(2+k)=2k(-2k)+k^2$

$\qquad =-3k^2 \geq -3$

$\therefore\ -1 \leq k \leq 1$

$f(6)=16(4-3k)=64-48k$이므로 최댓값 $M=64+48$, 최솟값 $m=64-48$

따라서 $f(6)$의 최댓값과 최솟값의 합은 128이다.

답은 ①!!

comment

이차함수의 최솟값 풀이로 풀어도 궁극적으로는 같은 의미이다. 단지 본문에서 학습한 내용을 적용해 보는 차원에서 삼차함수의 특징을 적용해서 푼 것이다.

예제(9) 18학년도 6월 평가원 20번

함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1\ (k>0\text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

1. **두 접선 l, m의 기울기가 주어졌으므로 방정식 $f'(x)=3k^2$를 풀어서 A, B의 x좌표를 구하자.**

$f'(x)=x^2-2kx=3k^2$

$(x-3k)(x+k)=0$

A, B의 대소관계는 중요하지 않으므로 점 A의 x좌표를 $-k$, 점 B의 x좌표를 $3k$라 하자.

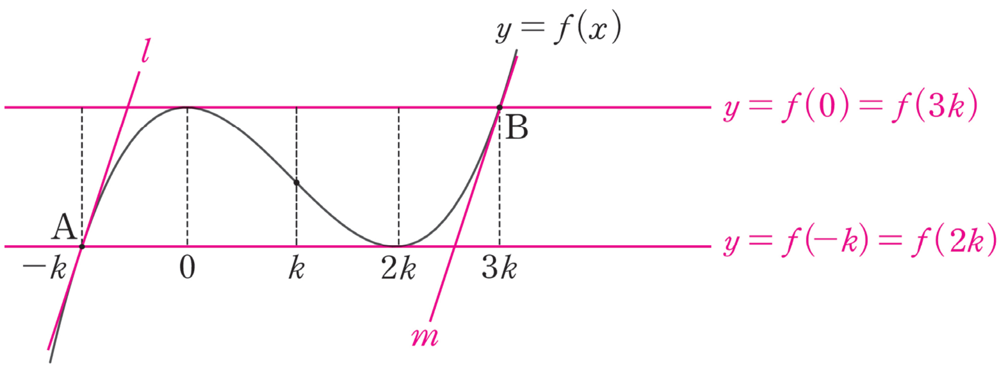
도형의 개형을 파악해야 하고 $f(x)$의 식이 주어졌기 때문에 풀이의 기본으로 그래프를 그리는 것은 당연하다. $y=f(x)$의 그래프를 그리자. 이런 이유를 차치하고서도 미적분의 핵심은 그래프이고 킬러 문항 중에서 그래프 없이 풀 수 있는 문제는 거의 없다.

태도 : 웬만하면 그래프는 그리고 봐라.

$f'(x)=x^2-2kx=0$

(극솟값을 가지는 x좌표) : 0

(극댓값을 가지는 x좌표) : $2k$



그래프를 관찰함으로써 생성된 도형이 평행사변형임을 파악했다.

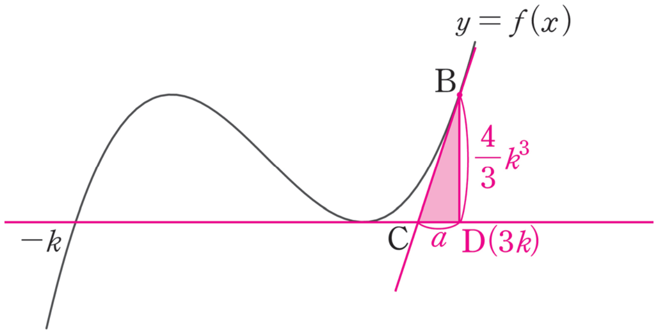
이제 우리의 목표는 밑변과 높이를 구하는 것이다.

2. **그래프를 보면, 높이는 쉽게 구할 수 있다.**

(높이) = (극댓값-극솟값) = $1-\left(1-\dfrac{4k^3}{3}\right)=\dfrac{4k^3}{3}$

밑변은 높이에 비해 까다롭다. 밑변을 구하는 방법에는 두 가지가 있는데, 어떤 방법일지 고민해 보고 다음 페이지를 보자.

(1) 가장 쉬운 방법은 삼각형의 기울기를 이용하는 것이다.



삼각형 BCD에서 (빗변의 기울기) = $\left(\frac{\text{높이}}{\text{밑변}}\right)$

(빗변의 기울기) : 곡선 $f(x)$의 점 B에서의 접선의 기울기 : $3k^2$

$\left(\frac{\text{높이}}{\text{밑변}}\right)$: $\frac{\frac{4k^3}{3}}{a}$

방정식 $3k^2=\frac{\frac{4k^3}{3}}{a}$을 풀면 $a=\frac{4k}{9}$이다.

따라서 밑변의 길이는 $4k-\frac{4k}{9}=\frac{32k}{9}$이고, 높이는 $\frac{4k^3}{3}$이므로

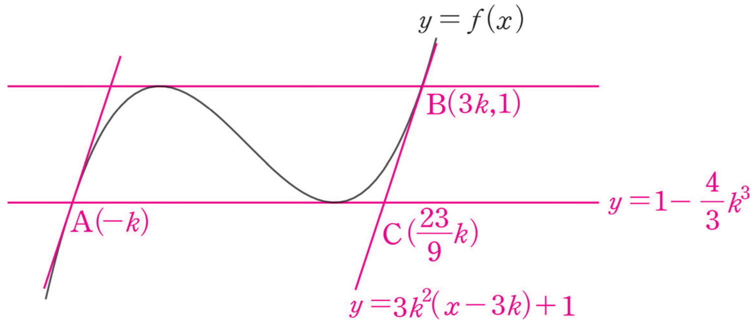
(평행사변형의 넓이)$=\frac{32k}{9}\times\frac{4k^3}{3}=24$, $k^4=\frac{81}{16}$ $\quad\therefore\ k=\frac{3}{2}$ $(\because\ k>0)$

답은 ③!!

※ 이 방법은 다소 발상적이다. 그러나 **평가원은 발상적인 풀이가 유일한 풀이가 되도록 문제를 설계하지 않으므로 다른 풀이도 존재한다. 이러한 점이 평가원이 대단하고 믿음직**스러운 부분이다. 정직하게 공부하면 평가원은 반드시 보답해준다. 다음 페이지를 보자.

(2) 두 번째 방법은 좌표를 이용하는 것이다.

점 C의 좌표를 구해 평행사변형의 밑변을 구하는 방법이고 이것이 출제 의도일 확률이 높다.



(점 B에서의 접선의 방정식) : $y=3k^2(x-3k)+1$

점 C의 x좌표를 t라 할 때, $3k^2(t-3k)+1=1-\frac{4}{3}k^3$이다.

$3k^2(t-3k)=-\frac{4}{3}k^3$에서 $k>0$이므로 양변을 $3k^2$으로 나누자.

$t-3k=-\frac{4}{9}k \quad \therefore\ t=\frac{23}{9}k$

(평행사변형의 밑변의 길이)=(점 C의 x좌표)-(점 A의 x좌표)$=\frac{23k}{9}-(-k)=\frac{32k}{9}$

계산을 마저 해주면 (1)과 똑같은 답이 나온다.

예제(10) 22학년도 예비시행 22번

함수

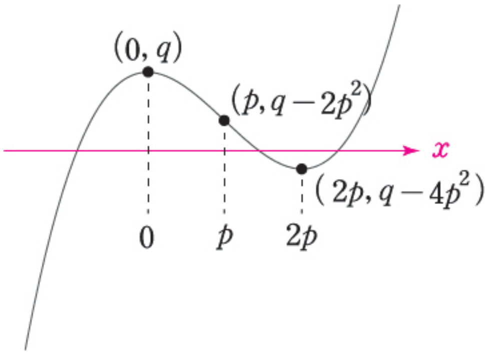
$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.

(나) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

1. **함수 $|f(x)|$가 조건 (가)를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 극값을 가져야 하고, 극솟값과 극댓값의 부호가 달라야 한다.**

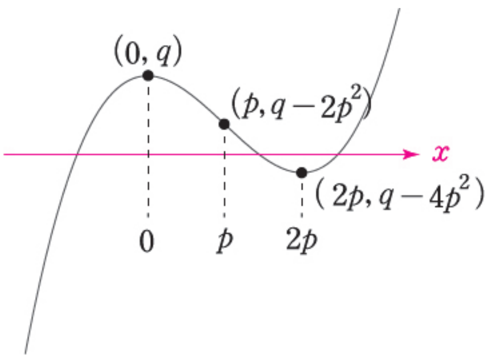


$f(x)=x^3-3px^2+q$에서 $f'(x)=3x(x-2p)$이므로
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지고, $x=2p$에서 극솟값을 가지고, $x=p$에서 변곡점을 가진다.

$f(0)>0$, $f(2p)<0$에서 $q>0$, $8p^3-12p^3+q=q-4p^3<0$이다. 따라서 $0<q<4p^3$이다.

2. 주어진 만족시키는 순서쌍을 구해보자. 순서쌍을 한꺼번에 생각하기가 어렵다.
일단 p를 고정해놓고 조건을 만족시키는 q를 찾자.

도구: 두 개 이상의 변수가 제시되면, 하나를 고정한 채로 다른 하나를 관찰한다.

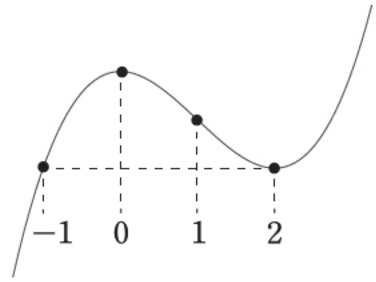


주어진 상황을 보자. $f(x)=x^3-3px^2+q$의 그래프에서
구간 $[-1, 1]$과 구간 $[-2, 2]$를 살펴보자.

함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 $x=0$에서 최댓값 q를 갖는다.
만일 $|f(-1)|>f(0)$이면 함수 $|f(x)|$는 구간 $[-1, 1]$에서 최댓값 $|f(-1)|$을 갖는다.
하지만 $|f(-1)|<|f(-2)|$이므로 조건 (나)에 모순이 되어 $|f(-1)|>f(0)$이 아니다.

따라서 함수 $|f(x)|$ 또한 구간 $[-1, 1]$에서 $x=0$에서 최댓값 q를 가지므로 함수 $|f(x)|$는 구간 $[-2, 2]$에서 최댓값 q를 가져야 한다.

(1) $p=1$일 때, $0<q<4p^3$에서 $0<q<4$이다.

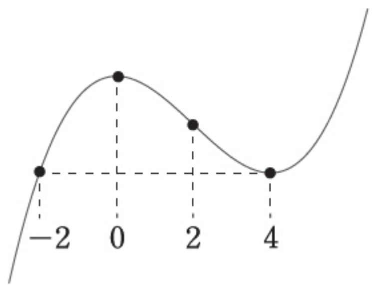


$|f(x)|=|x^3-3x^2+q|$에서 구간 $[-2,\ 2]$에서의 최댓값을 구해보자.

$f(-2)=q-20$**에서** $f(-2)\geq 0$**이면** $q\geq 20$**이므로** $0<q<4$**라는 조건에 모순된다.**

$f(-2)<0$**이면** $|f(-2)|\leq f(0)$**이어야 한다.** $20-q\leq q$**에서** $q\geq 10$**이므로** $0<q<4$**라는 조건에 모순된다.**

(2) $p=2$일 때, $0<q<4p^3$에서 $0<q<32$이다. q는 25 이하의 자연수이므로 $0<q\leq 25$이다.



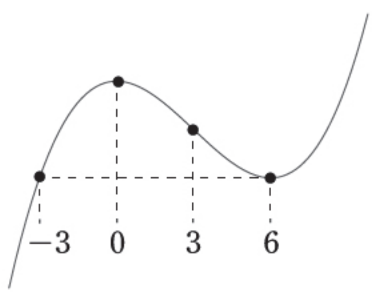
$|f(x)|=|x^3-6x^2+q|$에서 구간 $[-2,\ 2]$에서의 최댓값을 구해보자.

$f(-2)=q-32$**에서** $f(-2)\geq 0$**이면** $q\geq 32$**이므로** $0<q\leq 25$**라는 조건에 모순된다.**

$f(-2)<0$**이면** $|f(-2)|\leq f(0)$**이어야 한다.** $32-q\leq q$**에서** $q\geq 16$**이므로** $16\leq q\leq 25$**이다.**

따라서 (2)를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 $25-16+1=10$이다.

(3) $p=3$일 때, q는 25 이하의 자연수이므로 $0<q\leq 25$이다.



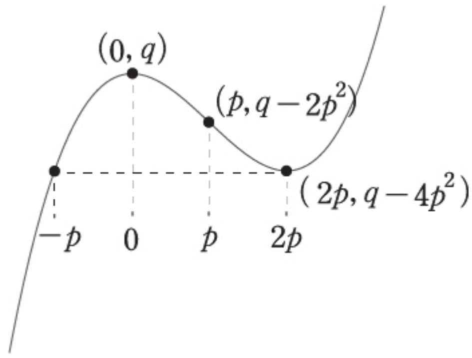
$|f(x)|=|x^3-9x^2+q|$에서 구간 $[-2,\ 2]$에서의 최댓값을 구해보자.

$f(-2)=q-44$**에서** $f(-2)\geq 0$**이면** $q\geq 44$**이므로** $0<q\leq 25$**라는 조건에 모순된다.**

$f(-2) < 0$**이면** $|f(-2)| \le f(0)$**이어야 한다.** $44-q \le q$**에서** $q \ge 22$**이므로** $22 \le q \le 25$**이다.**

따라서 (3)을 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 $25-22+1=4$이다

(4) $p \ge 4$일 때, q는 25 이하의 자연수이므로 $0 < q \le 25$이다.



$|f(x)| = |x^3-3px^2+q|$에서 구간 $[-2,\ 2]$에서의 최댓값을 구해보자.

$f(-2) = q-8-12p$**에서** $f(-2) \ge 0$**이면** $q \ge 8+12p$**이므로** $0 < q \le 25$**라는 조건에 모순된다.**

$f(-2) < 0$**이면** $|f(-2)| \le f(0)$**이어야 한다.** $8+12p-q \le q$**에서** $q \ge 4+6p$**이므로** $0 < q \le 25$**라는 조건에 모순된다.**

(1), (2), (3), (4)에 의하여 구하고자 하는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 $10+4=14$이다.

답은 14!!

comment

1. 이 문제가 어려운 이유는 두 개의 변수 p, q가 존재하기 때문이다. 수2에서 변수가 2개 이상이고 개수와 관련된 문항의 해결법은 두 변수를 복합적으로 고려하는 것이 아니라, 하나의 변수를 고정해놓고 다른 하나의 변수를 관찰하는 것이다.

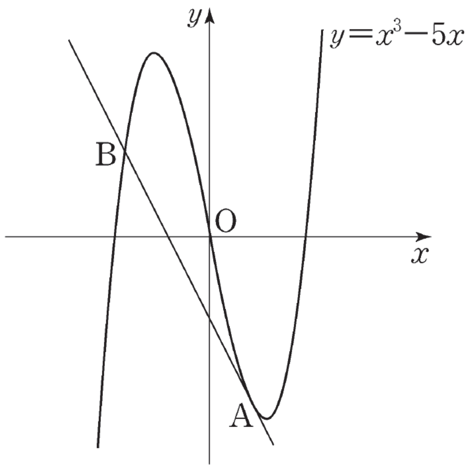
   이 문제에서 확실한 것은 '$y=f(x)$**의 비율을 형성하는** $x=-p, 0, p, 2p$'**와 '두 닫힌구간** $[-1,1]$, $[-2,2]$'이다. 따라서 p에 자연수를 대입하면서 그에 따라 조건을 만족시키는 q의 개수를 찾는 것이 필연적인 길이다.

2. 삼차함수가 제시되면 비율은 기본적으로 고려해야 한다. 이 문제도 삼차함수의 비율을 고려하지 않으면 해결하기 까다로워진다.

◆ 3. 삼차함수 비율 확장 : 삼차함수와 접선이 이루는 비율

예제(11) 13학년도 6월 평가원 17번

곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 A$(1,\ -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는? [4점]

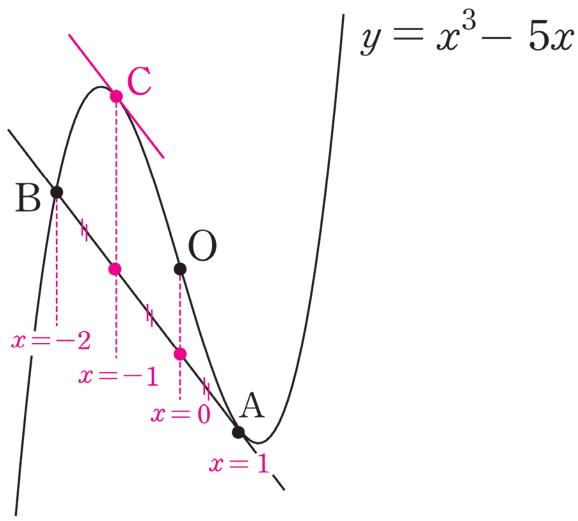


① $\sqrt{30}$　　② $\sqrt{35}$　　③ $2\sqrt{10}$　　④ $3\sqrt{5}$　　⑤ $5\sqrt{2}$

1. 정석적으로 풀자면,

곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 접선의 방정식을 작성한 다음,
접선과 삼차함수를 연립하여 교점 B를 구하는 식으로 풀면 된다.

그러나 '삼차함수와 접선이 이루는 비율'을 이용하면 그래프를 보자마자 바로 교점 B의 x좌표를 구할 수 있다. 그래프를 통해 한 번에 이해하자.



2. 점 O는 $y=x^3-5x$의 변곡점이다.

그래프에서 보이는 바와 같이 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 미분계수와 동일한 미분계수를 가지는 곳을
점 C라 할 때 **점 $\mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{O},\ \mathrm{A}$의 x좌표는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.**

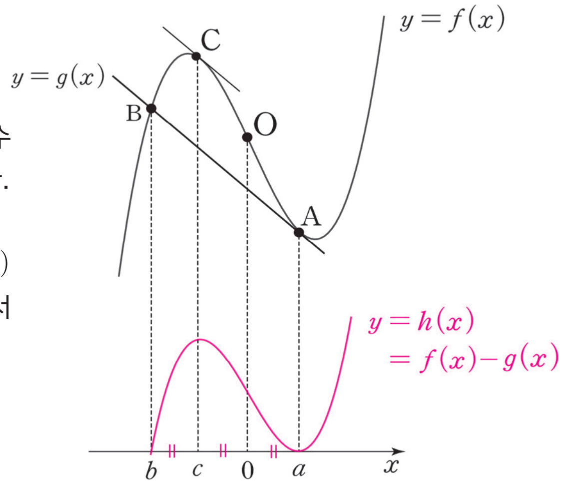
점 A의 x좌표가 1이고
점 O의 x좌표는 0이므로
$1:1:1$ 비율에 의해 B의 x좌표는 -2이다. (그래프를 통해 이해하자.)

※ 꼭 삼차함수의 비율 확장이 아니어도 **앞서 배운 '$3\times$(변곡점의 x좌표)=삼차방정식의 세 근의 합'** 공식을 이용할 수도 있다. $y=x^3-5x$의 변곡점의 x좌표는 0이므로 $0\times3=1+1-2$이다.
따라서 점 B의 x좌표는 -2이다.

따라서 $\mathrm{A}(1,\ -4),\ \mathrm{B}(-2,\ 2)$이므로 선분 AB의 길이는 $3\sqrt{5}$이다.

답은 ④!!

삼차함수와 접선의 비율에서도 $1:1:1$ 비율이 나타나는 이유를 차이함수를 통해 알아보자. 차이함수는 함수의 차를 이용하여 새로운 함수를 관찰하는 방식으로 **〈Chapter 5. 도함수의 활용〉**에서 자세히 배운다.



삼차함수 $f(x)=x^3-5x$와 두 점 A, B를 지나는 일차함수 $g(x)$의 차이함수를 $h(x)$라 하면 $h(x)=f(x)-g(x)$이다.

$f(x)$와 $g(x)$는 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 만나고 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서 접하므로 $h(x)$는 $x=b$에서 x축을 지나고 $x=a$에서 x축에 접하는 삼차함수이다.

여기서 잠시 변곡점에 대해 복습하자.

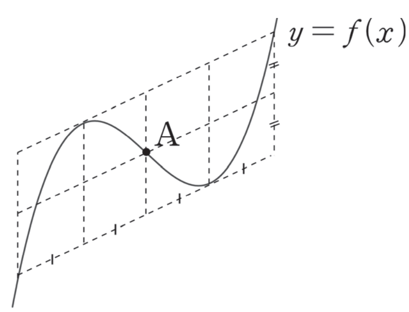
> 삼차함수 $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq0)$
> → 도함수 : $y'=3ax^2+2bx+c$
> 변곡점의 x좌표는 이차함수의 꼭짓점의 x좌표와 같으므로 변곡점의 x좌표 : $-\dfrac{b}{3a}$
> (혹은 $y''=6ax+2b=0$을 만족하는 $x=-\dfrac{b}{3a}$)

즉, 변곡점은 삼차함수의 삼차항과 이차항에만 영향을 받고 일차항, 상수항과는 아무 관련이 없다. 삼차함수 $f(x)$에서 일차함수 $g(x)$를 빼더라도 $f(x)$의 삼차항과 이차항은 그대로 유지되기 때문에 **삼차함수 $f(x)$와 차이함수 $h(x)$의 변곡점의 x좌표는 0으로 동일**하다. 따라서 삼차함수의 비율에 의해 네 점 B, C, O, A의 x좌표는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

Q) $h(x)$에서 $h'(c)=0$인 이유는?

A1) $f'(c)=f'(a)=g'(c)$이므로 $h'(c)=f'(c)-g'(c)=0$이다.
A2) 변곡점에 대해 대칭인 두 점에서의 미분계수가 같다는 점을 이용해도 좋다. $f'(c)=f'(a)$이므로 $\dfrac{c+a}{2}=0$이다. 이때, $h(x)$는 $x=a$에서 극솟값, $x=0$에서 변곡점을 가지므로 $x=c$에서는 극댓값을 가진다.

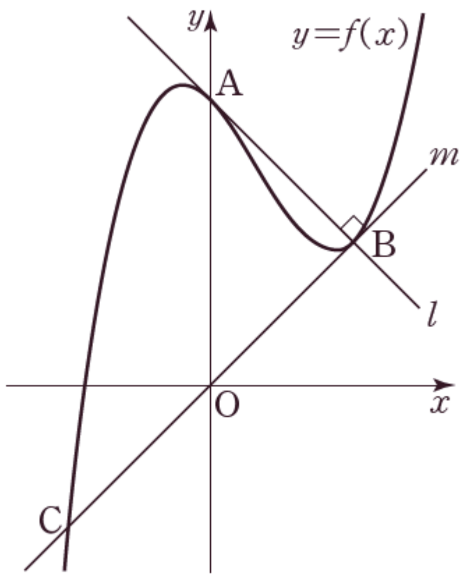
※ 오른쪽 그림을 통해 삼차함수와 접선이 이루는 비율을 직관적으로 이해하자.



예제(12) 16학년도 사관 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식이 $y=x$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는? (단, $f(0)>0$이다.)

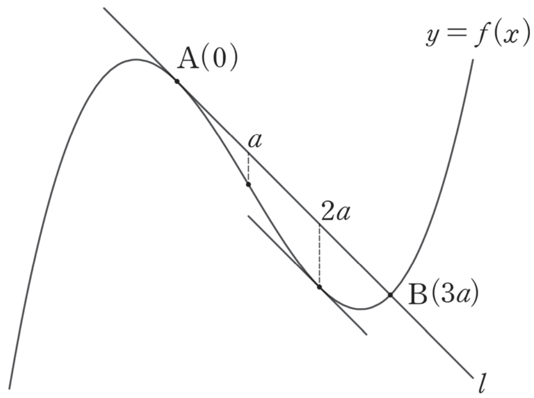
[4점]



① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

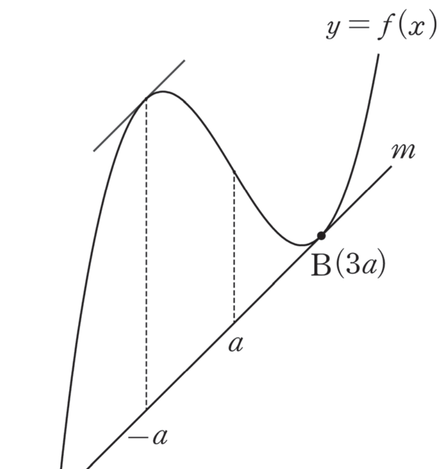
1. **삼차함수와 두 개의 접선이 제시되었다. 삼차함수와 접선이 이루는 비율**을 이용하자.

우선 접선 l부터 살펴보자.



점 A는 y축 위에 존재하므로 x좌표는 0이다. 따라서 $f(x)$의 변곡점의 x좌표를 a라 할 때, 점 B의 x좌표는 $3a$이다. (이처럼 스스로 미지수를 설정해서 문제 속 상황을 미지수로 나타내는 능력은 매우 중요하다.)

다음으로 접선 m을 살펴보자.



점 B의 x좌표가 $3a$이고 $f(x)$의 변곡점의 x좌표가 a이므로 점 C의 x좌표는 $-3a$이다.

2. 두 직선 l, m이 서로 수직이다. 따라서 두 직선 l, m의 기울기의 곱은 -1이다.

직선 m은 $y=x$이므로 m의 기울기는 1이다. 따라서 직선 l의 기울기는 -1이다.

직선 l의 기울기=점 A와 점 B를 지나는 직선의 기울기

점 B는 직선 m, 즉 $y=x$ 위에 존재하므로 B의 좌표는 $(3a,\ 3a)$이다.

점 A의 좌표를 $(0,\ k)$라 할 때 $\dfrac{3a-k}{3a-0}=-1$, $k=6a$이므로 점 A의 좌표는 $(0,\ 6a)$이다.

3. 최종 목표인 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기를 구하자.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기를 알기 위해서는 $f(x)$의 식을 알아내야 한다.
접선이 제시되었으므로 차이함수를 이용하자.

직선 m의 방정식은 $y=x$이므로 $f(x)$**와 m의 차이함수를 이용하면**
$f(x)-x=(x+3a)(x-3a)^2$

점 $A(0,\ 6a)$는 곡선 $f(x)$ 위에 존재하므로 $f(0)=6a$을 대입하면
$f(0)-0=3a\times(-3a)^2=27a^3=6a$

방정식 $27a^3=6a$을 풀어주면,
$27a^3-6a=0$
$a(27a^2-6)=0$
$\therefore\ a=\sqrt{\dfrac{2}{9}}\ (\because\ a>0)$

4. 점 C의 x좌표는 $-3a$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는 $f'(-3a)$이다.

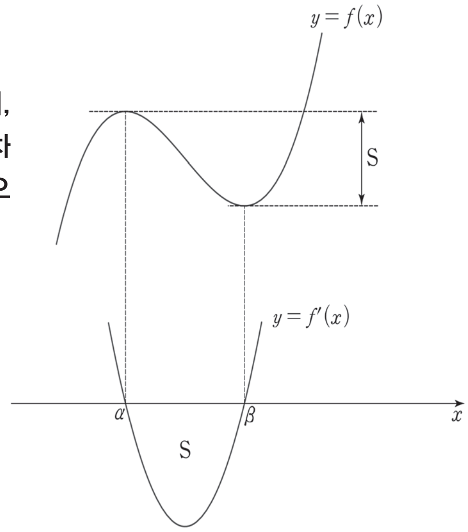
$f(x)-x=(x+3a)(x-3a)^2$
$f'(x)-1=(x-3a)^2+(x+3a)(2x-6a)$
$f'(-3a)-1=(-6a)^2$
$f'(-3a)=36a^2+1=36\times\left(\sqrt{\dfrac{2}{9}}\right)^2+1=9$

답은 9!!

comment

1. **미지수 설정, 삼차함수 비율, 차이함수**가 중요했다. 차이함수는 〈Chapter 5〉에서 자세히 배운다.
2. 해설은 두 직선 l, m의 기울기의 곱을 먼저 따졌지만, 차이함수를 먼저 작성하고 난 뒤에 따져도 상관은 없다. 이런 문항은 명확한 풀이 순서가 정해져 있지 않다.

4. 이차함수 넓이 공식과 삼차함수 극값의 관계



최고차항의 계수가 a $(a>0)$인 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소일 때, 삼차함수 $f(x)$의 극값의 차는 도함수인 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 $\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}=f(\alpha)-f(\beta)$이다. (그래프로 이해하자.)

(증명)

$f'(x)$는 연속함수이므로 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f'(x)dx=f(\beta)-f(\alpha)$이고

$\displaystyle\int_\alpha^\beta |f'(x)|dx=f(\alpha)-f(\beta)$이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 a이므로 이차함수 $f'(x)$의 최고차항 계수는 $3a$이다. 이때, 이차함수 넓이 공식에 의하여 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이($\displaystyle\int_\alpha^\beta |f'(x)|dx$)는 $\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}$이므로 $\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}=f(\alpha)-f(\beta)$이다. $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때도 똑같은 방법으로 증명하면 된다.

※ **이차함수 넓이 공식**

이차함수 $f(x)$의 최고차항 계수가 a이고, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 가질 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$이다.

공식 $\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}=f(\alpha)-f(\beta)$는 다음과 같은 경우에 유용하게 써먹을 수 있다.

① 삼차함수의 극댓값과 극솟값을 알고 있을 때

$\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}=f(\alpha)-f(\beta)$의 우변을 알고 있는 셈이므로, 이 공식을 통해 극값을 갖는 x좌표와 최고차항 계수에 관한 관계식을 얻을 수 있다.

② 삼차함수의 최고차항 계수와 극값을 갖는 x좌표를 알고 있을 때

$\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}=f(\alpha)-f(\beta)$의 좌변을 알고 있으므로, 이 공식을 통해 극값의 차를 알아낼 수 있다.

예제(13) 19년 10월 교육청 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$뿐이다.
(나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4이다.

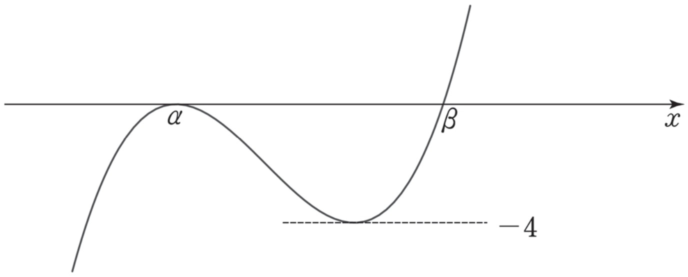
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f'(\alpha)=0$
ㄴ. $\beta=\alpha+3$
ㄷ. $f(0)=16$이면 $\alpha^2+\beta^2=18$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

조건 (가), (나)를 모두 만족하는 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

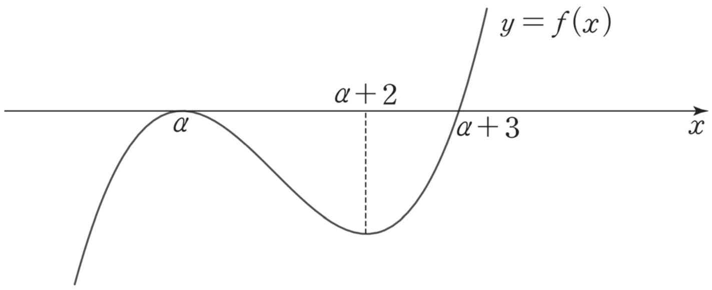


1. 함수 $y=f(x)$는 $x=\alpha$에서 x축에 접한다. 따라서 $f'(\alpha)=0$. (O)

2. **삼차함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 알고 있는 상황에서 극값을 갖는 x를 묻는 보기다.**

〈이차함수 넓이 공식과 삼차함수 극값의 관계〉를 활용하자. $f(x)$가 극솟값을 갖는 x의 값을 k라 할 때, $\frac{|3|}{6}(k-\alpha)^3=4$이므로

$k-\alpha=2$이다. 따라서 삼차함수 비율에 의해 $\beta-\alpha=3$이다. (O)



3. **ㄱㄴㄷ 문항에서 선지 (ㄱ), (ㄴ)은 (ㄷ)을 위한 기반 작업이자 (ㄷ)를 위한 힌트가 된다.**

선지 (ㄴ)에서 구한 $\beta-\alpha=3$을 이용하면 $\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+(\alpha+3)^2$이고

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-3)$이다.

$f(0)=16$을 적용하자. $f(0)=\alpha^2(-\alpha-3)=16$, $\alpha^3+3\alpha^2+16=0$

조립제법을 이용하면 $(\alpha+4)(\alpha^2-\alpha+4)=0$, $\alpha=-4$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=\alpha^2+(\alpha+3)^2=(-4)^2+(-1)^2=17$ (X)

옳은 선지는 ㄱ, ㄴ이므로 **답은 ②!!**

◆ 5. 조건 해석을 통한 삼차함수의 그래프 그리기

제시되는 표현을 잘 보자. **동일한 그래프를 나타내는 데에도 여러 표현을 사용할 수 있다.** 단, 이런 표현들을 무작정 외우려 하지 말자. '공부'해서 주어진 문장을 그 자리에서 바로 따질 있는 실력을 갖춰야 한다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고, α, β, γ는 $\alpha < \beta < \gamma$를 만족하는 실수라 하자.

(1) $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$

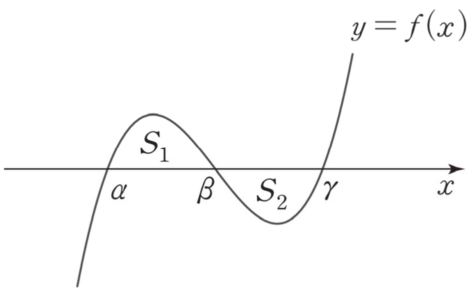
$f(x) = 0$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다.

$f(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$를 인수로 가진다.

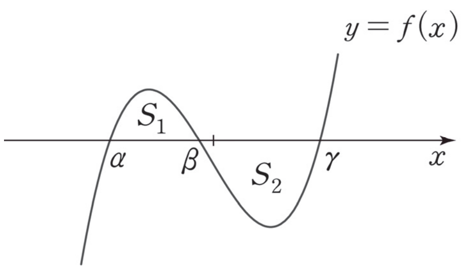
이 경우 α, β, γ의 위치 관계에 따라 $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$와 $\int_{\beta}^{\gamma} |f(x)|dx$의 대소관계가 변한다.

$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx = S_1$, $\int_{\beta}^{\gamma} |f(x)|dx = S_2$라 하자.

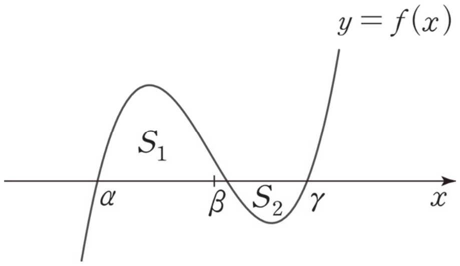
(i) $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$이면, $S_1 = S_2$ (β가 α와 γ의 중앙에 존재할 때)



(ii) $\beta < \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$이면 $S_1 < S_2$ (β가 γ보다 α에 더 가까이 존재할 때)



(iii) $\beta > \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$이면 $S_1 > S_2$ (β가 α보다 γ에 더 가까이 존재할 때)



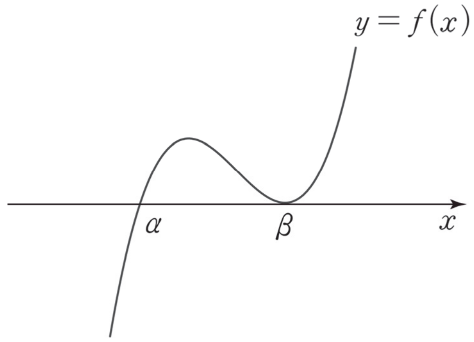
(2) $f(\beta)=f'(\beta)=0$, $f(\alpha)=0$

$f(x)=0$이 β를 중근으로 갖고, α를 하나의 실근으로 가진다.

$f(x)$가 $(x-\beta)^2(x-\alpha)$를 인수로 가진다.

$f(x)=0$의 실근은 α, β $(\alpha<\beta)$뿐이고 $f(x)$의 극댓값은 양수이다.

$f(x)=0$의 실근은 α, β $(\alpha<\beta)$뿐이고 $f(x)$의 극솟값은 0이다.



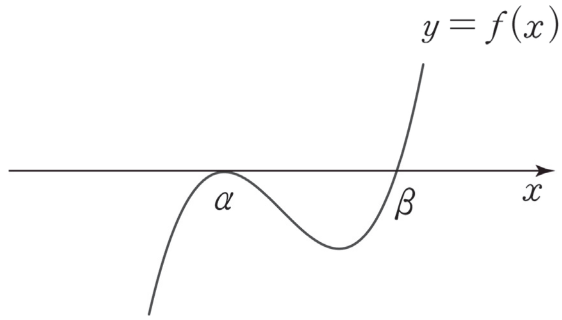
(3) $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

$f(x)=0$이 α를 중근으로 갖고, β를 하나의 실근으로 가진다.

$f(x)$가 $(x-\alpha)^2(x-\beta)$를 인수로 가진다.

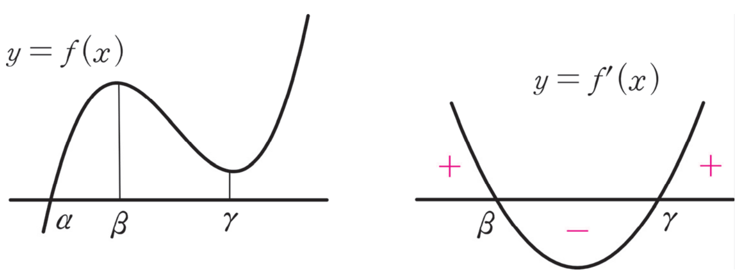
$f(x)=0$의 실근은 α, β $(\alpha<\beta)$뿐이고 $f(x)$의 극댓값은 0이다.

$f(x)=0$의 실근은 α, β $(\alpha<\beta)$뿐이고 $f(x)$의 극솟값은 음수이다.



(4) **$f(x)=0$이 α를 오직 하나의 실근으로 갖고, $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 β, γ를 가진다.**

$f(x)$가 극값을 갖고, 극댓값과 극솟값은 모두 양수이다.

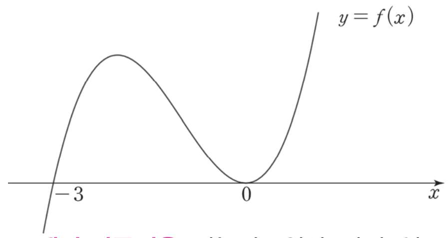


함수식 : $f(x)=(x-\alpha)(x^2+\cdots)$, $f'(x)=3(x-\beta)(x-\gamma)$

이 경우 써먹을 수 있는 좋은 조건이 있다. **$f(x)$와 x축의 교점이 1개라는 점 ($f(x)=0$이 α를 오직 하나의 실근으로 가진다는 점)**에 집중하자. **$f(x)=(x-\alpha)(x^2+\cdots)$에서 $(x^2+\cdots)$의 해는 존재하지 않으므로 $(x^2+\cdots)$의 판별식은 0보다 작다.**

(5) 연습: $y=f(x)$의 그래프를 그리기 위해 반드시 $y=f'(x)$를 관찰할 필요는 없다!

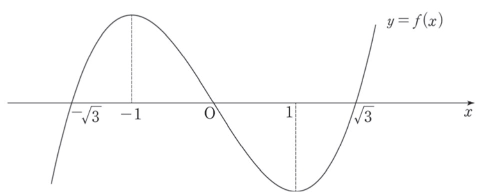
① $f(x)=x^3+3x^2$의 그래프



인수분해를 해주면 $f(x)=x^2(x+3)$이다. 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 x축에 접하고, $x=-3$에서 x축과 만난다.

삼차함수의 $1:1:1$ 비율에 의해 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, $x=-1$에서 변곡점을 갖는다. 위와 같이 인수분해가 가능한 식을 보면, 그래프를 그리기 위해 $f'(x)$를 관찰할 필요가 없다. 제시된 식의 인수를 바탕으로 그래프를 그릴 수 있고, 삼차함수 비율에 의해 극점과 변곡점도 모두 찾을 수 있다.

② $f(x)=x^3-3x$의 그래프



인수분해를 하면 $f(x)=x(x^2-3)=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
따라서 $f(x)$는 $x=0$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$에서 x축과 만난다.

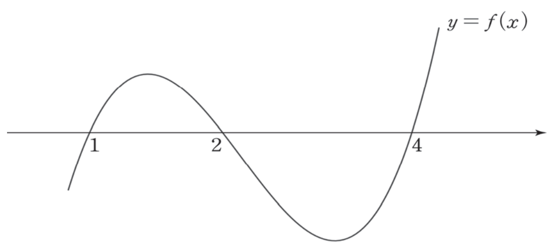
삼차함수의 $1:\sqrt{3}$ 비율에 의해 $f(x)$는 $x=\pm1$에서 극값을 갖는다. 또한, $f(x)$는 홀수차항만으로 이루어져 있으므로 기함수(원점대칭)이다. (함수의 대칭성은 이번 챕터의 마지막 부분에서 배운다.)

③ $f(x)=x^3-7x^2+14x-8$의 그래프 ($f'(x)=0$의 정수근이 존재하지 않는다면, $f(x)=0$이 정수근을 가질지도..?)

일단 식을 보자마자 당황할 수도 있다. 위의 두 개의 식은 상당히 간단했는데 이 식은 꽤(?) 복잡하기 때문이다. 아마 대부분 그래프를 그리기 위해 $f'(x)=3x^2-14x+14=0$의 근을 관찰할 것인데, **$3x^2-14x+14=0$은 인수분해가 되지 않는다!** 그렇다고 근의 공식까지 쓰면서 그래프를 그려야 할까? NO. 아직 $x^3-7x^2+14x-8=0$의 인수분해는 시도하지 않았다.

삼차방정식의 인수분해 TIP을 주겠다. $x=\pm1$을 대입했을 때 0이 된다면 $(x-1)$ 또는 $(x+1)$을 인수로 갖기 때문에 인수분해가 출제 의도인 경우가 많다. (혹은 $x=\pm2$까지도 대입할 수도 있다.)

$f(1)=1-7+14-8=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다. **조립제법을 사용하여 인수분해를 해보면, $f(x)=(x-1)(x-2)(x-4)$이다.** 따라서 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다. x축과의 교점 사이의 거리를 의식하여 x축과 $f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이도 고려하여 그려야 한다.



◆ 다항함수 관련 태도·도구

◆ 1. 다항함수 또는 다항식의 차수와 최고차항의 계수는 반드시 고려하자.

(1) 태도 : 문제에서 '다항함수' 혹은 '다항식'을 보면 차수와 최고차항의 계수를 따져라.

지금 당장은 당연하게 받아들여지는 태도지만, 막상 문제를 마주할 때 제대로 적용하는 사람은 많지 않다. 다항함수에서 가장 중요한 것은 차수와 최고차항 계수다. 제발 외우자. 제발!!

(2) 특히 최고차항의 계수를 따질 때 부호에 유의해라.

문제를 풀 때 당연히 최고차항의 계수를 양수라고 생각하고 문제를 푸는 경향이 많은데, 그러다 불필요하게 시간을 소요하는 경우가 많다. 최고차항의 계수가 음수일 가능성도 의식하자.

(3) 다항함수 $f(x)$를 포함한 항등식이 있을 때, $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 알 수 없다면 최고차항을 설정하자.

$f(x)$의 (최고차항)$= ax^n$ (단, a는 0이 아닌 상수, n은 음이 아닌 정수)
(일반적으로 $f(x)$는 확정되므로 a, n 모두 상수인 경우가 많다.)

이때, 다항함수는 상수함수도 포함하므로 $n=0$일 수도 있음을 주의하자. 한편, 위와 같이 최고차항을 설정하면 모든 다항함수를 표현할 수 있지만, $f(x)=0$인 한 가지 경우를 빼먹게 된다. 사실 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=0$이 되게끔 문제를 설계할 확률은 거의 없지만, 모든 케이스를 따져야 하므로, $f(x)=0$인 경우도 따로 대입해서 확인해주자.

이처럼 $f(x)$의 최고차항을 설정하여 항등식에 대입한 후 **계수 비교법을 통해 a, n의 값**을 알아낼 수 있는 경우가 많다. a, n의 값을 알아낸 다음 $f(x)$의 전체 식을 알 수 있는 다른 방법이 없다면 **$f(x)$의 전체 식을 항등식에 대입**할 수도 있다. 단, 이 경우에는 출제자가 $f(x)$의 차수를 1 또는 2로 설계할 것이다.

단, 최고차항을 항등식에 대입하여 계수 비교법을 적용하더라도 **차수나 계수에 대한 정보를 항등식으로부터 도출하지 못할 수도 있다.** 이때는 당황하지 말고 다른 조건과 연결짓는 등 다른 풀이를 생각해보면 된다. 다항함수가 문제에서 제시된 경우 '차수'만큼은 알 수 있도록 설계할 것이다.
태도 : 하나의 접근이 막히는 상황을 당연하게 받아들이자.

예제(17) 96학년도 수능 13번

다항식 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(g(x))=x$이고 $g(0)=1$일 때, $g(-1)$의 값은? [1.5점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

1. **차수와 최고차항의 계수가 알려지지 않은 다항식 $g(x)$를 포함한 항등식이 제시되었다. 최고차항을 설정 · 대입하여 계수 비교법을 이용하자.**

($g(x)$의 최고차항)$=ax^n$ (단, a는 0이 아닌 상수, n은 음이 아닌 정수)

※ $g(x)=0$인 경우도 따로 따져야 한다. $g(x)=0$을 $g(g(x))=x$에 대입하면 $0=x$가 되어 등식을 만족시키지 못한다.

$g(g(x))=x$에서 $g(x)$ 자리에 ax^n을 대입하면

(좌변의 최고차항)$=a(ax^n)^n$
(우변의 최고차항)$=x$

좌 · 우변의 최고차항이 서로 일치하므로 $a^{n+1}x^{n^2}=x$
$n^2=1$, $a^{n+1}=1$
$n=1$ ($\because$ $n\geq 0$), $a=\pm 1$

2. $g(0)=1$을 적용하면 $g(x)=x+1$ or $-x+1$이다. 답이 나오기 위해 $g(x)$는 하나로 정해져야 한다. 1에서는 항등식에 최고차항만을 대입했지만, **$g(x)$의 전체 식을 항등식에 대입**하자.

$g(x)=x+1$이라면 $g(g(x))=x$에 대입했을 때 $x+2\neq 2$가 되어 모든 실수 x에 대해 성립하지 않는다.
$\therefore$ $g(x)=-x+1$

답은 ⑤!!

※잘못된 풀이법

$g(g(x))=x$의 양변에 $g^{-1}(x)$를 합성하면 $g(x)=g^{-1}(x)$이다.
다항함수 중 원함수와 역함수가 같은 함수는 $y=x$, $y=-x+k$ 두 가지밖에 없다.
$g(0)=1$이므로 $g(x)=-x+1$

이런 식으로 풀었다면 잘못된 풀이이다. $g(g(x))=x$에서 양변에 $g^{-1}(x)$를 합성할 수 없기 때문이다.

$y=g^{-1}(x)$를 합성하려면 $y=g^{-1}(x)$의 존재성부터 확인해야 하고, 역함수가 존재하기 위해서는 원함수가 일대일대응이어야 한다. 그러나 $g(x)$가 다항식이고, $g(g(x))=x$라는 것만 가지고는 $g(x)$**가 일대일대응임을 알 수 없다.** 결과론적으로 $g(x)$는 일대일대응이 맞긴 하지만 이는 절대 논리적인 풀이로 보기 힘들다.

한편, 이 문제를 '방정식 $f(f(x))=x$의 실근은 $y=f(x)$와 $y=f(x)$를 $y=x$에 대해 대칭시킨 그래프의 교점의 x좌표와 같다.'를 이용하여 풀 수는 있다. 모든 x에 대하여 $f(f(x))=x$이므로 $y=f(x)$는 $y=x$에 대해 대칭인 함수이다.– 〈Chapter 8. 합성함수와 역함수〉

예제(18) 13학년도 9월 평가원 18번

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x) = \int \{x^2 + f(x)\}dx,\ f(x)g(x) = -2x^4 + 8x^3$$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1. **먼저, $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$를 관찰하자.**

$x^2+f(x)$는 다항함수이므로 이를 부정적분한 $g(x)$도 다항함수이다. $g(x)$가 다항함수임을 따지는 건 지극히 당연하고 필연적인 절차이다.

그렇다면 자연스레 $g(x)$의 차수와 최고차항의 계수가 궁금해진다.
'이차함수+이차함수'인 $x^2+f(x)$은 일반적으로 이차함수일 것이고, 이를 부정적분한 $g(x)$는 한 차수 높은 삼차함수로 생각할 수 있다.

하지만 $f(x)$의 최고차항이 $-x^2$이라면 $g(x)$의 차수는 2 이하일 수도 있으므로 이 가능성도 의식해야 한다. 이 생각을 하지 못했더라도 괜찮다. **평가원도 너무 예외적인 케이스는 학생들이 스스로 생각하기 어렵다는 점을 명확히 인지하고 있다.** 평가원이 이 점을 문제 속에서 어떻게 녹여내는지 보자.

2. **만약 $g(x)$가 삼차함수라면 $f(x)g(x)$는 5차함수가 되어서 조건을 위배한다.**

평가원이 대단한 이유가 여기서 나온다. 일반적으로 생각해봤을 때 추론할 수 있는 '$g(x)$가 삼차함수라는 결론'은 조건을 위배하도록 설계하여 학생 스스로 예외적인 케이스를 떠올리게끔 유도한다.

따라서 $g(x)$는 이차함수가 되어야 하고, $f(x)$의 최고차항은 $-x^2$으로 결정된다.

3. **$f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$을 이용하자.**

인수분해를 해주면 $-2x^4+8x^3=-2x^3(x-4)$
x에 관한 인수는 $x,\ x,\ x,\ (x-4)$ 4개가 존재한다.

$f(x),\ g(x)$는 모두 이차함수이므로 4개의 인수를 2개씩 분배해주면 된다. 하나는 x^2을 갖고, 다른 하나는 $x(x-4)$를 가지면 되므로 분배할 수 있는 2가지 케이스가 존재한다.

① $f(x)=-x^2,\ g(x)=2x(x-4)$인 경우
$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$이므로 $g(x)$는 상수함수가 되어서 모순이 발생한다.

② $f(x)=-x(x-4),\ g(x)=2x^2$인 경우
$g(x)=\int\{x^2+f(x))\}dx$를 만족한다. **따라서 $g(1)=2$이므로 답은 ②!!**

예제(19) 20학년도 수능 14번

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

1. **조건을 보자마자 〈Chapter 2. 극한값 계산과 미분계수〉에서 배운 내용을 떠올려야 한다.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=2$$

0이 아닌 극한값이 존재하므로 분모와 분자의 차수는 동일하고 **극한값 2는 $f(x)g(x)$의 최고차항 계수**를 의미한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$$

0이 아닌 극한값이 존재하므로 분모와 분자의 최저차항의 차수는 서로 같고 **-4는 $f(x)g(x)$의 최저차항 계수**를 의미한다.

$\therefore\ f(x)g(x)=2x^3-4x^2$

2. **인수분해를 해주면** $f(x)g(x)=2x^2(x-2)$

x에 관한 인수는 x, x, $(x-2)$로 3개 존재한다.

이전 문항에서 했던 대로 인수를 $f(x)$와 $g(x)$에 분배하면 되는데 차이점이 존재한다.
이전 문항에서는 $f(x)$와 $g(x)$ 각각의 차수와 최고차항의 계수를 알 수 있었고 $f(x)$와 $g(x)$는 $g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$의 관계로 연결되어 있었지만,

여기서는 $f(x)$, $g(x)$의 차수와 최고차항 계수를 알 수도 없고 $f(x)$와 $g(x)$의 관계도 알 수 없다. 이런 상황에서 $f(2)$의 최댓값을 구하기 위해서는 CASE를 분류할 수밖에 없다.

3. CASE분류

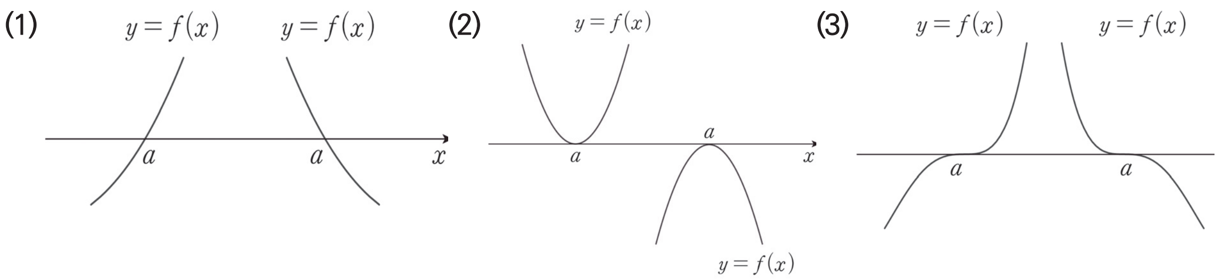
$f(x)g(x)=2x^2(x-2)$이고 $f(x)$, $g(x)$의 상수항과 계수는 모두 정수이다.
하나의 함수의 최고차항 계수의 절댓값이 1 또는 2가 아니라면 다른 함수의 최고차항 계수는 정수가 될 수 없으므로 $f(x)$의 최고차항 계수는 -1, 1, -2, 2 네 개 중 하나이다.

가장 먼저 인수 $(x-2)$을 고려하자. **만약 $f(2)$가 아닌 다른 함숫값을 물었다면 CASE분류는 꽤 복잡해졌을 것이다. 그러나 평가원도 이를 고려하여 $f(2)$를 발문으로 제시하여 인수 $(x-2)$는 제외하도록 설계했다.** $f(x)$의 인수에 $(x-2)$가 포함되어 버리면 $f(2)=0$이 되기 때문이다.

따라서 $f(2)$가 최대가 되려면 남은 두 개의 인수 x, x를 모두 포함하고 최고차항의 계수는 2가 되어야 한다.
$f(x)=2x^2$이므로 $f(2)=8$이다.

답은 ③!!

2. 다항방정식의 근의 중복도에 따른 x축 통과 양상 비교



다항함수 $f(x)$와 실수 a에 대해,

(1) 방정식 $f(x)=0$이 a를 중근이 아닌 실근으로 가지면
$|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.
$y=f(x)$의 그래프는 $x=a$에서 x축에 접하지 않고 지나간다.

(2) 방정식 $f(x)=0$이 a를 n중근으로 가지면 (단, $n=2p$이고 p는 자연수)
$|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.
$y=f(x)$의 그래프는 $x=a$에서 x축에 접한다.

(3) 방정식 $f(x)=0$이 a를 m중근으로 가지면 (단, $m=2q+1$이고 q는 자연수)
$|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.
$y=f(x)$의 그래프는 $x=a$에서 x축에 뚫으면서 접한다.

※ 각각의 경우 $x=a$ 부근에서 $f(x)$의 그래프가 왼쪽 그림과 같을지, 오른쪽 그림과 같을지는 $f(x)$의 그래프의 전체 개형을 통해 파악해야 한다.

예제(20) 16학년도 6월 평가원 21번

자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

(가) $f(n)=0$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x) \geq 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1. (가) $f(n)=0$

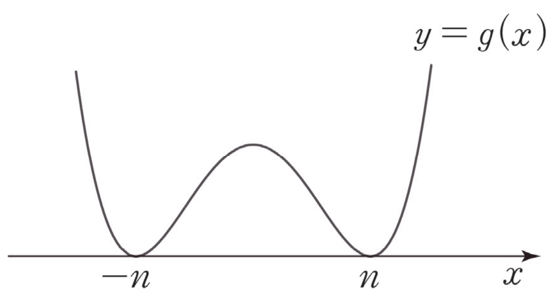
(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이다.

$(x+n)f(x)=g(x)$라 하면 $f(x)$는 최고차항으 계수가 1인 삼차함수이므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.
이때, $g(n)=g(-n)=0$이므로 $g(x)$의 그래프는 $x=-n$과 $x=n$에서 x축과 만난다.

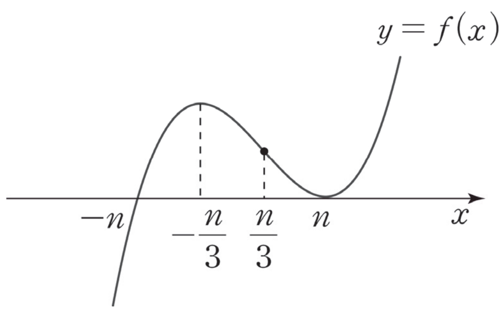
만약 방정식 $g(x)=0$이 $-n$을 p중근($p=2r$, r는 자연수)으로 갖지 않는다면 $g(x)$는 $x=-n$에서 x축을 뚫고 지나가므로 조건을 위배한다. 따라서 **방정식 $g(x)=0$은 $-n$을 p중근($p=2r$, r는 자연수)으로 갖는다.**

마찬가지로 방정식 $g(x)=0$이 n을 q중근($q=2s$, s는 자연수)으로 갖지 않는다면 $g(x)$는 $x=n$에서 x축을 뚫고 지나가므로 조건을 위배한다. 따라서 **방정식 $g(x)=0$은 n을 q중근($q=2s$, s는 자연수)으로 갖는다.**

$g(x)=0$은 사차방정식이므로 $p=q=2$이고 인수정리에 의해 $g(x)$는 $(x+n)^2$과 $(x-n)^2$을 인수로 갖는다. $\therefore\ g(x)=(x+n)^2(x-n)^2$



2. $g(x)=(x+n)f(x)=(x+n)^2(x-n)^2$**이므로** $f(x)=(x+n)(x-n)^2$**이다. 삼차함수 비율에 따라** $f(x)$**는** $x=-\dfrac{n}{3}$**에서 극댓값을 가진다.**



$a_n=f\left(-\dfrac{n}{3}\right)=\dfrac{2n}{3}\times\left(-\dfrac{4n}{3}\right)^2=\dfrac{2^5}{3^3}n^3$이므로 a_n이 자연수가 되기 위해 n은 3의 배수여야 한다.
따라서 n의 최솟값은 3이다.

답은 ③!!

※ 놓치기 쉬운 부등식 처리 도구 : 부등식의 양변을 '변수'로 나누기

0이 아닌 상수 a에 대해, x에 관한 부등식 $ax^3+ax^2+ax\geq 0$의 양변을 a로 나누는 것을 자연스레 받아들이는 것처럼 양변을 변수 x로도 나눌 수 있다. **그러나 x의 범위를 주의해야 한다.**

① $x>0$일 때

$ax^3+ax^2+ax\geq 0$

$\Leftrightarrow ax^2+ax+a\geq 0$

양변을 '양수'로 나눴기 때문에 부등호 방향에 변화가 없다.

② $x<0$일 때

$ax^3+ax^2+ax\geq 0$

$\Leftrightarrow ax^2+ax+a\leq 0$

양변을 '음수'로 나눴기 때문에 부등호 방향을 바꿔줘야 한다.

단, $x=0$일 때는 부등식의 양변을 x로 나눌 수 없으므로 부등식에 $x=0$을 대입하여 직접 $x=0$이 부등식의 해에 포함되는지 확인해야 한다. $ax^3+ax^2+ax\geq 0$의 경우 $x=0$은 부등식의 해에 속한다.

이 문제를 위의 도구를 적용하여 풀 수도 있다.

(가) $f(n)=0$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이다.

(나)에서 부등식의 양변을 $(x+n)$으로 나눠보자. 단, $x+n>0$, $x+n<0$, $x+n=0$일 때로 CASE를 나눠야 한다.

(1) $x+n>0$일 때

부등식의 양변을 '양수'로 나누게 되므로 부등호 방향은 변하지 않는다. 즉, $x>-n$인 모든 실수 x에 대해 $f(x)\geq 0$이다.

(2) $x+n<0$일 때

부등식의 양변을 '음수'로 나누게 되므로 부등호 방향은 변한다. 즉, $x<-n$인 모든 실수 x에 대해 $f(x)\leq 0$이다.

(3) $x+n=0$일 때

$0\geq 0$이므로 성립한다. (애초에 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이므로 성립할 수밖에...)

(1)~(3)을 종합하면, **$x>-n$에서 $f(x)\geq 0$, $x<-n$에서 $f(x)\leq 0$이다. 그리고 (가)에서 $f(n)=0$**이므로 이를 모두 만족하려면 **$f(x)$의 그래프는 $x=-n$에서 x축을 지나고 $x=n$에서 x축에 접해야 한다.**

예제(21) 16학년도 수능 21번

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은? [4점]

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌 구간 $[3, 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ $\dfrac{2}{15}$ ④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

1. (가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌 구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(가) → 방정식 $f(x)=0$은 -1을 하나의 실근으로 가진다.
(나) → 닫힌 구간 $[3,\ 5]$에 존재하는 a에 대해 $f(a)=0$이다.

이때, 만약 방정식 $f(x)=0$이 a를 중근이 아닌 실근으로 갖는다면 함수 $|f(x)|$는 $x=a$에서 뾰족점이 되어 미분가능하지 않게 된다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 a를 중근으로 가진다.

※ 방정식 $f(x)=0$이 a를 1보다 큰 홀수 개의 중근으로 가져도 $|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다. $f'(a)=0$이기 때문이다.

$f(x)$는 삼차함수이므로 $f(x)=k(x+1)(x-a)^2$ (단, $k \neq 0$, $3<a<5$)

$f(x)$의 최고차항의 계수는 알 수 없으므로 미지수 k로 설정해야 함에 주의하자.

2. $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값 M, 최솟값 m

$f(x)=k(x+1)(x-a)^2$
$f'(x)=k(x-a)^2+k(x+1)(2x-2a)$

$f(0)=ka^2$
$f'(0)=ka^2-2ak$

$\dfrac{f'(0)}{f(0)}=\dfrac{ka^2-2ak}{ka^2}=1-\dfrac{2}{a}$

$3 \leq a \leq 5$이므로 $M=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$, $m=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ Mm=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$

답은 ⑤!!

예제(22) 21학년도 수능 30번

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,
$h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

1. 절댓값 안의 함수를 새로운 함수로 작성하자. 차이함수 $p(x)=f(x)-g(x)$라 하자.

$|p(0)|=0$이고, $|p(x)|$는 $x=0$에서 미분가능해야 하므로 $p'(0)=f'(0)-g'(0)=0$ 이다.

$p(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $p(x)=x^2(x-a)$라 하자.

$h(2)=f(2)+g(2)=p(2)+2g(2)=4\times(2-a)+2g(2)=5$이므로 $g(2)=2a-\dfrac{3}{2}$이다.

2. 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $p(1)\geq 0$일 때와 $p(1)<0$일 때로 CASE를 분류하자.

(1) $p(1)\geq 0$

$|p(1)|=p(1)=f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$에서 $g(1)=0$이다.

$p'(1)=f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$이므로 $g'(1)=0$ 이다.

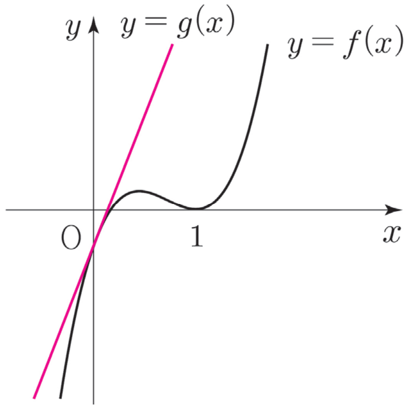
이것은 함수 $g(x)$가 일차함수라는 조건에 모순이다.

(2) $p(1)<0$

$|p(1)|=-p(1)=g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$에서 $f(1)=0$이다.

$-p'(1)=g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1)$이므로 $f'(1)=0$이다.

따라서 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$의 그래프 개형은 다음과 같이 그려진다.



3. 1에서 $g(2)=2a-\dfrac{3}{2}$을, 2-(2)에서 $-p(1)=g(1)$, $-p'(1)=g'(1)$을 알아냈다.

$g(x)$는 일차함수이므로 미분계수 = 평균변화율, 즉 $g'(1)=\dfrac{g(2)-g(1)}{2-1}$을 이용하자.

$-p(1)=g(1)$에서 $g(1)=a-1$, $-p'(1)=g'(1)$에서 $g'(1)=2a-3$이고

$g'(1)=\dfrac{g(2)-g(1)}{2-1}$에서 $2a-3=\left(2a-\dfrac{3}{2}\right)-(a-1)=a-\dfrac{1}{2}$이므로 $a=\dfrac{5}{2}$이다.

$p(x)=x^2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$, $g(x)=g'(1)(x-1)+g(1)=(2a-3)(x-1)+(a-1)=2(x-1)+\dfrac{3}{2}$이므로

$h(4)=f(4)+g(4)=p(4)+2g(4)=16\times\dfrac{3}{2}+2\times\left(6+\dfrac{3}{2}\right)=24+12+3=39$ 이다.

답은 39!!

※ 다른 풀이

1. **함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서 미분가능하다.**
$f(1)-g(1)\geq 0$일 때와 $f(1)-g(1)<0$일 때로 CASE를 분류하자.

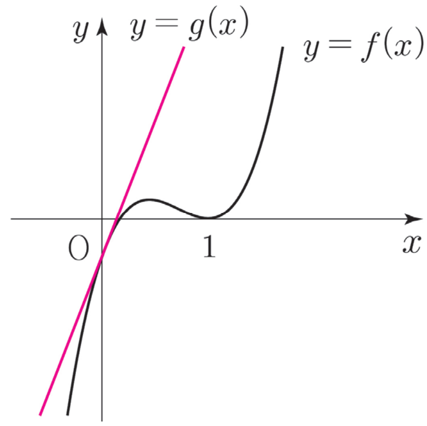
(1) $f(1)-g(1)\geq 0$: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$이다.
$f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$에서 $g(1)=0$이다.
$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$이므로 $g'(1)=0$ 이다.
이것은 함수 $g(x)$가 일차함수라는 조건에 모순이다.

(2) $f(1)-g(1)<0$: $|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)$이다.
$g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$에서 $f(1)=0$이다.
$g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1)$이므로 $f'(1)=0$이다.

함수 $f(x)=(x-1)^2(x-a)$ (a는 상수)라 하자.

2. **함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하다.**
$h(0)=|f(0)-g(0)|=0$**에서 함수 $|f(x)-g(x)|$가 $x=0$에서 미분가능하려면**
$x=0$에서의 미분계수 또한 0이어야 한다.
따라서 $h'(0)=0$이므로 $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$이므로 $f(0)=-a$, $f'(0)=1+2a$에서
$g(x)=(1+2a)x-a$이다.

함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$의 그래프 개형은 다음과 같이 그려진다.



3. $h(2)=f(2)+g(2)=(2-a)+(3a+2)=2a+4=5$에서 $a=\dfrac{1}{2}$이므로

$f(x)=(x-1)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, $g(x)=2x-\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $h(4)=f(4)+g(4)=9\times\left(4-\dfrac{1}{2}\right)+\left(8-\dfrac{1}{2}\right)=36-\dfrac{9}{2}+8-\dfrac{1}{2}=44-5=39$이다.

답은 39!!

comment

포인트는 두 가지이다.

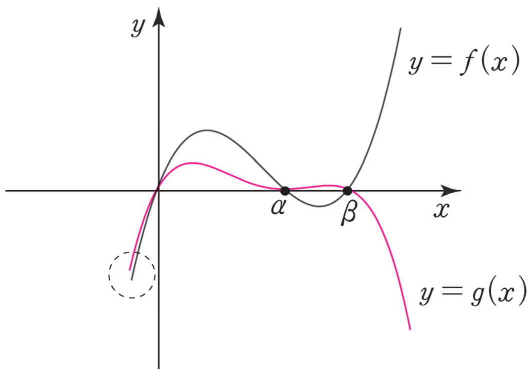
1. $f(x)-g(x)=p(x)$라 할 때, $h(x)=|p(x)|\ (x<1)$이다.
이때, $p(0)=0$이고 $y=|p(x)|$는 $x=0$에서 미분가능해야 하므로 $p'(0)=0$이다.

2. $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 연속이다. 따라서 $\lim_{x\to 1-}h(x)=\lim_{x\to 1+}h(x)$을 만족해야 한다.
이때, $x<1$에서 $h(x)=|p(x)|$이므로 $p(1)\geq 0$일 때와 $p(1)<0$일 때로 CASE를 분류해야 한다.

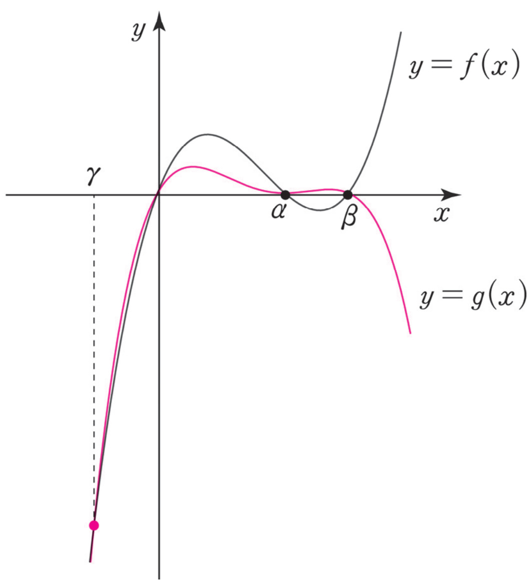
3. 다항함수 차수와 기울기의 관계

두 다항함수의 그래프의 일부분만 볼 때는 절대로 추월할 수 없을 것 같이 보여도
차수가 높은 다항함수의 그래프가 차수가 낮은 다항함수의 그래프를 추월하는 순간이 반드시 존재한다.
x가 충분히 크거나 충분히 작은 순간에 다항함수의 차수가 높을수록 함숫값의 증가 또는 감소속도가 크기 때문이다.

예를 들어,
그림과 같은 삼차함수 $y=f(x)$와 사차함수 $y=g(x)$에 대해



$y=g(x)$가 $y=f(x)$를 추월하는 순간이 존재한다.



◆ 함수의 대칭성

◆ 1. 대칭의 핵심, 테크닉, 주의점

(1) 대칭의 핵심 개념 : 대칭은 곧 평균이다. 만약 두 함수가 어떤 직선에 대하여 대칭이면, 두 함수의 평균은 직선이다. 만약 두 함수가 어떤 점에 대하여 대칭이면, 두 함수의 평균은 점이다. **따라서 모든 대칭성 공식은 평균을 나타내는 식인 $\dfrac{a+b}{2}=c$와 연결된다.**

(2) 대칭이동의 핵심 테크닉 : 대신 대입

함수의 그래프를 $x=a$에 대해 대칭 시키려면 x 대신 $2a-x$를 대입하자. $\dfrac{x+(2a-x)}{2}=a$

함수의 그래프를 $y=a$에 대해 대칭 시키려면 y 대신 $2a-y$를 대입하자. $\dfrac{y+(2a-y)}{2}=a$

함수의 그래프를 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭 시키려면 x 대신 $2a-x$를 대입하고, y 대신 $2a-y$를 대입하자.
이 또한 평균과 연결지으면 쉽게 이해할 수 있다.

(3) 대칭에서 주의해야 할 포인트 : 대칭성에 관한 문제를 본다면 다음의 두 가지를 잘 구분하자.

(i) 함수 $y=f(x)$의 그래프 자체가 직선 $x=a$에 대하여 대칭인가?
(ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 또 다른 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=a$에 대하여 대칭인가?

예를 들어,
(i) 이차함수 $y=a(x-b)^2+c$ $(a,\ b,\ c$는 실수)는 그래프 자체가 직선 $x=b$에 대하여 대칭이다.
(ii) 함수 $y=2^x$의 그래프와 함수 $y=2^{-x}$의 그래프는 y축($x=0$)에 대하여 대칭이다.

대칭의 핵심 개념, 테크닉, 주의점을 머리에 각인했다면 본격적으로 대칭성 공식을 알아보자.

단, 지금부터 효율적 표현과 빠른 이해를 위해 **'그래프, 직선, 함수 표현'은 가급적 생략하겠다.** 예를 들어, '함수 $f(x)$의 그래프가 $x=a$에 대해 대칭이다'를 '$f(x)$가 $x=a$에 대해 대칭이다.'로 표현하겠다.

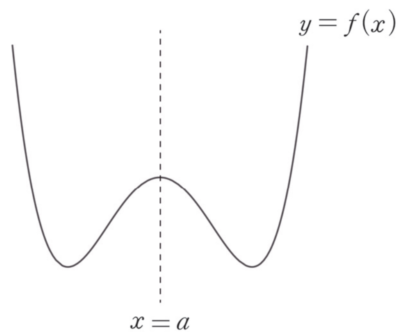
◆ 2. $x=a$ 대칭

① **형성** : $f(x)$를 $x=a$에 대해 대칭 시키면 $f(2a-x)$이다.
즉, $f(x)$에 x 대신 $2a-x$를 대입하면 $f(x)$를 $x=a$에 대해 대칭 시킬 수 있다.

② $x=a$**에 대해 대칭인 함수 :** 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2a-x)$이면, 즉 $f(x)$가 $f(x)$를 $x=a$에 대해 대칭 시킨 $f(2a-x)$와 같다면 $f(x)$는 $x=a$에 대해 대칭이다.

단, 두 함수가 $x=a$에 대칭임을 알려주는 항등식이 항상 저러한 형태로 제시되지는 않는다. 예를 들어, x에 관한 항등식 $f(x)=f(2a-x)$에 x 대신 $a+x$를 대입하면 $f(a+x)=f(a-x)$가 되는데, $f(a+x)=f(a-x)$도 많이 등장한다. **'공식의 형태'를 외우려고 하지 말자.**

따라서 대칭의 핵심 개념인 **'평균'을 기억**해야 한다. $f(x)=f(2a-x)$에서 괄호 속 문자의 평균을 구해보면 $\dfrac{x+(2a-x)}{2}=a$이다. 또한 $f(a+x)=f(a-x)$에서 괄호 속 문자의 평균을 구해보면 마찬가지로 $\dfrac{(a+x)+(a-x)}{2}=a$이다. 평균을 기억하자!



③ $x=a$**에 대해 대칭인 두 함수** : 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=g(2a-x)$이면, 즉 $f(x)$가 $g(x)$를 $x=a$에 대해 대칭 시킨 $g(2a-x)$와 같다면, $f(x)$와 $g(x)$는 $x=a$에 대해 대칭이다.

②는 하나의 함수 자체가 $x=a$에 대해 대칭인 경우이고, ③은 두 함수가 $x=a$에 대해 대칭인 경우이다. **②가 압도적으로 많이 등장하지만 둘을 헷갈리지 않기 위해 ②와 ③의 차이점도 정확히 알아둬야 한다.**

※ $x=a$ **대칭과 절댓값 함수**

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge a) \\ f(2a-x) & (x < a) \end{cases}$ (혹은 절댓값을 이용하여 $f(|x-a|+a)$로 표현 가능)

일 때, $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프에서 $x \ge a$인 부분은 그대로 두고, $x < a$인 부분은 $x \ge a$인 부분을 $x=a$에 대하여 대칭 시킨 개형이 된다. 즉, $g(x)$는 $x=a$에 대해 대칭인 함수다.

3. $y=a$ 대칭

① **형성 :** $f(x)$를 직선 $y=a$에 대해 대칭 시키면 $2a-f(x)$이다. 즉, $y=f(x)$에 대해 y 대신 $2a-y$를 대입하면 $2a-y=f(x)$, $y=2a-f(x)$가 되어 $y=f(x)$를 $y=a$에 대해 대칭 시킬 수 있다. 평균 공식을 적용해 보면 $\dfrac{f(x)+\{2a-f(x)\}}{2}=a$이다.

② **$y=a$에 대해 대칭인 함수 :** 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=2a-f(x)$이면, 즉 $f(x)$가 $f(x)$를 $y=a$에 대해 대칭 시킨 $2a-f(x)$와 같다면 $f(x)$는 $y=a$에 대해 대칭이다. 단, 이 경우 $f(x)$는 $f(x)=a$인 상수함수이므로 문제에 거의 등장하지 않는다.

※ **$y=a$ 대칭과 절댓값 함수**

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq k) \\ 2k-f(x) & (f(x)<k) \end{cases}$ (혹은 절댓값을 이용하여 $|f(x)-k|+k$로 표현 가능)

에서 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프에서 $y=k$의 윗부분은 그대로 두고, $y=k$의 아랫부분은 $y=k$에 대해 대칭 시킨(접어 올린) 개형이 된다. 기출에서 상당히 많이 등장한 함수이다.

◆ 4. 점 $(a,\ b)$ 대칭

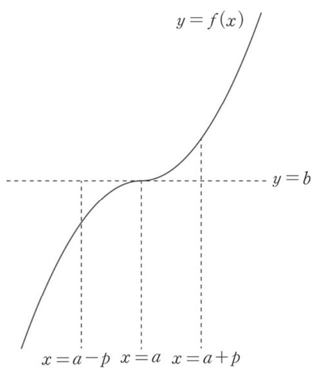
① **형성 :** $f(x)$를 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭 시키면 $2b-f(2a-x)$이다. $y=f(x)$에 x 대신 $2a-x$를 대입하고, y 대신 $2b-y$를 대입하면 $2b-y=f(2a-x)$, $y=2b-f(2a-x)$가 되어 $y=f(x)$를 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭 시킬 수 있다.

※ x 대신 $2a-x$를 대입하는 것은 그래프를 $x=a$에 대칭하는 것이고, y 대신 $2b-y$를 대입하는 것은 그래프를 $y=b$에 대칭하는 것이다. 즉, $x=a$과 $y=b$ 모두에 대해 한 번씩 대칭 이동시키면 이동 전의 그래프와 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭인 관계가 된다.

② **점 $(a,\ b)$에 대해 대칭인 함수** : 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=2b-f(2a-x)$이면, 즉 $f(x)$가 $f(x)$를 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭 시킨 $2b-f(2a-x)$와 같다면, $f(x)$는 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭이다.

단, 함수가 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭임을 알려주는 항등식이 항상 저러한 형태로 제시되지는 않는다.
예를 들어, x에 관한 항등식 $f(x)+f(2a-x)=2b$에 x 대신 $a+x$를 대입하면
$f(a+x)+f(a-x)=2b$가 되는데 이 형태도 다소 등장한다. **'공식의 형태'를 외우려고 하지 말자.**

대칭의 핵심 개념인 '평균'을 기억하자. $f(x)+f(2a-x)=2b$에서 괄호 속 문자의 평균을 구해보면
$\dfrac{x+(2a-x)}{2}=a$이고 $f(a+x)+f(a-x)=2b$에서 괄호 속 문자의 평균을 구해보면
$\dfrac{(a+x)+(a-x)}{2}=a$이다. 그래프를 곁들여 이해하면 더할 나위 없다.



※ 〈$y=a$ 대칭〉과 〈점 $(a,\ b)$ 대칭〉에는 ③ **대칭인 두 함수** 항목을 넣지 않았지만, 항등식에 있는 하나의 f에 대해 f 대신 g만 대입하면 끝이다. $f(x)=2a-g(x)$이면 $f(x)$와 $g(x)$는 $y=a$에 대해 대칭이고, $f(x)+g(2a-x)=2b$이면 $f(x)$와 $g(x)$는 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭이다. 이 두 경우는 문제에서 거의 등장하지 않지만 언제 나올지 모르니 알아두자.

comment

문제에서 대칭성과 관련된 등식을 보면 대칭성을 바로 파악할 수 있도록 연습해 두자. 대칭성 파트는 아무리 개념을 빠삭하게 알고 있어도 실전에서 빠르게 파악하지 못하는 경우가 많다. 위의 조건들을 자유자재로 말로 표현하고, 수식으로 나타내고, 그래프로 표현할 수 있어야 한다.

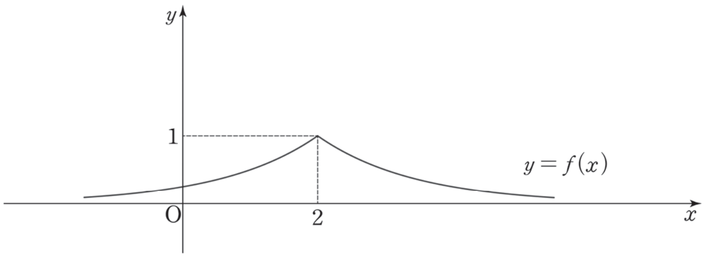
예제(23) 19년 9월 교육청 고2 가형 30번

실수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases}2^{x-2} & (x<2)\\ 2^{-x+2} & (x\geq 2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-k|+k$라 하자.
직선 $y=2k$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(k)$라 할 때,
$\displaystyle\lim_{k\to\frac{1}{4}-}\left\{h(k)h\left(k+\frac{1}{4}\right)\right\}$의 값을 구하시오. [4점]

1. 우선 함수 $f(x)$에 대해 알아보자. $-x+2=-(x-4)-2$이므로 함수 $y=2^{-x+2}$의 그래프는 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



혹은 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프를 x축 방향으로 -4만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것이 함수 $y=2^{-x+2}$의 그래프와 같다고 해석해도 좋다. 결과는 같다.

※ 대칭성

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(2-x)=g(2+x)$이면 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. $y=2^{x-2}$와 $y=2^{-x+2}$에도 이 내용을 적용해 보면, $2^{(2-x)-2}=2^{-(2+x)+2}$, $2^{-x}=2^{-x}$ (혹은 $f(4-x)=g(x)$를 확인해도 좋다.)

$y=2^{x-2}$와 $y=2^{-x+2}$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

$2^{(2-x)-2}=2^{-(2+x)+2}$를 확인하여 $f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭임을 파악하지 못했더라도, '곡선 $y=2^{-x+2}$를 y축에 대해 대칭 시킨 후 평행이동한 것이 곡선 $y=2^{-x+2}$이므로 두 곡선이 $x=2$에 대해 대칭인 것은 바로 파악했어야 한다.

2. 다음으로 함수 $g(x)$를 알아보자. 절댓값 안이 0이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나눠 절댓값을 제거하자.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq k) \\ -f(x)+2k & (f(x)<k) \end{cases}$$

$\dfrac{f(x)+\{-f(x)+2k\}}{2}=k$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x)+2k$의 그래프는 직선 $y=k$에 대하여 대칭이다. 본문을 제대로 공부했다면 두 함수의 대칭성을 쉽게 파악해야 한다.

따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프에서 직선 $y=k$의 윗부분은 그대로 두고, 직선 $y=k$의 아랫부분을 직선 $y=k$에 대하여 대칭 시킨(접어 올린) 것이다.

3. $h(k)$는 직선 $y=2k$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수인데, 직선 $y=k$의 위치, 즉 k의 값에 따라 직선 $y=2k$와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 위치 관계가 변한다. **k의 값을 기준으로 CASE를 분류하자.**

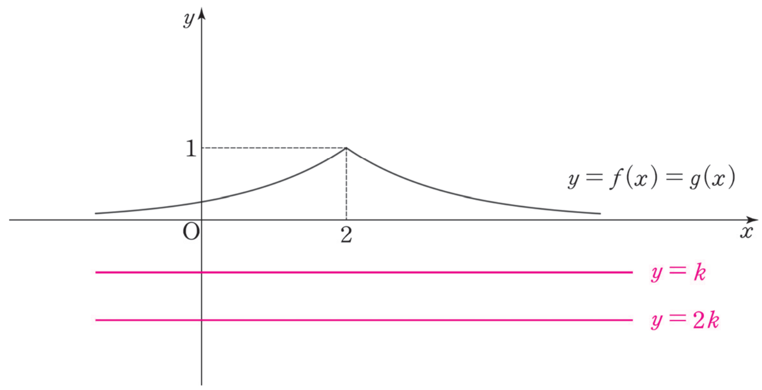
교점을 따지는 데에 있어서 한 가지 센스를 말하자면, $g(x)=-f(x)+2k$ $(f(x)<k)$**의 그래프와 직선 $y=2k$는 절대로 만나지 않는다.** 방정식 $-f(x)+2k=2k$를 따져 보면 $f(x)=0$이 되는데, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이기 때문이다. (케이스를 분류하기 전에 이 점을 먼저 파악하는 것이 다소 발상적일 수 있으니 참고만 하자.)

(i) $k\le 0$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>k$이므로 $g(x)=f(x)$이고,

$2k\le 0<g(x)$이므로 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=2k$의 교점도 존재하지 않는다.

$\therefore\ h(k)=0$



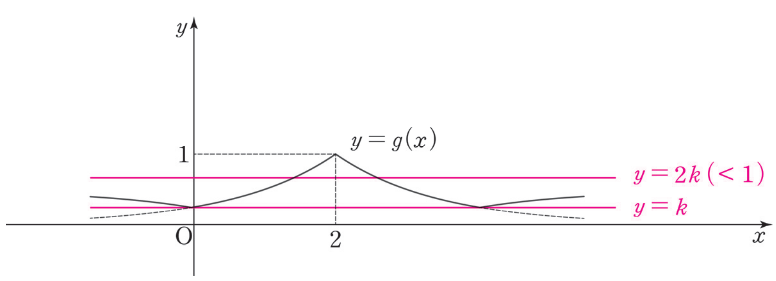
(ii) $0<k<\dfrac{1}{2}$

다음과 같은 의문이 들 수 있다.

Q) $k=\dfrac{1}{2}$이 구간의 경계가 되는 이유가 무엇인가요?

A) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 최댓값은 1이다. 따라서 $g(x)=f(x)$ $(f(x)\ge k)$에서 직선 $y=2k$와 $y=f(x)$의 그래프의 교점이 형성될 수 있는 마지노선은 $1=2k$, $k=\dfrac{1}{2}$일 때이다.

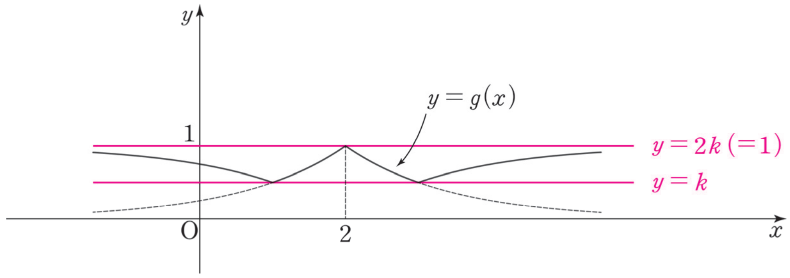
본론으로 돌아와서, $h(k)$를 따지자.



직선 $y=2k$와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. $\therefore\ h(k)=2$

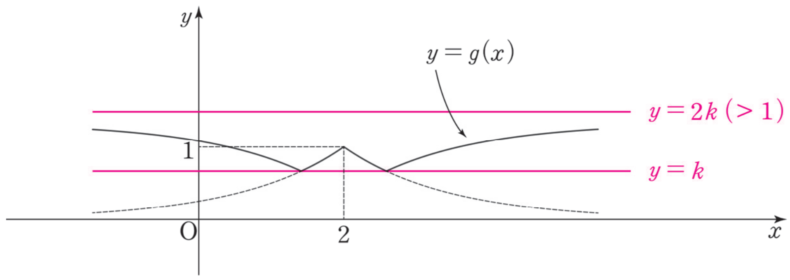
(iii) $k=\frac{1}{2}$

(ii)에서 살펴본 의문의 답변으로 $k=\frac{1}{2}$를 살펴보는 이유도 파악할 수 있을 것이다.

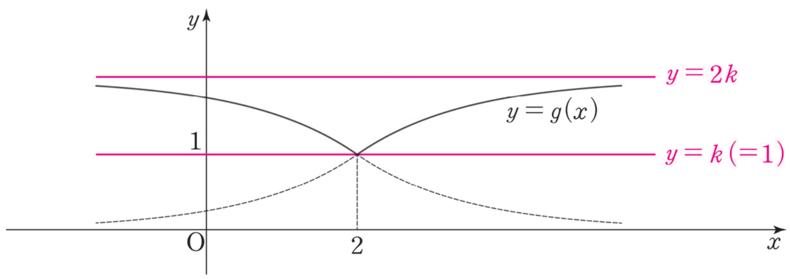


직선 $y=2k$와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 한 점에서 만난다. $\therefore\ h(k)=1$

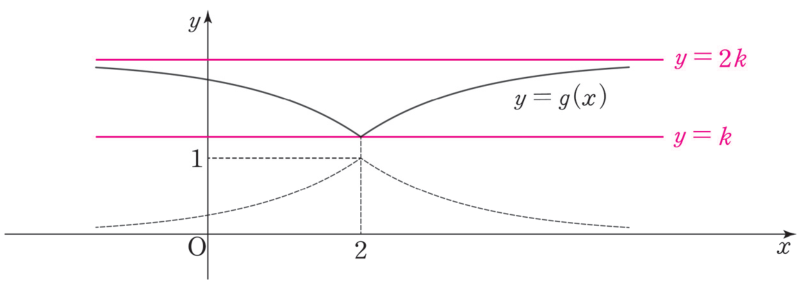
(iv) $\frac{1}{2}<k<1$



(v) $k=1$



(vi) $k>1$

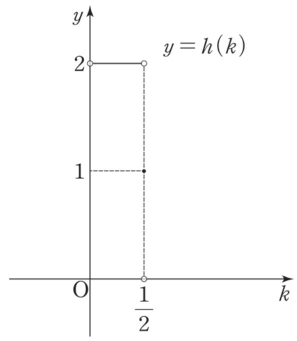


$k>\frac{1}{2}$인 모든 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 존재하지 않는다.

$\therefore\ h(k)=0$

(i)~(vi)를 종합하면 함수 $h(k)$의 식과 그래프는 다음과 같다.

$$h(k)=\begin{cases}0 & (k\le 0)\\ 2 & \left(0<k<\frac{1}{2}\right)\\ 1 & \left(k=\frac{1}{2}\right)\\ 0 & \left(k>\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$



4. $\lim_{k\to\frac{1}{4}-}\left\{h(k)h\left(k+\frac{1}{4}\right)\right\}=h\left(\frac{1}{4}-\right)h\left(\frac{1}{2}-\right)=2\times2=4$

답은 4!!

comment

대칭성과 CASE 분류가 중요한 문항이다. 집중력이 약할수록 이런 문항에 취약하므로 집중력 있게 푸는 연습이 필요하다.

예제(24) 21학년도 9월 평가원 30번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

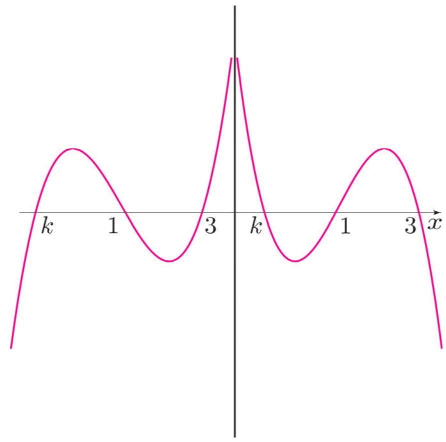
(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=\lvert f(x)f(a-x)\rvert$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

1. 조건 (가)에서 $f(1) = f(3) = 0$ 이므로 **롤의 정리에 의하여** $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = f'(c) = 0$ **인** c **가 열린구간** $(1, 3)$**에 반드시 존재한다.** 조건 (나)에 의하여 열린구간 $(1, 3)$에서 $f'(c) = 0$을 만족시키는 c는 유일함을 알 수 있다.

2. 방정식 $f(x) = 0$의 다른 실근을 k라 하면 $f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같이 그려진다.

(최고차항 계수 > 0 | 최고차항 계수 < 0)



함수 $g(x) = |f(x)f(a-x)|$ 에서
방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 세 실근을 크기 순서대로 나열하면 3, 1, k이고,
방정식 $f(a-x) = 0$의 서로 다른 세 실근을 크기 순서대로 나열하면 $a-k$, $a-1$, $a-3$ 이다.

함수 $g(x)$**가 모든 실수** x**에 대하여 미분가능하려면 모든 근에서 중근을 가져야 한다.**
따라서 방정식 $f(x) = 0$**의 세 실근과 방정식** $f(a-x) = 0$**의 세 실근이 일치해야 한다.**
$a-k = 3$, $a-1 = 1$, $a-3 = k$에서 $a = 2$, $k = -1$ 이다.

대칭으로 이해해도 좋다. $f(x) = 0$의 실근과 $f(x)$를 $x = \dfrac{a}{2}$에 대해 대칭시킨 함수 $f(a-x)$에 대하여 $f(a-x) = 0$의 실근이 서로 일치하려면 $\dfrac{a}{2} = 1$이어야 하고, $k, 1, 3$은 이 순서대로 등차수열을 이뤄야 한다.

3. 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 p라 하자. $f(x) = p(x+1)(x-1)(x-3)$ 이고, $g(x) = \{f(x)\}^2$ 이므로

$$\frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)} = \frac{\{f(8)\}^2}{f(0)\times f(8)} = \frac{f(8)}{f(0)} = \frac{9\times 7\times 5\times p}{1\times(-1)\times(-3)\times p} = 105 \text{ 이다.}$$

답은 105!!

comment

롤의 정리를 떠올리지 못했다면 CASE 분류를 하면 된다. $f(x) = 0$의 실근의 개수가 2일 때와 3일 때를 비교하면 실근의 개수가 3임을 알 수 있고, $f(x) = 0$의 한 실근과 $1, 3$의 대소관계를 비교하면 $y = f(x)$의 그래프를 추론할 수 있다. 또한 묻는 것이 분수 꼴이므로 $f(x)$의 최고차항의 계수와 관계없이 답이 정해짐을 눈치챌 수 있다.

5. 우함수, 기함수

(1) 우함수(y축 대칭)

$f(x)$를 y축에 대해 대칭 시키면 $f(-x)$이다. '$f(x)$**가 우함수이다.' 또는** '$f(x)$**가** y**축 대칭이다.'는 곧** '$f(x)$**와** $f(x)$**를** y**축에 대해 대칭 시킨** $f(-x)$**와 같다.'라는 의미이다.**
따라서 $f(x)=f(-x)$이면 $f(x)$는 우함수(y축 대칭)이다. (혹은 $f(x)$가 우함수이면 $f(x)=f(-x)$이다.)
단, $f(x)-f(-x)=0$으로 제시될 수도 있으므로 형태에 주목하지 말고, 의미에 주목하자.

$f(x)=f(-x)$를 보고 $f(x)$가 우함수임을 파악하는 것은 누구나 할 수 있지만, 어떤 함수의 y축 대칭 여부를 판정하기 위해 $f(x)=f(-x)$를 적용하는 것은 아무나 하지 못한다. 후자의 처리도 당연히 할 수 있어야 한다.

함수 $f(x)$가 우함수인 경우 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$이다. – 〈Chapter 8〉

(2) 기함수(원점 대칭)

$f(x)$를 원점에 대해 대칭 시키면 $-f(-x)$이다. '$f(x)$**가 기함수이다.' 또는** '$f(x)$**가 원점 대칭이다.'는 곧** '$f(x)$**와** $f(x)$**를 원점에 대해 대칭 시킨** $-f(-x)$**와 같다.'라는 의미이다.**
따라서 $f(x)=-f(-x)$이면 $f(x)$는 기함수(원점 대칭)이다. (혹은 $f(x)$가 기함수이면 $f(x)=-f(-x)$이다.)
단, $f(x)+f(-x)=0$으로 제시될 수도 있으므로 '형태'에 주목하지 말고, '의미'에 주목하자.

기함수는 우함수와 달리 한 가지 정보를 더 캐낼 수 있다. 만약 $f(x)$가 $x=0$에서 정의된 함수인 경우 $f(x)=-f(-x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=-f(0)$이므로 $f(0)=0$이 된다. 즉, $x=0$**에서 정의된 기함수는 항상 원점을 지난다. (**$x=0$**에서 정의된 함수가 아니라면 원점을 지나지 않을 수도 있으므로 주의하자.)**

$f(x)=-f(-x)$를 보고 $f(x)$가 기함수임을 파악하는 것은 누구나 할 수 있지만, 어떤 함수의 원점 대칭 여부를 판정하기 위해 $f(x)=-f(-x)$를 적용하는 것은 아무나 하지 못한다. 후자의 처리도 당연히 할 수 있어야 한다.

함수 $f(x)$가 기함수인 경우 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$이다. – 〈Chapter 8〉

comment

문제에서 대칭성과 관련된 등식을 보면 대칭성을 바로 파악할 수 있도록 연습해 두자. 대칭성 파트는 아무리 개념을 빠삭하게 알고 있어도 실전에서 빠르게 파악하지 못하는 경우가 많다. 위의 조건들을 자유자재로 말로 표현하고, 수식으로 나타내고, 그래프로 표현할 수 있어야 한다.

(3) 다항함수와 우함수·기함수

다항함수의 식이 짝수차항으로만 이루어진 경우 : 우함수
다항함수의 식이 홀수차항으로만 이루어진 경우 : 기함수

짝수의 정의 자체가 2로 나누어 떨어지는 정수이므로 0 또한 짝수이다. 즉, 상수항도 짝수차항으로 취급한다. 따라서 **다항함수 식이 상수항을 포함한다면 해당 다항함수는 절대로 기함수일 수 없다.** 기함수인 다항함수 식은 홀수차항만으로 이루어지기 때문이다.

증명 : 우함수, 기함수의 정의에 해당하는 $f(x)=f(-x)$, $f(x)=-f(-x)$를 이용하자.

우함수인 다항함수 $f(x)$ 식의 모든 항은 ax^n(n은 0 이상의 짝수)의 꼴이다. 이때, $ax^n=a(-x)^n$이므로 $f(x)$는 $f(x)=f(-x)$를 만족한다.

기함수인 다항함수 $f(x)$ 식의 모든 항은 ax^m(m은 1 이상의 홀수)의 꼴이다. 이때, $ax^m=-a(-x)^m$이므로 $g(x)$는 $g(x)=-g(-x)$를 만족한다.

이를 정적분 계산과 연결하면 다음과 같다. 다항함수 $f(x)$에 대해, $\int_{-a}^{a} f(x)dx$에서 $f(x)$의 홀수차항은 삭제하고, 짝수차항만 남긴 뒤 $2\int_{0}^{a}$ 계산을 해주면 된다.

예를 들어, $\int_{-2}^{2}(x^3+2x^2-3x+2)dx=\int_{-2}^{2}(2x^2+2)dx=2\int_{0}^{2}(2x^2+2)dx$이다. - 〈Chapter 8〉

(4) 다항함수의 미분·적분과 대칭성

다항함수 $f(x)$에 대해,

① **우함수 $f(x)$에 대해 $f'(x)$는 기함수이다.**

우함수인 다항함수 $f(x)$ 식의 모든 항은 ax^n(n은 0 이상의 짝수)의 꼴이다. $f(x)$를 x에 대해 미분한 $f'(x)$의 모든 항은 anx^{n-1}의 꼴이다. $n=0$일 때 $anx^{n-1}=0$, $n\geq 2$일 때 anx^{n-1}은 홀수차항이므로 $f'(x)$의 식은 홀수차항만으로 이루어진다. 따라서 $f'(x)$는 기함수이다.

② **기함수 $f(x)$에 대해 $f'(x)$는 우함수이다.**

기함수인 다항함수 $f(x)$ 식의 모든 항은 ax^m(m은 1 이상의 홀수)의 꼴이다. $f(x)$를 x에 대해 미분한 $f'(x)$의 모든 항은 amx^{m-1}의 꼴이다. amx^{m-1}은 짝수차항이므로 $f'(x)$의 식은 짝수차항만으로 이루어진다. 따라서 $f'(x)$는 우함수이다.

③ **우함수 $f(x)$에 대해 $F(x)=\int f(x)dx$는 점 $(0,\ C)$ 대칭 함수이다. (C는 적분상수)**

우함수인 다항함수 $f(x)$ 식의 모든 항은 ax^n(n은 0 이상의 짝수)의 꼴이다. $f(x)$를 x에 대해 적분한 $F(x)$의 모든 항은 $\frac{a}{n+1}x^{n+1}$의 꼴이며, 적분상수 C가 추가된다.

$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$은 홀수차항이므로 $F(x)-C$의 식은 홀수차항만으로 이루어진다. 즉, $F(x)-C$는 점 $(0,0)$에 대해 대칭이므로 $F(x)-C$를 y축 방향으로 C만큼 이동한 $F(x)$는 점 $(0,\ C)$에 대칭이다.

단, $F(0)=0$이라는 조건이 추가적으로 주어진다면 $F(x)$는 기함수이다. 이런 추가 조건 없이 $F(x)$를 기함수로 착각하는 학생들이 많은데, 조건을 정확히 알아두자.

④ **기함수 $f(x)$에 대해 $F(x)=\int f(x)dx$는 우함수이다.**

기함수인 다항함수 $f(x)$ 식의 모든 항은 ax^m(m은 1 이상의 홀수)의 꼴이다. $f(x)$를 x에 대해 적분한 $F(x)$의 모든 항은 $\frac{a}{m+1}x^{m+1}$의 꼴이며, 적분상수 C가 추가된다.

$\frac{a}{m+1}x^{m+1}$와 C는 모두 짝수차항이므로 $F(x)$의 식은 짝수차항만으로 이루어진다.
따라서 $F(x)$는 우함수이다.

comment

사실 미분, 적분과 대칭성은 다항함수뿐만 아니라 미분가능한 함수에도 똑같이 적용된다. 다만 미분가능한 함수 $f(x)$에 대해 위의 내용을 증명하려면 합성함수의 미분과 적분을 설명해야 하는 관계로 수II **과정에서는 다항함수인 우함수, 기함수의 미분·적분만** 알고 있으면 된다.

예제(25) 08학년도 6월 평가원 가형 21번

사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

[4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) 함수 $f(x)$는 극솟값 -10을 갖는다.

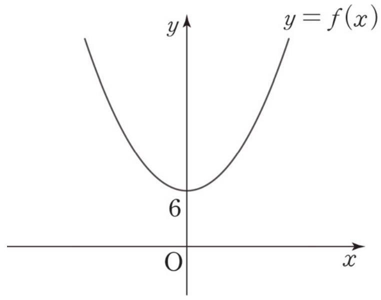
1. **(가) 조건에 의해 $f(x)$는 우함수다. 따라서 $f(x)$는 짝수차항만 가진다.**

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$**에서** $a=c=0$

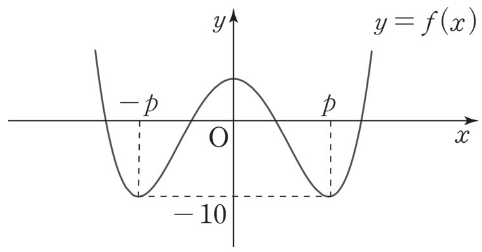
$\therefore\ f(x)=x^4+bx^2+6$

2. **함수 $f(x)$는 극솟값 -10을 갖는다.**

$f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고 우함수인 사차함수이므로 그 그래프는 매우 특수하다. 그래프로 해결하자. 가능한 $f(x)$의 그래프 개형은 두 가지밖에 없다.



이 경우 극솟값$=f(0)=6$이므로 극솟값이 -10이라는 조건을 위배한다. 따라서 $f(x)$의 개형은 다음과 같다.



곡선 $f(x)$는 직선 $y=-10$과 두 점에서 접하고, 두 점은 $x=0$에 대해 대칭이다($\because\ f(x)$는 우함수)

$y=f(x)$와 $y=-10$ 간의 차이함수를 이용해서 식을 작성하자.

$f(x)-(-10)=(x-p)^2(x+p)^2\ \ (p>0)$

※ 함수의 차를 통해 새로운 함수를 설정하는 차이함수는 **〈Chapter 5. 도함수의 활용〉 차이함수 파트**에서 자세히 배운다.

1에서 구한 $f(x)=x^4+bx^2+6$를 이용해서 p를 구하자. $f(0)=6$이므로

$f(0)+10=(-p)^2(p)^2=p^4$

$16=p^4,\ p=2\ \ (\because\ p>0)$

$f(x)+10=(x+2)^2(x-2)^2$이므로 $f(3)=5^2\times1^2-10=15.$

답은 15!!

(5) 다항함수 $f(x)$에 대해 $xf(x)$의 대칭성

다항함수 $f(x)$에 대해,

① **$f(x)$가 우함수라면 $xf(x)$는 기함수이다.**
우함수인 다항함수 $f(x)$ 식의 모든 항은 ax^n(n은 0 이상의 짝수)의 꼴이므로 $xf(x)$의 모든 항은 ax^{n+1}의 꼴이다. ax^{n+1}은 홀수차항이므로 $xf(x)$의 식은 홀수차항만으로 이루어진다. 따라서 $xf(x)$는 기함수이다.

② **$f(x)$가 기함수라면 $xf(x)$는 우함수이다.**
기함수인 다항함수 $f(x)$ 식의 모든 항은 ax^m(m은 1 이상의 홀수)의 꼴이므로 $xf(x)$의 모든 항은 ax^{m+1}의 꼴이다. ax^{m+1}은 짝수차항이므로 $xf(x)$의 식은 짝수차항만으로 이루어진다. 따라서 $xf(x)$는 우함수이다.

※ 사실 다항함수가 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대해서도 위의 도구가 똑같이 적용된다.
다만, $f(x)$가 다항함수라는 보장이 없으므로 위와 같이 '항'을 따질 수는 없다.
대신, **'우함수와 기함수의 정의'**를 이용하여 증명할 수 있다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대해,

$f(x)$가 우함수라면 $xf(x)$는 기함수이다.
$f(x)$는 우함수이므로 $f(x)=f(-x)$이다. $g(x)=xf(x)$라 할 때,
$-g(-x)=-\{-xf(-x)\}=xf(-x)=xf(x)=g(x)$이다.
따라서 $g(x)=-g(-x)$이므로 $xf(x)$는 기함수이다.

$f(x)$가 기함수라면 $xf(x)$는 우함수이다.
$f(x)$는 기함수이므로 $f(x)=-f(-x)$이다. $g(x)=xf(x)$라 할 때,
$g(-x)=-xf(-x)=xf(x)=g(x)$
따라서 $g(x)=g(-x)$이므로 $xf(x)$는 우함수이다.

예제(26) 16학년도 수능 20번

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

1. **모든 실수 x에 대하여** $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$이므로 $f(x)$는 기함수, $g(x)$는 우함수이다. $h(x)$는 '우함수×기함수'이므로 기함수에 해당한다.

$h(x)$가 기함수인 이유는 **우함수와 기함수의 정의**를 이용하여 증명할 수 있다.
$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$이므로 $h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$
즉, $h(-x)=-h(x)$이므로 $h(x)$는 기함수이다.

혹은 **$h(x)$가 다항함수이므로 $h(x)$의 모든 항이 홀수차항임을 보여줄 수도 있다.** $f(x)$는 기함수인 다항함수이므로 모든 항은 홀수차항이다. $g(x)$는 우함수인 다항함수이므로 모든 항은 짝수차항이다.

이때, $h(x)$의 모든 항은 $f(x)$의 홀수차항 중 하나와 $g(x)$의 짝수차항 중 하나를 곱하여 만들어진다.
즉, $h(x)$의 어떤 항이든 결국 홀수차항×짝수차항이므로 $h(x)$의 모든 항은 홀수차항이다.
따라서 $h(x)$는 기함수다.

2. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$

→ **대칭성을 이용한 정적분 계산 문항**임을 눈치채야 한다. $h'(x)$는 우함수이고 적분 구간의 양 끝이 $x=0$에 대해 대칭이기 때문이다.

$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$에서 피적분함수를 두 함수의 합으로 분리하자. 본문에서 배웠듯이 홀수차항은 홀수차항끼리, 짝수차항은 짝수차항끼리 묶는다.

기함수인 다항함수 $h(x)$를 x에 대해 미분한 **$h'(x)$는 우함수**이다.
우함수인 다항함수 $h'(x)$에 x를 곱한 **$xh'(x)$는 기함수**이다.
$5h'(x)$는 우함수다. 5를 곱해도 $h'(x)$의 차수에 영향을 주진 못한다.

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=\int_{-3}^{3}xh'(x)dx+\int_{-3}^{3}5h'(x)dx$$
$$=0+10\int_{0}^{3}h'(x)dx=10 \quad \therefore \int_{0}^{3}h'(x)dx=1$$

3. $h(0)$은 어떻게 구할 수 있을까? **도함수의 정적분은 원함수의 함숫값 차**와 같다. - 〈Chapter 8〉

따라서 $\int_{0}^{3}h'(x)dx=h(3)-h(0)=1$이므로 $h(3)=1+h(0)$이다. 실수 전체의 집합에서 정의된 $h(x)$가 기함수이므로 $h(0)=0$이다. $\therefore\ h(3)=1$

답은 ①!!

CHAPTER

04 유제

01 01학년도 수능 11번

삼차함수 $y=f(x)$가 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여

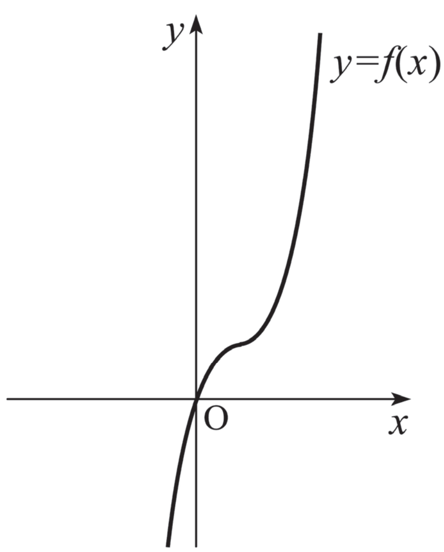
$$f(a)=f(b)=0,\ f'(a)=f'(c)=0$$

을 만족시킨다. c를 a와 b로 나타내면? [2점]

① $a+b$ ② $\dfrac{a+b}{2}$ ③ $\dfrac{a+b}{3}$ ④ $\dfrac{a+2b}{3}$ ⑤ $\dfrac{2a+b}{3}$

02 07년 10월 교육청 가형 25번

그림은 삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x$의 그래프이다.



원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선은 두 개다.

두 접선과 곡선 $y=f(x)$의 교점 중 원점이 아닌 점들의 x좌표의 합을 S라 하자. 이때, $10S$의 값을 구하시오. [4점]

03 13년 10월 교육청 20번

삼차함수 $f(x)=x^3+ax$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1, -1-a)$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 다른 한 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 이 곡선과 만나는 다른 한 점을 C라 하자. 두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c라 할 때, $f(b)+f(c)=-80$을 만족시킨다. 상수 a의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

04 20학년도 수능 12번

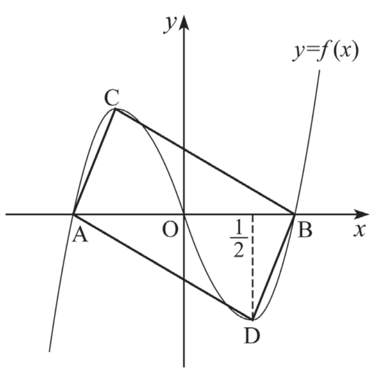
함수 $f(x)=-x^4+8a^2x^2-1$이 $x=b$와 $x=2-2b$에서 극대일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 $a>0$, $b>1$인 상수이다.) [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

05 08년 10월 교육청 가형 7번

그림은 원점 O에 대하여 대칭인 삼차함수 $f(x)$의 그래프이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $f(x)$의 극대, 극소인 점을 각각 C, D라 하자.

점 D의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이고 사각형 ADBC의 넓이가 $\sqrt{3}$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [3점]



① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

06 14년 7월 교육청 21번

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)<f(2)$인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(2+x)=f(2-x)$를 만족시킨다. 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

07 12년 10월 교육청 29번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

08 10년 10월 교육청 가형 7번

삼차식 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 3 & (x<-1) \\ f(x) & (-1\le x\le 1) \\ -1 & (x>1) \end{cases}$$

로 정의하자. 함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g'(-1)=g'(1)$
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$
ㄷ. 함수 $g'(x)$의 최솟값은 -2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 12학년도 수능 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

10 18년 7월 교육청 17번

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=f(5)$
(나) 방정식 $f(x)-p=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되게 하는 실수 p의 최댓값은 $f(2)$이다.

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

① 25 ② 28 ③ 31 ④ 34 ⑤ 37

11 20학년도 경찰대 12번

두 실수 a, b와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} a & (x<-1) \\ |f(x)| & (-1\le x\le 5) \\ b & (x>5) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 $x=-1$, $x=5$에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $f(9)=0$이면, $a>b$이다.
ㄷ. $a=b$이면 $f(0)=46$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12 20학년도 경찰대 16번

사차함수 $f(x)=k(x-1)(x-a)(x-a+1)(x-a+2)$ $(k>0)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 함수 $f(x)$의 두 극솟값의 곱은 25이다.

두 상수 a, k에 대하여 ak의 값은? [4점]

① 30 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 60

13 09학년도 6월 평가원 가형 23번

모든 계수가 정수인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
> (나) $f(1)=5$
> (다) $1<f'(1)<7$

함수 $y=f(x)$의 극댓값은 m이다. m^2의 값을 구하시오. [3점]

14 07학년도 6월 평가원 가형 9번

세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$이면 $f'(0)=0$이다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(-x)$이면 $g'(0)=0$ 이다.
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $|h(2x)-h(x)|\le x^2$ 이면 $h'(0)=0$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

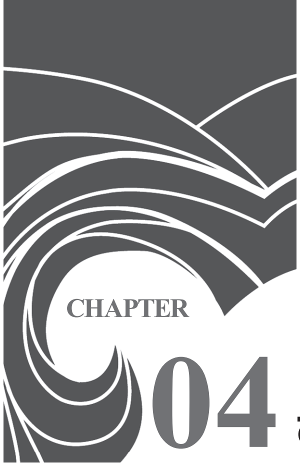
15 10학년도 수능 가형 8번

실수 a에 대하여 집합 $\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x$는 실수$\}$의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$
ㄴ. $\lim_{a\to c+} f(a)\ne \lim_{a\to c-} f(a)$인 실수 c는 2개다.
ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



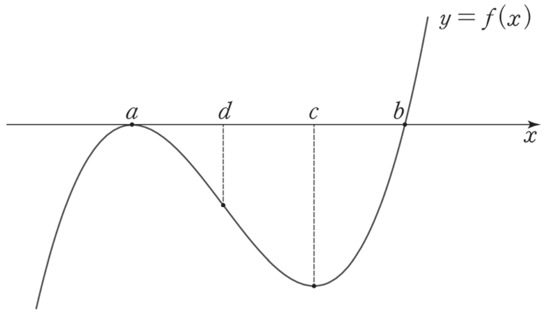
CHAPTER

04 해설

01 01학년도 수능 11번

답 : ④

1. 주어진 조건에 따라 그래프를 그려 보자. a, b의 대소관계에 관한 조건은 없으므로 대소관계와 상관없이 답이 나올 것이다. $a<b$인 그래프를 그리자.



2. 삼차함수 비율을 이용하자. 변곡점의 x좌표를 d라 하면 $b-c=c-d=d-a$가 성립한다.

   즉, $(b-c):(c-a)=1:2$이다. 이 식을 풀면 $c=\dfrac{a+2b}{3}$이다.

   ※ 혹은 내분점 공식을 이용해도 좋다. 점 $(c, 0)$은 점 $(a, 0)$과 점 $(b, 0)$의 $2:1$ 내분점이므로

   $c=\dfrac{2b+a}{2+1}=\dfrac{a+2b}{3}$이다.

02 07년 10월 교육청 가형 25번

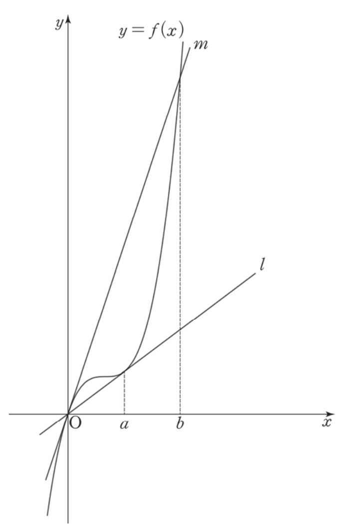
답 : 45

1. 원점을 지나고 함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x$에 접하는 직선은 두 개 존재한다.

   원점을 지나고 곡선과 $x=a$에서 접하는 직선을 l,
   곡선과 원점에서 접하고 $x=b$에서 만나는 직선을 m이라 하자.

   두 접선과 곡선 $y=f(x)$의 교점 중 원점이 아닌 점들의
   x 좌표의 합 $S=a+b$이다.

   두 접선의 방정식을 구한 다음 이를 $f(x)$와 연립하여
   a, b 값을 구할 수도 있지만, **삼차함수 비율과 비율 확장 내용을 적극 활용하자.** 그래프를 그리자마자 비율 반응이 왔다면 Good.



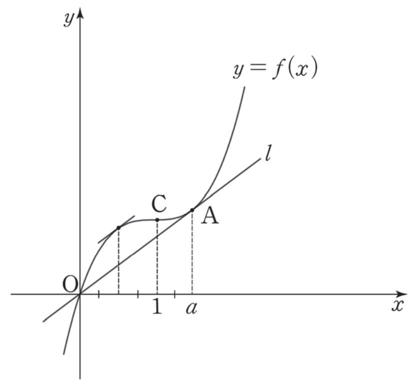
2. 삼차함수와 접선이 이루는 $1:1:1$ 비율을 이용하자. $f''(1)=0$이므로 변곡점의 x좌표는 1이다.

※ 삼차함수 $f(x)$의 변곡점의 x좌표는 $f''(x)=0$을 만족하는 x이다.

① (점 A의 x좌표와 변곡점 C의 x좌표의 차):
(변곡점 C의 x좌표와 점 O의 x좌표의 차)$=1:2$

점 A의 x좌표를 a라 할 때 $2(a-1)=1$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

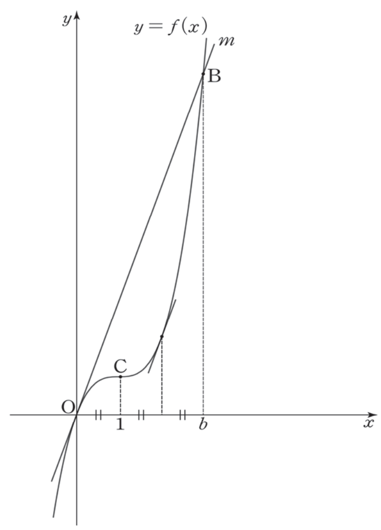


② (점 O의 x좌표와 변곡점 C의 x좌표의 차):
(변곡점 C의 x좌표와 점 B의 x좌표의 차)$=1:2$

점 B의 x좌표를 b라 할 때 $2=b-1$

$\therefore b=3$

3. 따라서 $S=a+b=\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{9}{2}$이므로 $10S=45$이다.



comment

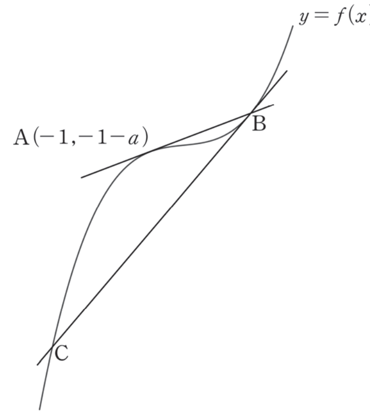
1. 삼차함수와 접선이 이루는 비율이 헷갈린다면 본문의 삼차함수 파트를 복습하자.

2. ‘(변곡점의 x좌표)$\times 3=$ 삼차방정식의 세 근의 합’ 공식을 이용하여 a, b의 값을 구해도 좋다.
$3=0+a+a$, $3=0+0+b$에서 $a=\dfrac{3}{2}, b=3$이다.

03 13년 10월 교육청 20번

답 : ③

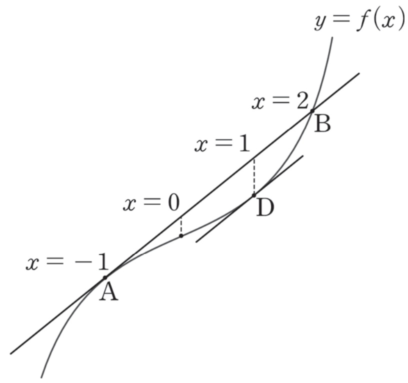
1. 우선 그래프를 그리고 조건에 따라 점 A, B, C를 잡자.



a의 값이 얼마인지 알려지지 않았으므로 $f(x)$ 그래프 개형을 확정할 수 없으나 아무런 상관이 없다. $f(x)$ 개형과 상관없이 $f(x)$와 두 점에서 만나는 접선은 만들 수 있기 때문이다.

(혹은... 선지에 있는 a 값은 모두 양수이므로 이를 기반으로 개형을 그려도 좋다. 물론 논리적인 풀이는 아니지만, 실전에서는 이런 센스도 중요하다.)

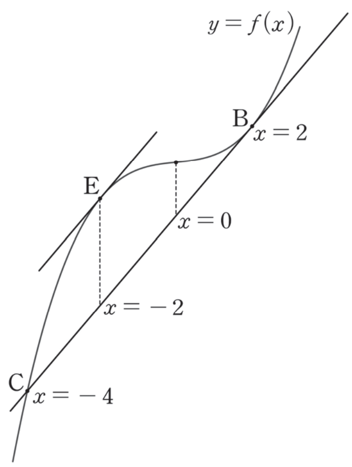
2. $f''(0)=0$이므로 $f(x)$의 변곡점의 x좌표는 0이다. 삼차함수와 접선이 이루는 비율을 이용하자. 직선 AB와 평행하고 함수 $f(x)$에 접하는 직선의 $y=f(x)$의 그래프와의 접점을 D라 할 때,
A, 변곡점, D, B는 $1:1:1$ 비율을 형성하므로 점 D의 x좌표는 1, 점 B의 x좌표는 2이다.



3. 다음으로 함수 $f(x)$와 $f(x)$ 위의 점 B$(2,\ 2a+8)$에서의 접선이 이루는 비율을 이용하자.

직선 BC와 평행하고 함수 $f(x)$에 접하는 직선의 $y=f(x)$의 그래프와의 접점을 E라 하자.

C, E, 변곡점, B는 $1:1:1$ 비율을 형성하므로 점 E의 x좌표는 -2, 점 C의 x좌표는 -4이다. 따라서 점 C의 좌표는 $(-4,\ -4a-64)$이다.



4. 두 점 B, C의 x좌표는 각각 b, c이므로 $f(b)+f(c)=-80$이다.
$(2a+8)+(-4a-64)=-80$이므로 $a=12$이다.

comment

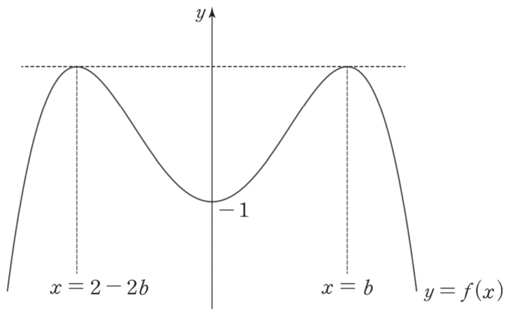
'(변곡점의 x좌표)$\times 3$= 삼차방정식의 세 근의 합' 공식을 이용하여 b, c의 값을 구해도 좋다.
$f(x)$의 변곡점의 x좌표는 0이므로 $0\times=-1-1+b$이다. $\therefore b=2$
또한, $0\times 3=2+2+c$이다. $\therefore c=-4$

04 20학년도 수능 12번

답 : ①

1. 무턱대고 식으로 풀려고 하지 말자. 함수 $f(x)=-x^4+8a^2x^2-1$이 $x=b$와 $x=2-2b$에서 극대라는 이유만으로 방정식 $f'(b)=f'(2-2b)=0$을 풀려고 한다면 계산이 꽤 복잡하다.

   어떤 문제가 나오든 관찰이 1순위이다. $f(x)$ 식에는 짝수차항만 존재하므로 $f(x)$는 우함수이다. $f(x)$는 최고차항의 계수가 -1이고 극댓값을 두 곳에서 가지므로 그래프 개형은 다음과 같다.



2. $f(x)$는 우함수이므로 두 극대점은 y축에 대하여 대칭이다. 따라서 $b=-(2-2b)$이다. 이를 풀면 $b=2$이다.

   따라서 $x=2$, $x=-2$에서 $f(x)$가 극대이므로 $f'(2)=0$이다. $f'(x)=-4x^3+16a^2x$이므로 $f'(2)=-32+32a^2=0$이다. 따라서 $a=1$이다. ($\because a>0$)

   $a+b=3$이다.

comment

아무 생각 없이 주어진 조건을 바로 식으로 나타내는 습관은 좋지 못하다. '관찰'부터 하는 습관을 들이자. 그리고, 웬만하면 그래프를 그리려고 하자.

05 08년 10월 교육청 가형 7번

답 : ①

1. 삼차함수 $f(x)$가 원점 O에 대하여 대칭이므로 $f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$이다. 또한, x축이 $f(x)$의 변곡점을 지나가므로 점 B의 x좌표를 b라 하면 삼차함수의 $1:\sqrt{3}$ 비율에 의해 $\frac{1}{2}:b=1:\sqrt{3}$이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, $\overline{AB}=\sqrt{3}$이다.

2. 사각형 ADBC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 2배이다.

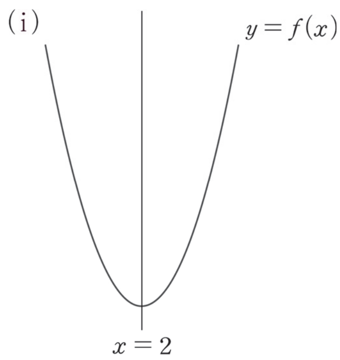
   (사각형 ADBC의 넓이)=(삼각형 ABC의 넓이)$\times 2=\sqrt{3}\times f(c)\times\frac{1}{2}\times 2=\sqrt{3}$

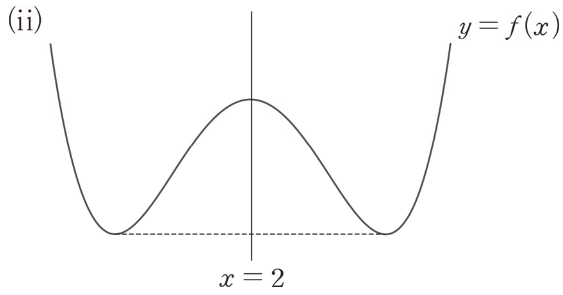
   $f(c)=1$, $f(x)$의 극댓값$=f(c)=1$이다.

06 14년 7월 교육청 21번

답 : ④

1. $f(2+x)=f(2-x)$이므로 $f(x)$는 $x=2$에 대하여 대칭이다. 사차함수의 그래프가 $x=2$에 대하여 대칭인 경우는 두 가지가 존재하는데, $f(0)=f(4)<f(2)$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는 사차함수이다.

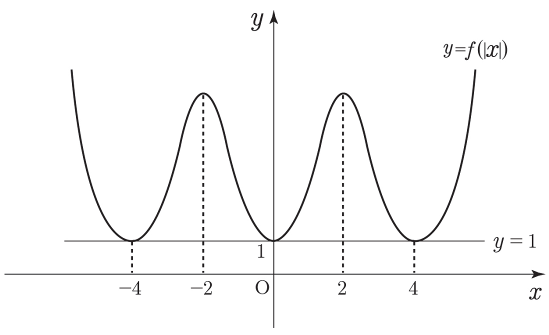




2. $f(|x|)=1$의 실근의 개수가 3이기 위한 조건을 파악하자.
   $y=f(|x|)$의 그래프의 $x>0$인 부분은 $y=f(x)$의 그래프에서 $x>0$인 부분과 같다.
   $y=f(|x|)$의 그래프의 $x<0$인 부분은 $y=f(x)$의 그래프의 $x>0$인 부분을 y축에 대하여 대칭시킨 것이다.

   따라서 y**축(**$x=0$**)과** $y=f(x)$**의 위치 관계에 따라** $y=f(|x|)$**의 그래프 개형이 결정**된다.

   방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되려면 $f(x)$**가** $x=0$**과** $x=4$**에서 극솟값** 1을 가져야 한다. y축의 위치에 따른 $y=f(|x|)$의 그래프를 직접 그려보면서 방정식의 개수를 관찰하면 된다.



※ **태도 : 함수의 그래프를 추론할 때는 특수한 경우부터 살핀다.** y축의 가장 특수한 위치는 $y=f(x)$가 극솟값을 갖는 지점인 것은 자명하다.

$y=f(x)$와 $y=1$ 간의 차이함수를 이용하여 $f(x)$의 식을 다음과 같이 세울 수 있다.
$f(x)-1=x^2(x-4)^2$

$\therefore f(2)=17$

07 12년 10월 교육청 29번

답 : 4

1. (가)에 의해 $f'(x)$는 우함수이므로 $f'(x)=ax^2+b$로 둘 수 있다. $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $a=3$이다. 또한 $f'(x)$가 우함수이므로 $f(x)$는 점 $(0, f(0))$에 대하여 점대칭이다.

   ※ 주의 : (가) 조건만 가지고 $f(x)$를 기함수라 할 수 없다. $f'(x)=ax^2+b$를 x에 대해 적분하면 $f(x)=\frac{a}{3}x^3+bx+C$ (C는 적분상수)이다. 그런데 $C=0$이라는 조건, 즉 $f(0)=0$이라는 추가조건이 없으므로 $f(x)$를 기함수로 단정할 수 없다.

2. (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다. $f(x)$는 점 $(0, f(0))$에 대하여 점대칭이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다. $f(x)$의 식을 구한 다음 $f(-1)$을 구하자.

   조건 (나)에서 $f(1)=0,\ f'(1)=0$이다. $f'(1)=3+b=0$이므로 $b=-3$,
   $f'(x)=3x^2-3$

   $f'(x)$를 x에 대하여 적분하면 $f(x)=\int(3x^2-3)dx=x^3-3x+C$
   $f(1)=0$에 의해 $f(1)=-2+C=0$이므로 $C=2$이다.

   $f(x)=x^3-3x+2$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=4$이다.

08 10년 10월 교육청 가형 7번

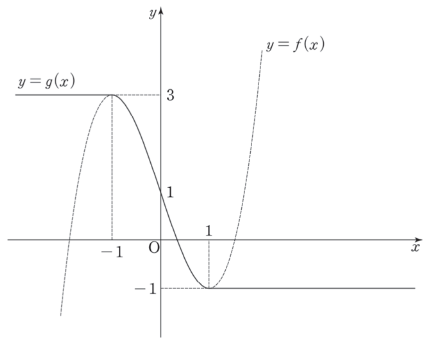
답 : ②

$$g'(x)=\begin{cases}0 & (x<-1, x>1)\\ f'(x) & (-1<x<1)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하므로 $g(x)$는 $x=-1$, $x=1$**에서 미분가능**하다. 따라서 $x=\pm1$에서 $g(x)$의 함숫값과 극한값은 일치하고(미분가능은 연속을 내포하기 때문), $g(x)$의 좌미분계수와 우미분계수가 일치해야 한다.

$\therefore f(-1)=3$, $f(1)=-1$, $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$

삼차함수 $f(x)$가 네 조건을 만족하려면 **삼차함수 그래프 개형**을 **고려**했을 때 $x=-1$**에서 극댓값을 가지고,** $x=1$**에서 극솟값**을 가져야 한다. 따라서 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



1. $g'(-1)=g'(1)=0$이다. (O)

2. $x<-1$에서 $g'(x)=0$, $-1\le x\le1$에서 $g'(x)\le0$, $x>1$에서 $g'(x)=0$이므로 $g'(x)\le0$이다. (O)

3. $g'(x)$가 최솟값을 갖는 구간은 $[-1,\ 1]$이다. 삼차함수 파트에서 배웠듯이 **최고차항의 계수가 양수인 삼차함수의 미분계수는 변곡점에서 최솟값**을 갖는다. 삼차함수의 비율에 따라 변곡점의 x좌표는 0이므로 $f'(0)$을 구하자.

   $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이므로 $f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a$

   $f'(x)$를 x에 대해 적분하면, $f(x)=\displaystyle\int(ax^2-a)dx=\frac{a}{3}x^3-ax+C$

   $f(-1)=3$을 대입하면 $\dfrac{2}{3}a+C=3$, $f(1)=-1$을 대입하면 $-\dfrac{2}{3}a+C=-1$

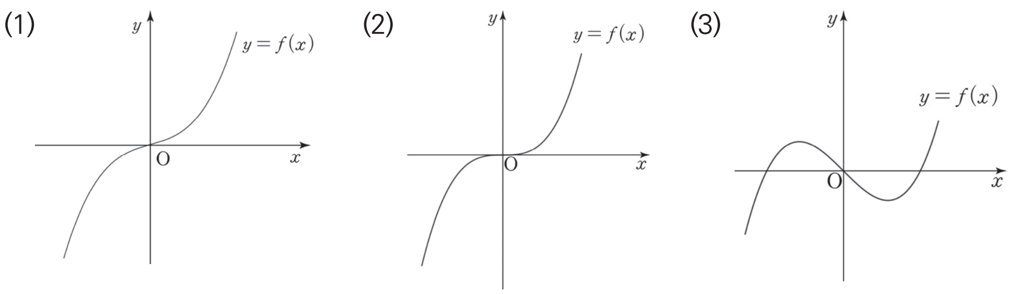
   두 식을 연립하면 $a=3, C=1$이다.
   $f'(x)=3x^2-3$에서 $f'(0)=-3$이므로 $g'(x)$의 최솟값은 -3이다. (X)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

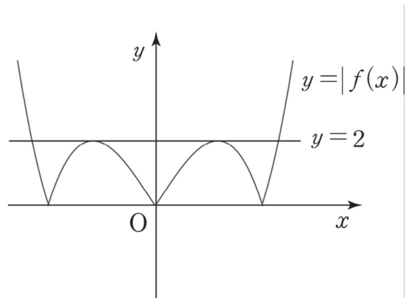
09 12학년도 수능 21번

답 : ④

1. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로 $f(x)$는 기함수이고, 이를 만족하는 그래프 개형은 다음의 세 가지가 가능하다.



방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 개형은 (3)이다.



2. $f(x)$는 **기함수이므로 $1:\sqrt{3}$ 비율**을 이용하자. 방정식 $f(x)=0$의 양수인 실근을 $\sqrt{3}a$라 할 때,
$f(x)=x(x+\sqrt{3}a)(x-\sqrt{3}a)=x(x^2-3a^2)$

$f(x)$는 $x=a$에서 극솟값 -2를 가지므로 $f(a)=a(-2a^2)=-2a^3=-2$, $a=1$
$\therefore f(x)=x(x^2-3)$

$f(3)=3(3^2-3)=3\times 6=18$이다.

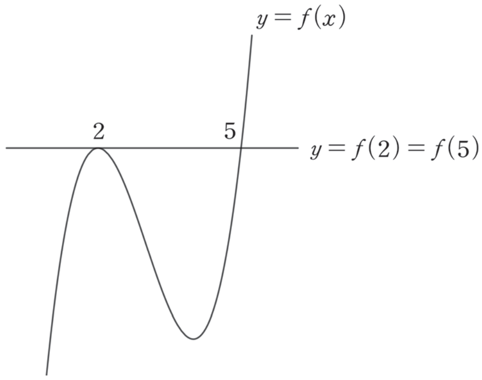
comment

$f'(x)$의 식을 작성한 다음 이를 x에 대해 적분한 $f(x)$ 식을 통해 풀거나, $f(x)$의 식을 작성한 다음 이를 x에 대해 미분한 $f'(x)$의 식을 통해 풀어도 좋다. 그러나 가장 빠른 것은 $1:\sqrt{3}$ 비율을 이용하는 풀이다.

10 18년 7월 교육청 17번

답 : ②

1. $f(x)-p=0$의 실근이 2개이기 위해선 p는 극댓값이거나 극솟값이어야 한다. 이때 $f(2)$가 p의 최댓값이라고 했으므로 $f(2)$는 극댓값이다. $f(2)=f(5)$이므로 그래프는 아래와 같이 그려진다.



2. $y=f(x)$와 $y=f(2)$의 차이함수를 이용하여 식을 세우면 다음과 같다.
$f(x)-f(2)=(x-2)^2(x-5)$

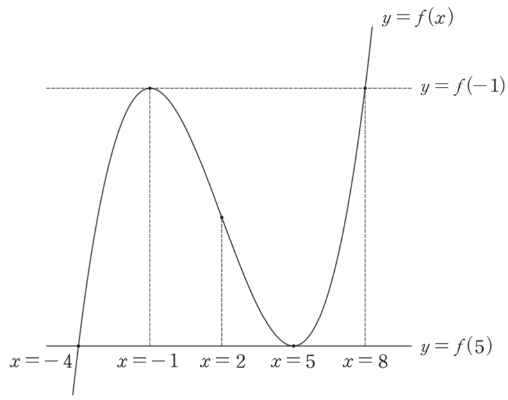
이때 $f(0)=0$이므로 $f(0)-f(2)=-20$, $f(2)=20$이다.
따라서 $f(x)=(x-2)^2(x-5)+20=x^3-9x^2+24x$이다.

3. $\int_0^2(x^3-9x^2+24x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+12x^2\right]_0^2=28$

11 20학년도 경찰대 12번

답 : ③

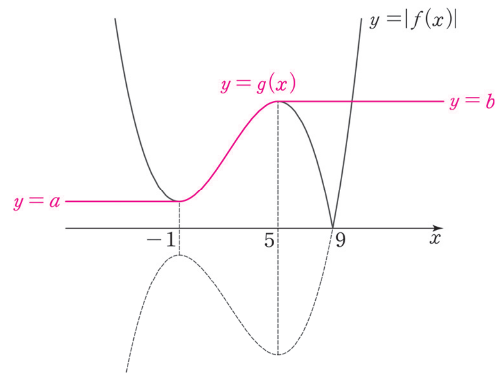
$g(x)$가 $x=-1$, $x=5$에서 미분가능해야 하므로 $f'(-1)=f'(5)=0$이어야 한다.
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



두 극점에 대해 삼차함수 비율을 적용하면 위와 같이 변곡점, 직선 $y=f(5)$와의 교점, 직선 $y=f(-1)$과의 교점의 x좌표를 각각 구할 수 있다.

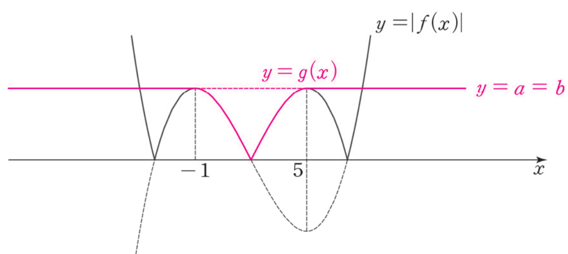
1. 위 그래프에서 보다시피 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이다. (O)

2. 삼차함수 비율에서 보다시피 $f(-1)=f(8)$이다. 따라서 $f(9)=0$일 경우 $f(-1)<0$이므로 $g(x)$의 그래프는 다음과 같이 그려진다.



   따라서 $a<b$이다. (X)

3. $a=b$가 되려면 $g(x)$와 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



   $g(x)$와 $f(x)$의 그래프가 그림과 같으려면 $f(x)$**의 변곡점이** x**축 위**에 있어야 한다.
   따라서 $f(2)=0$이다.

   $f'(x)$의 식을 세워 보자. $f(x)$는 $x=-1$, $x=5$에서 극값을 가지므로
   $f'(x)=3(x+1)(x-5)$

   $f'(x)$를 x에 대해 적분하면 $f(x)=\int(3x^2-12x-15)dx=x^3-6x^2-15x+C$
   $f(2)=8-24-30+C=0$이므로 $C=46$이다. $\therefore f(0)=46$(O)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

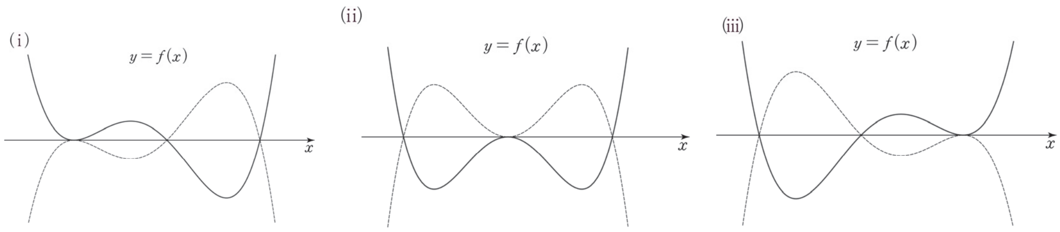
12 20학년도 경찰대 16번

답 : ②

1. $f(x)$의 식으로부터 알 수 있는 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $x=1$, $x=a$, $x=a-1$, $x=a-2$의 4개다.

   (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근은 3개이므로 $1, a, a-1, a-2$ 중 2개의 값이 서로 같아야 한다.

   즉, $y=f(x)$는 x**축과 한 점에서 접하고 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.** 이를 만족하는 개형은 다음과 같다. k의 부호는 아직 알 수 없으므로 아래의 3가지 그래프를 x축에 대칭시킨 모양도 같이 고려해주자.

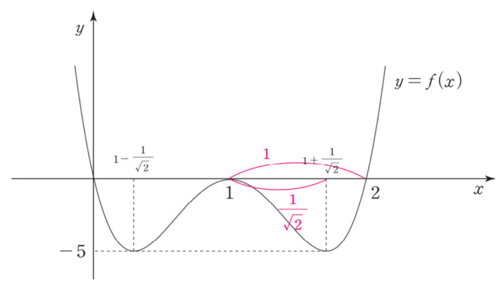


   조건 (나)를 만족시키려면 두 극솟값이 모두 양수이거나 음수여야 한다. 이를 만족시키는 그래프는 (ii)이다. $a-2<a-1<a$이므로 $a-1=1$이다. $\therefore\ a=2$

2. $f(x)=kx(x-1)^2(x-2)$

   $f(x)$의 그래프는 $x=1$을 기준으로 대칭이고, 두 극솟값의 곱은 25이다.

   따라서 $f(x)$는 서로 다른 두 점에서 극솟값 -5를 갖는다.



   극소점을 찾기 위해 사차함수의 $1:\sqrt{2}$ 비율을 이용하면 $f(x)$는 $1\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$에서 극소이다.

3. $f\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=k\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{k}{4}=-5$이므로 $k=20$이다.

   $\therefore\ ak=40$

※ **3에서 차이함수를 이용할 수도 있다.** $y=f(x)$와 $y=5$는 $x=1\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$에서 접하므로

$$f(x)+5=k\left(x-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(x-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$f(1)+5=k\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2},\quad 5=\frac{k}{4},\quad k=20$$

13 09학년도 6월 평가원 가형 23번

답 : 32

문제에서 주어진 '모든 계수가 정수인'에 밑줄 긋고 시작하자. 자연수, 정수, 양수, 음수 따위의 조건도 다른 조건 못지않게 중요하다.

1. (가)에 의해 $f(x)$는 기함수이다. 따라서 $f(x)=ax^3+bx$ (단, $a\neq 0$, a, b는 상수)

2. (나)에 의해 $a+b=5$이다.
   $f'(x)=3ax^2+b$이므로 (다)에 의해 $1<3a+b<7$이다.

   $a+b=5$를 이용해 부등식을 a에 관해 정리하자.
   $b=5-a$이므로 $1<2a+5<7$, $-2<a<1$

   a는 정수이므로 가능한 a의 값은 0, -1이다. 그런데 $f(x)$가 삼차함수이므로 $a\neq 0$이다.
   따라서 $a=-1$이고 $b=6$이다.

3. 식을 다시 쓰면 $f(x)=-x^3+6x$, $f'(x)=-3x^2+6$이므로 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극대이다.
   $m=f(\sqrt{2})=-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}=4\sqrt{2}$이므로 $m^2=32$이다.

14 07학년도 6월 평가원 가형 9번

답 : ⑤

1. 반례는 수없이 많다. 다항함수 $f(x)$에 대해 $f(0)$은 상수항, $f'(0)$은 일차항의 계수를 의미하는데, 상수항이 0이라고 해서 일차항의 계수가 0이라는 보장은 없다. (X)

2. ⅰ) **$y=g(x)$의 그래프로 따지기 :** $g(x)$는 우함수다. y축에 대칭인 다항함수 그래프 개형을 직접 그려보면 $g'(0)=0$을 직관적으로 파악할 수 있다. $g'(0)\neq 0$인 경우를 그려봐도 y축에 대칭되는 그래프를 그릴 수 없음을 알 수 있다.

   ⅱ) **$y=g'(x)$의 그래프로 따지기 :** 다항함수 $g(x)$는 우함수이므로 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 정의된 기함수다. $x=0$에서 정의된 기함수는 항상 원점을 지나므로 $g'(0)=0$이다.

   ⅲ) 식으로 따지기 : 그래프로 따지는 것이 시원찮다면 식으로 따질 수도 있다. 다항함수 $g(x)$는 우함수이므로 $g(x)$의 함수식은 짝수차항만으로 구성된다. $g(x)=\cdots+ax^4+bx^2+c$라 할 때, $g'(x)=\cdots+4ax^3+2bx$이므로 $g'(0)=0$이다. (O)

3. **조건 간 관계**를 살피자. $h'(0)$과 $|h(2x)-h(x)|\leq x^2$의 관계에서 미분계수의 정의가 떠올라야 한다. $\lim_{x\to 0}\frac{h(2x)-h(x)}{2x-x}=h'(0)$을 이용하자. $\frac{0}{0}$ **꼴의 극한식이 미분가능한 함수의 평균변화율 형태라면 극한값은 미분계수**이다. – 〈Chapter 2〉

$|h(2x)-h(x)| \le x^2$, $-x^2 \le h(2x)-h(x) \le x^2$

미분계수의 정의를 이용하기 위해 양변을 x로 나눠야 한다. 이때, x의 부호에 유의하자.

※ 부등식을 변수로 나눌 때는 변수의 부호에 유의해야 한다.

우선, 나누는 수가 0이면 안되므로 $x \neq 0$이다.

$x > 0$인 경우 부등식의 양변을 x로 나누면 $-x \le \dfrac{h(2x)-h(x)}{2x-x} \le x$이다.

$x < 0$인 경우 부등식의 양변을 x로 나누면 부등호 방향이 바뀌므로

$x \le \dfrac{h(2x)-h(x)}{2x-x} \le -x$이다.

$\lim\limits_{x\to 0}$은 $(x \neq 0)$을 **내포하므로 부등식에** $\lim\limits_{x\to 0}$**을 취할 수 있다.**

$x > 0$인 경우 $\lim\limits_{x\to 0+}(-x) \le \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{h(2x)-h(x)}{2x-x} \le \lim\limits_{x\to 0+}(x)$

$x < 0$인 경우 $\lim\limits_{x\to 0-}(x) \le \lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{h(2x)-h(x)}{2x-x} \le \lim\limits_{x\to 0-}(x)$

샌드위치 정리에 의해 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{h(2x)-h(x)}{2x-x} = \lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{h(2x)-h(x)}{2x-x} = h'(0) = 0$ (O)

옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

※ 샌드위치 정리

a 부근에서 정의된 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대해 a 부근의 모든 x에서
$f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\lim\limits_{x\to a}f(x) = \lim\limits_{x\to a}g(x) = \alpha$(단, α는 상수)일 때
$\lim\limits_{x\to a}h(x) = \alpha$이다. - 〈Chapter 1〉

15 10학년도 수능 가형 8번

답 : ④

$f(a)$는 **새롭게 정의한 함수**이다. 새롭게 정의한 함수의 정의역과 치역의 실질적 의미를 빠르게 흡수하자.
정의역 : 실수 a
치역 : 방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 실근의 개수

$f(a)$에서는 변수가 a이지만, 방정식 내에서 변수는 x이고 a는 상수다. 또한 $f(a)$의 치역은 실근의 '값'이 아닌 '개수'라는 점이 포인트다.

$ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$은 x에 관한 이차방정식처럼 보이지만 그렇지 않다. a가 0일 가능성도 있기 때문이다. **다항함수 또는 다항식이 제시되었을 때 차수와 최고차항의 계수 파악은 필수적**이다.
따라서 CASE를 분류하자.

i) $a=0$일 때 : 일차방정식

$ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$, $-4x+2=0$

$x=\dfrac{1}{2}$이므로 실근의 개수는 1이다.

ii) $a\neq 0$일 때 : 이차방정식

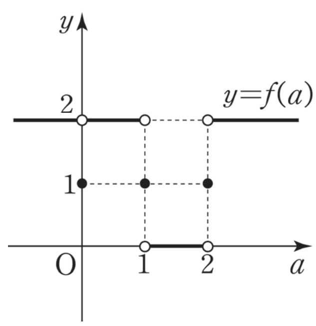
$ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$은 이차방정식이므로 실근의 개수는 판별식으로 따진다.

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2a^2-6a+4=2(a-2)(a-1)$$

방정식은 $a<1$ 또는 $a>2$일 때 서로 다른 두 실근을 갖고,
$a=1$ 또는 $a=2$일 때 중근을 갖고, $1<a<2$일 때 허근을 갖는다.

i)과 ii)를 종합하면, a에 관한 함수 $f(a)$의 식과 그래프는 다음과 같다.

$$f(a)=\begin{cases} 2 & (a<0) \\ 1 & (a=0) \\ 2 & (0<a<1) \\ 1 & (a=1) \\ 0 & (1<a<2) \\ 1 & (a=2) \\ 2 & (a>2) \end{cases}$$



함수 $y=f(a)$의 그래프를 바탕으로 보기를 판단하자.

1. $\lim\limits_{a\to 0}f(a)=2$, $f(0)=1$이다. (X)
2. 함수 $f(a)$의 우극한과 좌극한이 다른 a 값을 묻고 있다. 그래프를 관찰하면 $a=1$과 $a=2$에서 우극한과 좌극한이 다르다. (O)
3. 함수 $f(a)$는 $a=0$, $a=1$, $a=2$에서만 불연속이다. (O)

옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.