

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{8} \times 4^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + 12n} - 3n)$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 = a_2 + 6$$

일 때, a_4 의 값은? [2점]

- ① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

4. 6개의 문자 a, a, a, b, b, c 를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

- ① 52 ② 56 ③ 60 ④ 64 ⑤ 68

2

수학 영역(가형)

5. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = 10$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2a_n^2 + 3n^2}{a_n^2 + n^2}$ 의

값은? [3점]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

6. 두 양수 a, b 에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$ 를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$ 의 값은?
(단, $a \neq 1$) [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

7. 함수

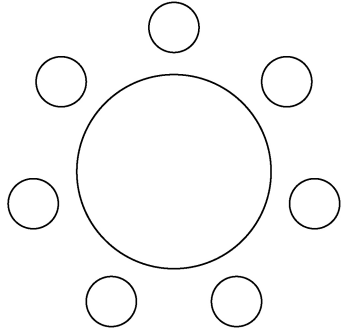
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1} - 1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n} + 3}$$

에 대하여 $f(k) = -\frac{1}{3}$ 을 만족시키는 정수 k 의 개수는? [3점]

- ① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

8. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

- ① 96 ② 100 ③ 104 ④ 108 ⑤ 112



9. 함수

$$f(x) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x+k)$$

가 닫힌구간 $[0, 12]$ 에서 최댓값 -4 , 최솟값 m 을 갖는다. $k+m$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [3점]

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

10. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$(e^{2x} - 1)^2 f(x) = a - 4 \cos \frac{\pi}{2} x$$

를 만족시킬 때, $a \times f(0)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① $\frac{\pi^2}{6}$ ② $\frac{\pi^2}{5}$ ③ $\frac{\pi^2}{4}$ ④ $\frac{\pi^2}{3}$ ⑤ $\frac{\pi^2}{2}$

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{f(x)}{(e^x + 1)^2}$$

라 하자. $f'(0) - f(0) = 2$ 일 때, $g'(0)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

12. 자연수 n 이 $2 \leq n \leq 11$ 일 때, $-n^2 + 9n - 18$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n 의 값의 합은?

[3점]

- ① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

13. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 할 때, $|a-3|+|b-3|=2$ 이거나 $a=b$ 일 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

14. $0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - (2\sin\theta)x - 3\cos^2\theta - 5\sin\theta + 5 = 0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ 의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β 라 하자. $4\beta - 2\alpha$ 의 값은? [4점]

- ① 3π ② 4π ③ 5π ④ 6π ⑤ 7π

6

수학 영역(가형)

15. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = (2^{2n} - 1) \times 2^{n(n-1)} + (n-1) \times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n} \dots\dots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, (좌변)=3, (우변)=3이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$

$$+ (2^{2m+2} - 1) \times \boxed{\text{(가)}} + m \times 2^{-m-1}$$

$$= \boxed{\text{(가)}} \times \boxed{\text{(나)}} - \frac{m+2}{2} \times 2^{-m}$$

$$= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2) \times 2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때,

$\frac{g(7)}{f(3)}$ 의 값은? [4점]

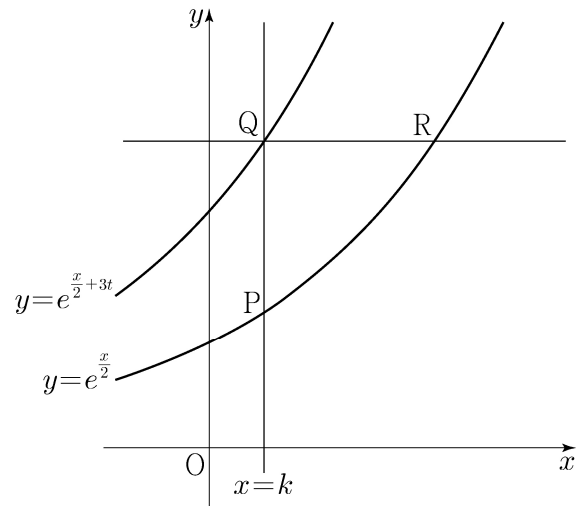
- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

16. 양수 t 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 k 의 값을 $f(t)$ 라 하자.

직선 $x=k$ 와 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$, $y=e^{\frac{x}{2}+3t}$ 이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 y 축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$ 과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{PQ} = \overline{QR}$ 이다.

함수 $f(t)$ 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ 의 값은? [4점]

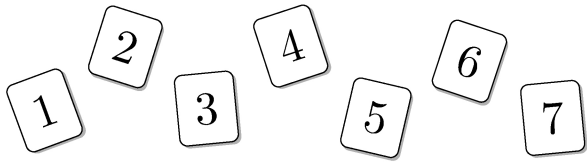
- ① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$



17. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

(가) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 4보다 큰 수가 적혀 있는 카드가 있다.
 (나) 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 5보다 작은 수가 적혀 있는 카드가 있다.

- ① $\frac{1}{28}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{3}{28}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{5}{28}$



18. 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=-2x^2+2$ 가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$
 ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$
 ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$f(1) \geq 2$ 이거나 함수 f 의 치역은 B 이다.

- ① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{20}{27}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

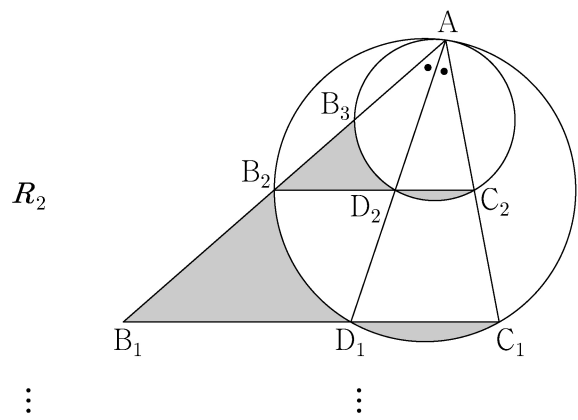
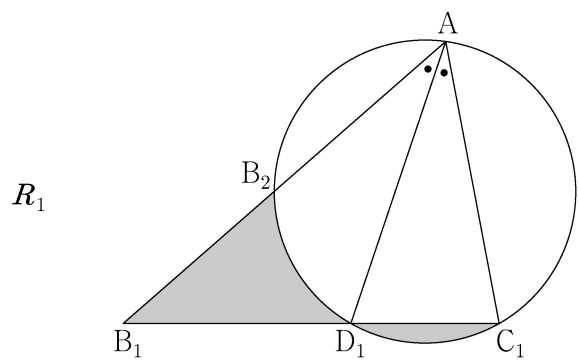
20. 그림과 같이 $\overline{AB_1} = 3$, $\overline{AC_1} = 2$ 이고 $\angle B_1AC_1 = \frac{\pi}{3}$ 인

삼각형 AB_1C_1 이 있다. $\angle B_1AC_1$ 의 이등분선이 선분 B_1C_1 과 만나는 점을 D_1 , 세 점 A, D_1, C_1 을 지나는 원이 선분 AB_1 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B_2 라 할 때, 두 선분 B_1B_2 , B_1D_1 과 호 B_2D_1 로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1 과 호 C_1D_1 로 둘러싸인 부분인 \frown 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 점 B_2 를 지나고 직선 B_1C_1 에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1 과 만나는 점을 각각 D_2, C_2 라 하자.

세 점 A, D_2, C_2 를 지나는 원이 선분 AB_2 와 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B_3 이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2 와 호 B_3D_2 로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2 와 호 C_2D_2 로 둘러싸인 부분인 \frown 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$
 ④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

21. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^m a_k$ 의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는

모든 자연수 m 의 값의 합은? [4점]

- ① 150 ② 154 ③ 158 ④ 162 ⑤ 166

단답형

22. 다항식 $(1+2x)^4$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 구하시오. [3점]

23. 반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서

$\sin B = \frac{7}{10}$ 일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=9$, $a_2=3$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

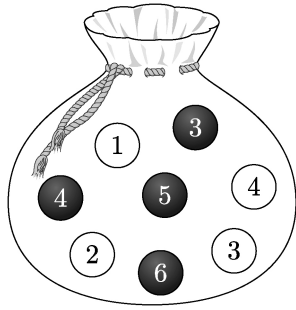
$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$$

을 만족시킨다. $|a_k|=3$ 을 만족시키는 100 이하의 자연수 k 의 개수를 구하시오. [3점]

25. 곡선 $x^3 - y^3 = e^{xy}$ 위의 점 $(a, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 b 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_k = -16$, $S_{k+2} = -12$ 를 만족시키는 자연수 k 에 대하여 a_{2k} 의 값을 구하시오. [4점]

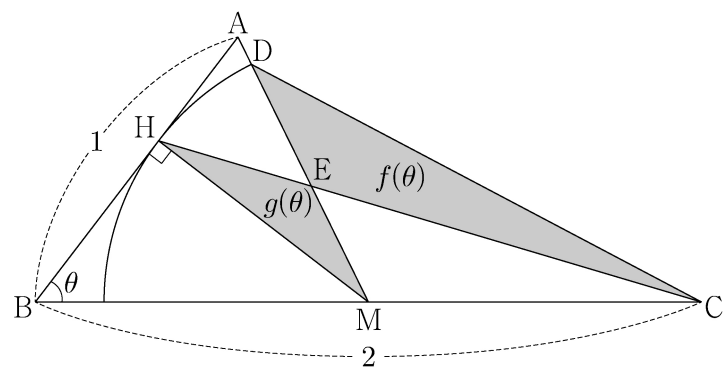
27. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$ 인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 \overline{MH} 인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle ABC = \theta$ 라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta) - g(\theta)}{\theta^3} = a$ 일 때, $80a$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



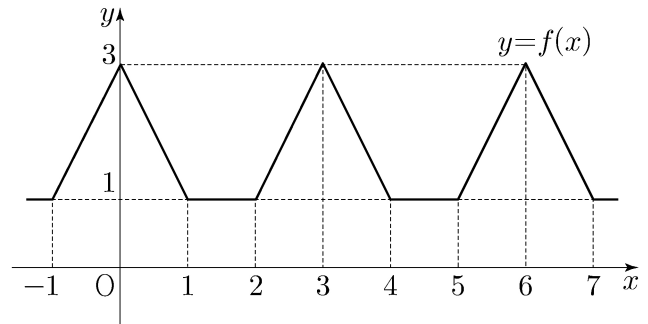
29. 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 는 $0 \leq x < 3$ 일 때 $f(x) = |x-1| + |x-2|$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3) = f(x)$ 를 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \frac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h} \right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 불연속인 a 의 값 중에서 열린구간 $(-5, 5)$ 에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, \dots, a_n (n 은 자연수)라 할 때,

$n + \sum_{k=1}^n \frac{g(a_k)}{\ln 2}$ 의 값을 구하시오. [4점]



* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.