이때 어떤 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{RQ}\geq 20$을 만족시키는 자연수 n의 값은 없다.

(ii) $2<\log_3(1+n)\leq 3$일 때

$9<1+n\leq 27$

$8<n\leq 26$ …… ㉠

$n<\overline{PQ}+\overline{RQ}\leq n+\log_3(1+n)$

이때 어떤 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{RQ}\geq 20$이 성립하려면

$n+\log_3(1+n)\geq 20$

$\log_3(1+n)\geq 20-n$ …… ㉡

$n=17$일 때, $\log_3 18<3$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

$n\geq 18$일 때, $\log_3(1+n)\geq \log_3 19\geq 2$이므로 ㉡을 만족시킨다.

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 자연수 n의 값의 범위는

$18\leq n\leq 26$

(iii) $3<\log_3(1+n)\leq 4$일 때

$27<1+n\leq 81$

$26<n\leq 80$

이때 조건 (가)에서 $n\leq 50$이므로

$26<n\leq 50$

$\overline{PQ}+\overline{RQ}>26$

즉, 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{RQ}\geq 20$이 성립하므로 조건을 모두 만족시키는 자연수 n의 값의 범위는

$26<n\leq 50$

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n의 값의 범위는

$18\leq n\leq 50$

이므로 그 개수는

$50-18+1=33$

답 33

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제

본문 39~47쪽

1 ①	2 10	3 ②	4 ②	5 ③
6 8	7 ①	8 ⑤	9 ②	10 ③

1 직각삼각형 ABC에서 $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$이므로

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\overline{AB}}$, $\overline{AB}=4\sqrt{3}$

이때 $\overline{AD}=\overline{AB}=4\sqrt{3}$이므로

$\overline{DE}=\overline{AD}\times\sin\frac{\pi}{6}$

$=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

$\overline{AE}=\overline{AD}\times\cos\frac{\pi}{6}$

$=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$

이때 삼각형 AED의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{DE}=\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

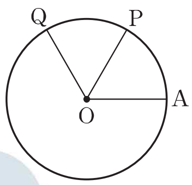
따라서 구하는 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}-6\sqrt{3}=4\pi-6\sqrt{3}$

이므로 $a+b=4+(-6)=-2$

답 ①

2 오른쪽 그림에서 동경 OP가 나타내는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로



$\angle AOP=\frac{\pi}{4}$

또 동경 OQ가 나타내는 각의 크기가 $-\frac{10}{3}\pi$이므로

이 각을 0 이상 2π 미만의 각으로 나타내면

$-\frac{10}{3}\pi+2\times 2\pi=\frac{2}{3}\pi$

그러므로

$\angle POQ=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}$

$=\frac{5}{12}\pi$

따라서 부채꼴 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{5}{12}\pi=\frac{10}{3}\pi$

이므로 $a=\frac{10}{3}$

따라서 $3a=10$

답 10

3 $\cos\theta+\sin\theta\times\tan\theta<0$에서

$\cos\theta+\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<0$

$\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta}<0$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로

$\cos\theta<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 $\sin\theta=\frac{3}{5}$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$=\frac{16}{25}$

㉠에서 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

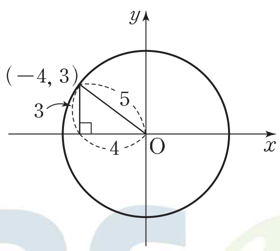
따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$

답 ②

참고

$\sin\theta=\frac{3}{5}>0$, $\cos\theta<0$이므로 θ는 제2사분면의 각이다.

그러므로 오른쪽 그림을 이용하여 tan θ의 값을 구할 수도 있다.



4 $\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)<0$에서

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $\tan\theta=2\sqrt{2}$이므로

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$

$\sin\theta=2\sqrt{2}\cos\theta$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로

㉡을 위의 식에 대입하면

$\cos^2\theta+(2\sqrt{2}\cos\theta)^2=1$

$\cos^2\theta+8\cos^2\theta=1$

$9\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

㉠에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$

답 ②

5 함수 $y=2\cos(ax)+a$의 주기가 4π이므로

$\frac{2\pi}{|a|}=4\pi$

$a>0$이므로

$a=\frac{1}{2}$

이때 주어진 함수는 $y=2\cos\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로

최댓값 M은

$M=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

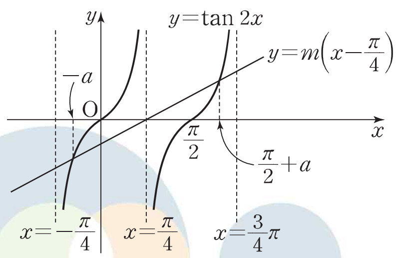
따라서 $a+M=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$

답 ③

6 함수 $y=\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고,

직선 $y=m\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$는 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$을 지나는 직선이므로

$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$에서 그래프를 나타내면 그림과 같다.



이때 양수 α에 대하여 $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$라 하면

함수 $y=\tan 2x$의 그래프는 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고,

점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\alpha=-a$

그러므로 $\beta-\alpha=\frac{3}{4}\pi$에서

$\left(\frac{\pi}{2}+a\right)-(-a)=\frac{3}{4}\pi$

$\frac{\pi}{2}+2a=\frac{3}{4}\pi$

$a=\frac{\pi}{8}$

그러므로 x좌표가 a인 점의 좌표는

$\left(-\frac{\pi}{8}, \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

즉, $\left(-\frac{\pi}{8}, -1\right)$이므로

$m=\dfrac{0-(-1)}{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{8}{3\pi}$

따라서 $3\pi m=8$

답 8

7 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\frac{1}{3}$에서

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cos\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=-\sin\theta$

이므로 $\sin\theta=-\frac{1}{3}$

이때 $\tan\theta>0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

따라서

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$

$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

답 ①

8 $\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)>0$에서

$\sin\theta\times\cos\theta>0$

그러므로 θ는 제1사분면의 각 또는 제3사분면의 각이다.

한편 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\cos\theta<0$이므로

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times(-\sin\theta)$

$=-\cos\theta$

$=-\left(-\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$

$=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$

$=\sqrt{1-\frac{7}{16}}$

$=\frac{3}{4}$

답 ⑤

9 $2\sin^2 x+5\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2<0$에서

$2\sin^2 x-5\sin x+2<0$

$(2\sin x-1)(\sin x-2)<0$

$\frac{1}{2}<\sin x<2$

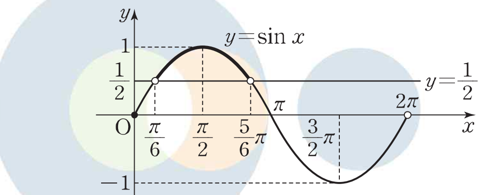
이때 $-1\le\sin x\le1$이므로

$\frac{1}{2}<\sin x\le1$

이 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가

직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$



따라서

$\beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}$

$=\frac{2}{3}\pi$

답 ②

10 $\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\times\cos x-1=0$에서

$(1-\sin^2 x)+\sqrt{3}\sin x\times\cos x-1=0$

$\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sqrt{3}\cos x=\sin x$

(i) $\sin x=0$일 때

이 방정식의 해는

$x=0$ 또는 $x=\pi$

(ii) $\sqrt{3}\cos x=\sin x$일 때

$\cos x=0$이면 위의 방정식에서 $\sin x=0$이므로

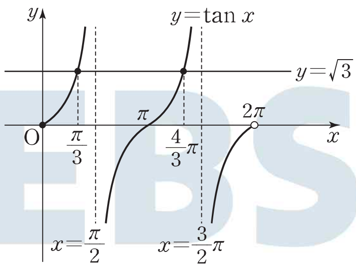
이 두 식을 만족시키는 해는 없다.

그러므로 $\cos x\ne0$

방정식 $\sqrt{3}\cos x=\sin x$의 양변을 $\cos x$로 나누면

$\tan x=\sqrt{3}$

이때 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이다.



그러므로 이 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

0, $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{4}{3}\pi$이다.

한편 부등식 $\cos x<0$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=0$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$

따라서 주어진 방정식과 부등식을 모두 만족시키는 x의 값은 π, $\frac{4}{3}\pi$이므로 그 합은

$\pi+\frac{4}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi$

답 ③

Level 1 기초 연습 본문 48~49쪽

1 ①	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 ②
6 ③	7 ④	8 ③	9 ②	

1 $\sin\frac{3}{2}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

따라서

$\sin\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi=-1+\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{3}{2}$

답 ①

2 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 호의 길이는 8π이고, 중심각의 크기는 $\frac{4}{5}\pi$이므로

$8\pi=r\times\frac{4}{5}\pi$

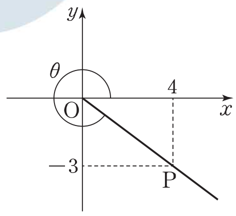
$r=8\pi\times\frac{5}{4\pi}=10$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times10\times8\pi=40\pi$

답 ⑤

3



점 $\mathrm{P}(4,\ -3)$에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

답 ③

4 $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2$

$=\frac{25}{36}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{5}{6}$

따라서

$\cos\theta\times\tan^2\theta=\cos\theta\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\frac{11}{36}}{-\frac{5}{6}}=-\frac{11}{30}$

답 ④

5 이차방정식 $3x^2-\sqrt{3}x+a=0$의 두 실근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ...... ㉠

$\sin\theta\times\cos\theta=\frac{a}{3}$ ...... ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\times\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{3}$

$1+2\sin\theta\times\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\sin\theta\times\cos\theta=-\frac{1}{3}$ ...... ㉢

㉡, ㉢에서

$\frac{a}{3}=-\frac{1}{3}$

따라서 $a=-1$

답 ②

6 함수 $y=a\sin bx+1$의 그래프는 함수 $y=a\sin bx$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$a>0$이므로 함수 $y=a\sin bx+1$은

$\sin bx=1$일 때 최댓값 $a+1$을 갖고,

$\sin bx=-1$일 때 최솟값 $-a+1$을 갖는다.

즉, $a+1=3$, $-a+1=-1$이므로

$a=2$

한편 함수 $y=a\sin bx+1$의 주기가 $\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}$

$|b|=3$

$b>0$이므로

$b=3$

따라서 $a+b=2+3=5$

답 ③

7 $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\frac{\pi}{5}$

$\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\frac{\pi}{5}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{5}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\frac{\pi}{5}$

따라서

$\left\{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right\}^2$

$+\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)\right\}^2$

$=\left(-\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}\right)^2$

$=\left(\sin^2\frac{\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{\pi}{5}\right)$

$+\left(\cos^2\frac{\pi}{5}-2\sin\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{\pi}{5}\right)$

$=\left(1+2\sin\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{\pi}{5}\right)+\left(1-2\sin\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{\pi}{5}\right)$

$=2$

답 ④

8 $2\sin^2x+\sin x-1=0$에서

$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

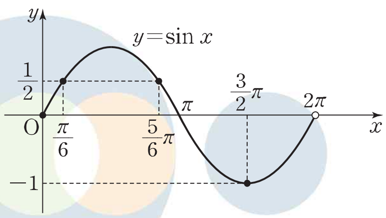
$\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$

(i) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(ii) $\sin x=-1$일 때

$x=\frac{3}{2}\pi$



(i), (ii)에서 구하는 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$

답 ③

9 부등식 $\cos^2x-\sin^2x-3\cos x-1>0$에서

$\sin^2x=1-\cos^2x$이므로

$\cos^2x-(1-\cos^2x)-3\cos x-1>0$

$2\cos^2x-3\cos x-2>0$

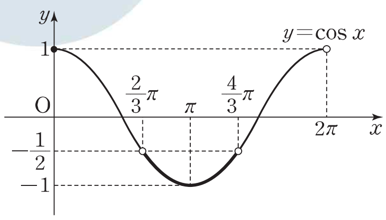
$(2\cos x+1)(\cos x-2)>0$

이때 $\cos x-2<0$이므로

$2\cos x+1<0$

$\cos x<-\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{4}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi$

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 50~52쪽

1 ③	2 ④	3 ④	4 ②	5 ②
6 ②	7 ③	8 ①	9 ⑤	10 8
11 ⑤	12 ⑤			

1 조건 (가)에서 $\sin\theta\times\cos\theta<0$이므로

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

조건 (나)에서 각 θ가 나타내는 동경과 각 6θ가 나타내는 동경이 서로 일치하므로

$6\theta-\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

즉, $\theta=\frac{2n}{5}\pi$

$n\le0$일 때, $\theta\le0$

$n=1$일 때, $\theta=\frac{2}{5}\pi$

$n=2$일 때, $\theta=\frac{4}{5}\pi$

$n=3$일 때, $\theta=\frac{6}{5}\pi$

$n=4$일 때, $\theta=\frac{8}{5}\pi$

$n\ge5$일 때, $\theta\ge2\pi$

따라서 $\theta=\frac{4}{5}\pi$ 또는 $\theta=\frac{8}{5}\pi$이므로

구하는 모든 θ의 값의 합은

$\frac{4}{5}\pi+\frac{8}{5}\pi=\frac{12}{5}\pi$

답 ③

2 부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r, $\angle BOA=\theta$라 하자.

부채꼴 OAB의 호의 길이가 2π, 넓이는 8π이므로

$8\pi=\frac{1}{2}\times r\times2\pi$에서

$r=8$

또 $2\pi=8\times\theta$에서

$\theta=\frac{\pi}{4}$

직각삼각형 OAC에서

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$

즉, $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\overline{OC}}{8}$이므로

$\overline{OC}=4\sqrt{2}$

따라서 호 CD의 길이는

$4\sqrt{2}\times\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\pi$

답 ④

3 $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{5}{2}$에서

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}\\&=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}\\&=\frac{2}{\sin\theta}\end{aligned}$$

이므로 $\frac{2}{\sin\theta}=\frac{5}{2}$

즉, $\sin\theta=\frac{4}{5}$

이때

$$\begin{aligned}\cos^2\theta&=1-\sin^2\theta\\&=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2\\&=\frac{9}{25}\end{aligned}$$

이고, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{3}{5}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$

답 ④

4 직선 $y=2x+6$에서

$x=0$일 때 $y=6$,

$y=0$일 때 $x=-3$

이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$(-3, 0)$, $(0, 6)$이다.

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times0+1\times(-3)}{2+1}, \frac{2\times6+1\times0}{2+1}\right)$

즉, $(-1, 4)$

이때 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

따라서

$\sin\theta\times\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{17}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$=-\frac{4}{17}$

답 ②

5 $2\sin\theta+a\cos\theta=\frac{4\sqrt{5}}{3}$의 양변을 제곱하면

$4\sin^2\theta+4a\sin\theta\times\cos\theta+a^2\cos^2\theta=\frac{80}{9}$ …… ㉠

$a\sin\theta-2\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$a^2\sin^2\theta-4a\sin\theta\times\cos\theta+4\cos^2\theta=\frac{1}{9}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$(a^2+4)\sin^2\theta+(a^2+4)\cos^2\theta=9$

$(a^2+4)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=9$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$a^2+4=9$

따라서 $a^2=5$

답 ②

6 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=4$에서

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\times\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\times\cos\theta}$

이므로

$\frac{1}{\sin\theta\times\cos\theta}=4$

즉, $\sin\theta\times\cos\theta=\frac{1}{4}$

한편 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이

$2\sin^2\theta$, $2\cos^2\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a=2\sin^2\theta+2\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=2$

$b=2\sin^2\theta\times2\cos^2\theta$

$=4\times(\sin\theta\times\cos\theta)^2$

$=4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=\frac{1}{4}$

따라서 $ab=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

답 ②

7 함수 $f(x)=a\sin 2x+1$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{12}, 3\right)$을 지나므로

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=a\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)+1=3$에서

$a\sin\frac{\pi}{6}+1=3$

$\frac{1}{2}a+1=3$

$a=4$

이때 $f(x)=4\sin 2x+1$이므로

함수 $y=f(x)$는 $\sin 2x=1$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값은

$4+1=5$

답 ③

8 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x+2\cos(\pi+x)$

$=\cos^2x-(1-\cos^2x)-2\cos x$

$=2\cos^2x-2\cos x-1$

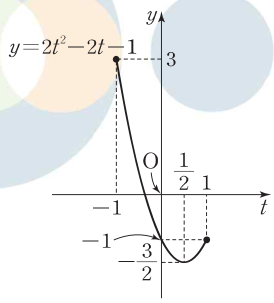
이때 $\cos x=t$ $(-1\le t\le1)$이라 하면

$f(x)=2t^2-2t-1$

$=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$

이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $t=-1$일 때 3이고,

최솟값은 $t=\frac{1}{2}$일 때 $-\frac{3}{2}$이다.



따라서 $M=3$, $m=-\frac{3}{2}$이므로

$M-m=3-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$

답 ①

9 직선 $y=2x$ 위의 한 점 P(1, 2)에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

한편

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

따라서

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\cos(\pi+\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\times\sin(\pi-\theta)$

$=\cos\theta\times(-\cos\theta)-(-\sin\theta)\times\sin\theta$

$=-\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$=-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$

$=\frac{3}{5}$

답 ⑤

10 방정식 $\log_3(\tan x)=\log_2\sqrt{2}$에서

(i) $\tan x>0$

이때 $0\le x<2\pi$이므로

$0<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

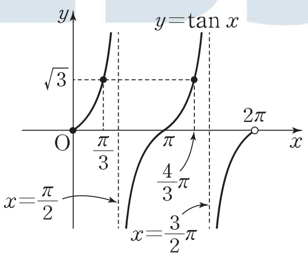
(ii) $\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$이므로

$\log_3(\tan x)=\frac{1}{2}$

$\tan x=3^{\frac{1}{2}}$

$\tan x=\sqrt{3}$

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$



(i), (ii)에서

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

주어진 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$

따라서 $p=3$, $q=5$이므로

$p+q=8$

답 8

11 방정식 $\tan^2 x-2\sin^2 x=0$에서

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-2\sin^2 x=0$

$\sin^2 x\times(1-2\cos^2 x)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(i) $\sin x=0$일 때

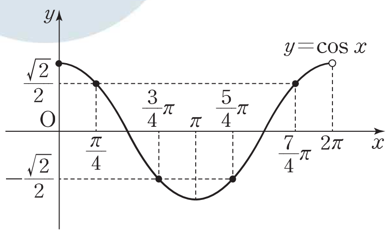
$x=0$ 또는 $x=\pi$

(ii) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(iii) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$



(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 해의 합은

$0+\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{7}{4}\pi+\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{4}\pi=5\pi$

답 ⑤

12 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-(2\cos\theta)x-\sin^2\theta-2\cos\theta+2\ge 0$

이 항상 성립하려면

이차방정식 $x^2-(2\cos\theta)x-\sin^2\theta-2\cos\theta+2=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\le 0$이어야 한다.

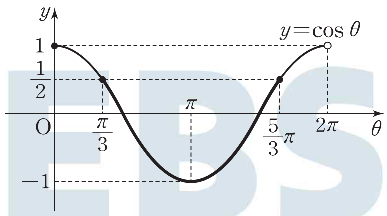
$\frac{D}{4}=(-\cos\theta)^2+\sin^2\theta+2\cos\theta-2\le 0$에서

$\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta-2\le 0$

$1+2\cos\theta-2\leq 0$

$\cos\theta\leq\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{5}{3}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$4\alpha+\beta=4\times\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi$

$=3\pi$

답 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 53쪽

1 8 2 ④ 3 ⑤ 4 26

1 함수 $y=2^{x-2}+4$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=2^{y-2}+4$

$x-4=2^{y-2}$

$y=\log_2(x-4)+2$

즉, $f(x)=\log_2(x-4)+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=4$

함수 $y=\tan\frac{\pi}{a}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|}$에서 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$

이때 함수 $y=\tan\frac{\pi}{a}x$의 그래프의 점근선 중 제1사분면을 지나는 점근선은

$x=\frac{a}{2}$, $x=\frac{3a}{2}$, $x=\frac{5a}{2}$, $\cdots$

이므로 $\frac{a}{2}=4$일 때 a의 값은 최대이다.

따라서 a의 최댓값은 8이다.

답 8

2 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 하면

$\overline{AB}=\frac{4}{3}$이므로

$x_2=x_1+\frac{4}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $y=2\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=1$

$x_1+x_2=2$

이 식에 ㉠을 대입하면

$x_1+\left(x_1+\frac{4}{3}\right)=2$

$2x_1=\frac{2}{3}$

$x_1=\frac{1}{3}$

$x_1=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$x_2=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

$x_1=\frac{1}{3}$일 때 $y=2\sin\frac{\pi}{6}=1$,

$x_2=\frac{5}{3}$일 때 $y=2\sin\frac{5}{6}\pi=1$

이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $\left(\frac{5}{3}, 1\right)$

이다.

따라서

$\overline{OA}^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+1^2=\frac{10}{9}$,

$\overline{OB}^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2+1^2=\frac{34}{9}$

이므로

$\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\right)^2=\frac{\overline{OB}^2}{\overline{OA}^2}=\frac{\frac{34}{9}}{\frac{10}{9}}$

$=\frac{17}{5}$

답 ④

3 $|\sin 2x|=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서

$2x=t\ (0\le t<4\pi)$로 놓으면

$|\sin t|=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(i) $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때

함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$은 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{3}$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

이때 네 실근을 각각 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\ (\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4)$라 하면

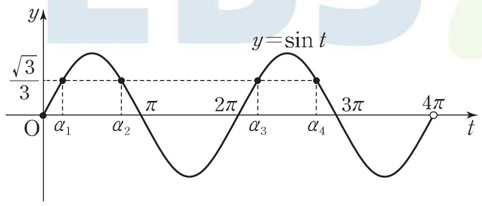
$\alpha_1+\alpha_2=\pi,\ \alpha_3+\alpha_4=5\pi$

$x=\frac{t}{2}$이므로 방정식 $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는

$\frac{\alpha_1}{2},\ \frac{\alpha_2}{2},\ \frac{\alpha_3}{2},\ \frac{\alpha_4}{2}$

이고, 그 합은

$$\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_3}{2}+\frac{\alpha_4}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{2}\pi$$
$$=3\pi$$



(ii) $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때

함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$은 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

이때 네 실근을 각각 $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4\ (\beta_1<\beta_2<\beta_3<\beta_4)$라 하면

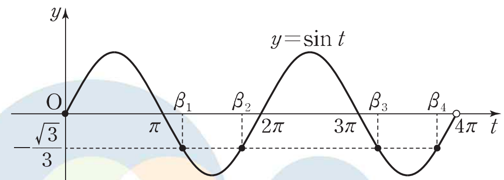
$\beta_1+\beta_2=3\pi,\ \beta_3+\beta_4=7\pi$

$x=\frac{t}{2}$이므로 방정식 $\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는

$\frac{\beta_1}{2},\ \frac{\beta_2}{2},\ \frac{\beta_3}{2},\ \frac{\beta_4}{2}$

이고, 그 합은

$$\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2}+\frac{\beta_3}{2}+\frac{\beta_4}{2}=\frac{3}{2}\pi+\frac{7}{2}\pi$$
$$=5\pi$$



(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 해의 개수는 8이고, 모든 해의 합은

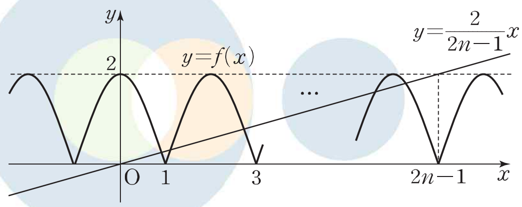
$3\pi+5\pi=8\pi$

따라서 $a=8,\ b=8$이므로

$a+b=16$

답 ⑤

4 두 조건 (가), (나)에서 함수 $f(x)$는 주기가 2이고, 그 그래프는 다음 그림과 같다.



$0\le x\le 2n-1$에서

방정식 $(2n-1)f(x)=2x$, 즉 $f(x)=\frac{2}{2n-1}x$의 서로 다른 실근의 개수는 $0\le x\le 2n-1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{2n-1}x$가 만나는 점의 개수와 같다.

이때 직선 $y=\frac{2}{2n-1}x$는 원점과 점 $(2n-1,\ 2)$를 지난다.

$0\le x<1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{2n-1}x$는 한 점에서 만난다.

2 이상의 자연수 $m\ (2\le m\le n)$에 대하여 $2m-3\le x<2m-1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{2n-1}x$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{2n-1}x$의 교점의 개수는 $2n-1$이므로

$2n-1=51$

$n=26$

답 26