2018학년도 6월 평가원 모의고사 수학 나형 중요문항 분석

2018학년도 6월 평가원 모의고사 수학 나형 문항 대조표		
번호		수능, 평가원 기출문제 (이동훈 기출문제집)
1	○	D020 (수학2)
2	○	A020 (수학2)
3	○	E058 (미적분1)
4	○	B032 (수학2)
5	○	N119 (확률과 통계)
6	○	A061 (수학2)
7	○	M052 (확률과 통계)
8	○	M158 (확률과 통계)
9	○	F019 (미적분1)
10	○	G132 (미적분1)
11	○	B041 (수학2)
12	○	A045 (수학2)
13	○	B061 (수학2)
14	○	F084 (미적분1)
15	○	C112 (수학2) + 교과서의 이차방정식의 풀이
16	○	G011 (미적분1)
17	○	H077(보기 ㄴ) (미적분1)
18	◎	E138 (미적분1), E163 (미적분1)
19	◎	M136 (확률과 통계)
20	◎	G079 (미적분1)
21	◉	기출×, 교과서 유리함수의 그래프의 개형+격자점
22	○	M098 (확률과 통계)
23	○	G058 (미적분1)
24	○	A013 (수학2)
25	○	D093 (수학2)
26	○	C071 (수학2)
27	○	B064 (수학2)
28	◎	N101 (확률과 통계)
29	◉	C171 (수학2), C020 (수학2)
30	◉	G150 (미적분1), G024 (미적분1)

○ : 교과서 예제 수준의 문제 (2개 이상의 예제가 결합된 경우도 포함)

◎ : 수능/평가원 기출 문제를 풀었던 경험이 있으면 수월하게 풀리는 문제

◉ : 수능/평가원 기출 문제를 풀었던 경험을 반드시 요구하거나, 교과서의 개념에 대한 정확한 이해를 요구하는 문제

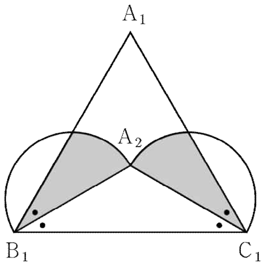
※ 1~17번, 22~27번은 교과서의 전형적인 문제이므로, 자세한 분석은 생략합니다.

18

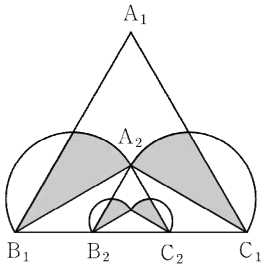
한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 그림과 같이 $\angle \mathrm{A_1B_1C_1}$의 이등분선과 $\angle \mathrm{A_1C_1B_1}$의 이등분선이 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$라 하자. 두 선분 $\mathrm{B_1A_2}$, $\mathrm{C_1A_2}$를 각각 지름으로 하는 반원의 내부와 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 내부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$, 점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{A_1C_1}$에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{C_2}$라 하자. 그림 R_1에 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 내부에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

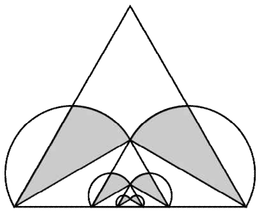
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점] (2018(6)-나형18)



R_1



R_2



R_3

…

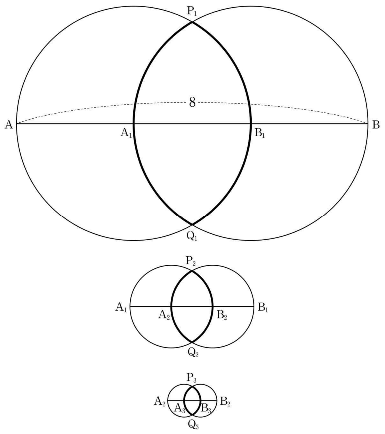
…

① $\dfrac{9\sqrt{3}+6\pi}{16}$ ② $\dfrac{3\sqrt{3}+4\pi}{8}$ ③ $\dfrac{9\sqrt{3}+8\pi}{16}$ ④ $\dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{4}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{3}+6\pi}{8}$

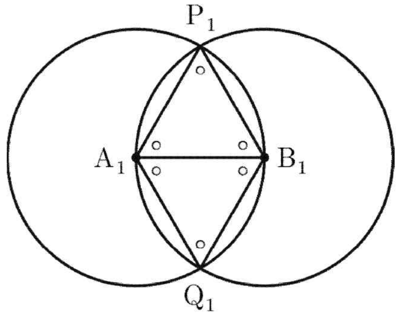
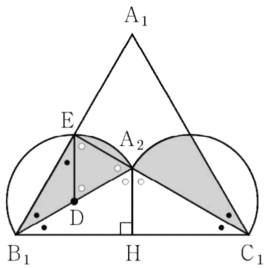
E138

(2009(6)−가형14/나형14)

그림과 같이 길이가 8인 선분 AB가 있다. 선분 AB의 삼등분점 A_1, B_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라고 하자. 선분 A_1B_1의 삼등분점 A_2, B_2를 중심으로 하고 선분 A_2B_2를 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라고 하자. 선분 A_2B_2의 삼등분점 A_3, B_3을 중심으로 하고 선분 A_3B_3을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3이라고 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 호 $P_nA_nQ_n$, $P_nB_nQ_n$의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [3점]



① $\frac{10}{3}\pi$　② 4π　③ $\frac{14}{3}\pi$　④ $\frac{16}{3}\pi$　⑤ 6π

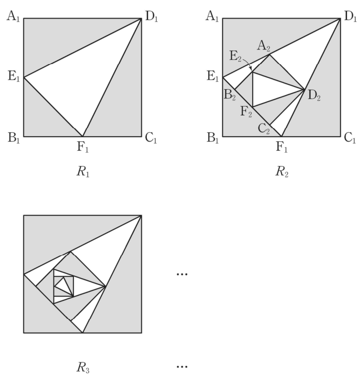
<table>
<tr><th>E138 (풀이의 일부)</th><th>18번 (풀이의 일부)</th></tr>
<tr><td>[풀이]
두 점 A_1, B_1이 선분 AB의 삼등분점이므로
$\overline{AA_1}=\overline{A_1B_1}=\overline{B_1B}=\frac{8}{3}$
원의 정의에 의하여
$\overline{A_1B_1}=\overline{B_1P_1}=\overline{P_1A_1}$이므로
$\triangle A_1B_1P_1$은 한 변의 길이가 $\frac{8}{3}$인 정삼각형이다.

</td><td>

(단, ●는 30°, ○는 60°이다.)
원의 정의에 의하여 $\overline{DA_2}=\overline{DE}$이므로
이등변삼각형 DA_2E에서
$\angle A_2ED=60^\circ=\angle DA_2E(=\angle B_1A_2E)$
삼각형 A_2ED의 세 내각의 합은 180°이므로
$\angle EDA_2=180^\circ-(\angle DA_2E+\angle A_2ED)$
$=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$
삼각형 A_2ED의 세 내각이 모두 같으므로
삼각형 A_2ED는 정삼각형이다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">< 문항 분석 >
E138 : 원의 정의를 이용하여 삼각형 $A_1B_1P_1$이 정삼각형임을 증명한다.
18번 : 원의 정의, 이등변삼각형의 정의를 이용하여 삼각형 A_2ED가 정삼각형임을 증명한다.
즉, E138에 이등변삼각형의 정의를 내적결합한 상황이 18번이며, 기출문제+교과서 개념은 평가원이 문항의 난이도를 높이는 대표적인 방법 중의 하나이다.</td></tr>
</table>

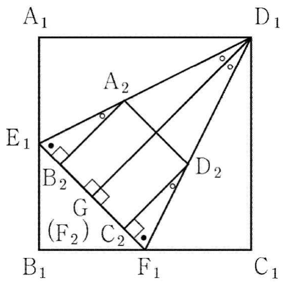
E163

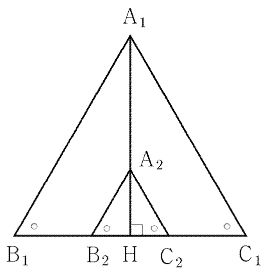
(2017(6)-나형17)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에서 선분 $\mathrm{A_1B_1}$과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 중점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$이라 하자. 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 내부와 삼각형 $\mathrm{E_1F_1D_1}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 $\mathrm{D_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{D_1F_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 선분 $\mathrm{E_1F_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그리고, 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $\mathrm{E_2F_2D_2}$를 그리고 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 내부와 삼각형 $\mathrm{E_2F_2D_2}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{125}{37}$ ② $\frac{125}{38}$ ③ $\frac{125}{39}$ ④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{125}{41}$

<table>
<tr><th>E163 (풀이의 일부)</th><th>18번 (풀이의 일부)</th></tr>
<tr><td>[풀이]


$\overline{\mathrm{A_2B_2}} /\!/ \overline{\mathrm{D_1G}}$이고 $\overline{\mathrm{D_2C_2}} /\!/ \overline{\mathrm{D_1G}}$이므로
평행선의 성질에 의하여
$\angle \mathrm{E_1A_2B_2} = \angle \mathrm{E_1D_1G}$, $\angle \mathrm{F_1D_2C_2} = \angle \mathrm{F_1D_1G}$
즉, $\angle \mathrm{E_1A_2B_2} = \angle \mathrm{F_1D_2C_2}$ …㉡
$\overline{\mathrm{A_2D_2}} /\!/ \overline{\mathrm{E_1F_1}}$이므로 $\overline{\mathrm{D_1A_2}} : \overline{\mathrm{A_2E_1}} = \overline{\mathrm{D_1D_2}} : \overline{\mathrm{D_2F_1}}$
이등변삼각형 $\mathrm{D_1A_2D_2}$에서 $\overline{\mathrm{D_1A_2}} = \overline{\mathrm{D_1D_2}}$
이므로 $\overline{\mathrm{A_2E_1}} = \overline{\mathrm{D_2F_1}}$ …㉢</td><td>

두 직선 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{A_2B_2}$가 서로 평행하므로
$\angle \mathrm{A_2B_2H} = 60^\circ = \angle \mathrm{A_1B_1H}$(동위각)
두 직선 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{A_2C_2}$가 서로 평행하므로
$\angle \mathrm{A_2C_2H} = 60^\circ = \angle \mathrm{A_1C_1H}$(동위각)
삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 세 내각의 합은 180°이므로
$\angle \mathrm{C_2A_2B_2} = 180^\circ - (\angle \mathrm{A_2B_2H} + \angle \mathrm{A_2C_2H})$
$= 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$
삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 세 내각이 모두 같으므로
삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$는 정삼각형이다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">< 문항 분석 >
평행선의 성질 ⇒ 동위각, 엇각으로 같음 ⇒ 닮음 도형 찾기 ⇒ 닮음비/넓이의 비(r) ⇒ $\frac{a}{1-r}$
'첫째항(a)를 찾고 나서, 중학교 과정의 기하적 성질을 이용하여 넓이의 비(r)을 구하고, 등비급수 공식에 대입하여 원하는 값을 찾는다.' 라는 전형적인 풀이를 적용한다.</td></tr>
</table>

19

다음은 x에 대한 다항식 $(x+a^2)^n$과 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같게 되는 두 자연수 a와 $n(n \geq 4)$의 값을 구하는 과정의 일부이다.

$(x+a^2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 a^2n이다.

$(x^2-2a)(x+a)^n = x^2(x+a)^n - 2a(x+a)^n$에서

$x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{(가)} \times a^3$이고,

$2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $2a^2n$이다.

따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$\boxed{(가)} \times a^3 - 2a^2n$

이다. 그러므로

$a^2n = \boxed{(가)} \times a^3 - 2a^2n$

이고, 이 식을 정리하여 a를 n에 관한 식으로 나타내면

$a = \dfrac{18}{\boxed{(나)}}$

이다. 여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로

$n = \boxed{(다)}$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(k)+g(k)$의 값은? [4점] (2018(6)-가형19/나형19)

① 10 ② 16 ③ 22 ④ 28 ⑤ 34

M136

(2006-나형30)

다항식 $2(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수와 다항식 $(x-1)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같게 되는 모든 순서쌍 $(a,\ n)$에 대하여 an의 최댓값을 구하시오. (단, a는 자연수이고, n은 $n \geq 2$인 자연수이다.) [4점]

<table>
<tr><th>M136 (풀이의 일부)</th><th>19번 (풀이의 일부)</th></tr>
<tr><td>
[풀이]
주어진 조건에 의하여 다항식
$(3-x)(x+a)^n$ $\cdots(*)$
의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 0이다.
$(3-x)(x+a)^n = 3(x+a)^n - x(x+a)^n$
다항식 $3(x+a)^n$의 전개식에서 일반항은
$3{}_n\mathrm{C}_r x^{n-r}a^r$
$r=1$을 대입하면 x^{n-1}의 계수는 $3an$
다항식 $x(x+a)^n$의 전개식에서 일반항은
${}_n\mathrm{C}_r x^{n-r+1}a^r$
$r=2$를 대입하면 x^{n-1}의 계수는 $\frac{n(n-1)}{2}a^2$
$(*)$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 0이므로
$3an - \frac{n(n-1)}{2}a^2 = 0$
정리하면
$a(n-1)=6$
$6 = 1\times6 = 2\times3 = 3\times2 = 6\times1$
이므로, 순서쌍 $(a,\ n)$은
$(1,\ 7),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (6,\ 2)$
이때, an의 값은 각각
7, 8, 9, 12
이므로, an의 최댓값은 12이다.
답 12
</td><td>
[풀이]
$(x+a^2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는
$a^2n(={}_n\mathrm{C}_1(a^2)={}_n\mathrm{C}_{n-1}(a^2))$이다.
$(x^2-2a)(x+a)^n = x^2(x+a)^n - 2a(x+a)^n$에서
$x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{{}_n\mathrm{C}_3}\times a^3$ 이고,
$2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $2a^2n$이다.
따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는
$\boxed{{}_n\mathrm{C}_3}\times a^3 - 2a^2n$
이다. 그러므로
$a^2n = \boxed{{}_n\mathrm{C}_3}\times a^3 - 2a^2n$
이다. 이 식을 정리하면
$a^2n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\times a^3 - 2a^2n$
a를 n에 관한 식으로 나타내면
$a = \frac{18}{\boxed{(n-1)(n-2)}}$
이다.
$n=4$일 때, $a=\frac{18}{3\times2}=3$(자연수◯)
$n=5$일 때, $a=\frac{18}{4\times3}=\frac{3}{2}$(자연수×)
$n=6$일 때, $a=\frac{18}{5\times4}=\frac{9}{10}<1$(자연수×)
$n=7$일 때, $a=\frac{18}{6\times5}=\frac{3}{5}<1$(자연수×)
⋮
$n\geq6$일 때, $(n-1)(n-2)\geq20$이고, $a<1$이므로 a는 자연수가 아니다.
여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로 $n=\boxed{4}$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
< 문항 분석 >
두 문제에서 주어진 다항식의 꼴만 바뀌었을 뿐, 이항정리에 대한 전형적인 풀이를 적용하는 것은 동일하다. 난이도 상승을 위하여, M136에서 주어진 다항식의 차수를 높였으며, 이는 평가원이 문제의 난이도를 높이기 위하여 즐겨 사용하는 방법이다. 풀이의 마지막 단계에서 a, n이 자연수임을 이용하여 부정방정식을 푸는 것도 동일하다. 확률과 통계 단원의 경우 이처럼 과거의 기출문제의 상황의 일부를 바꾸어 출제하는 경우가 대부분이다. 이때, 새롭게 출제된 문제도 이전 기출문제와 같이 전형적인 풀이를 적용하면 반드시 풀리도록 출제한다.
</td></tr>
</table>

20

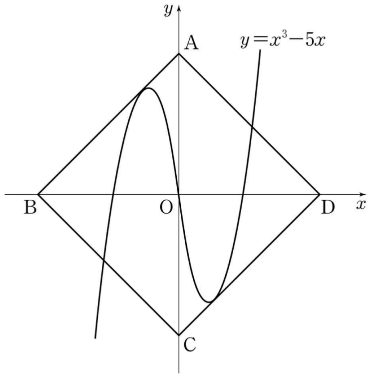
함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1$($k>0$인 상수)의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은? [4점] (2018(6)−나형20)

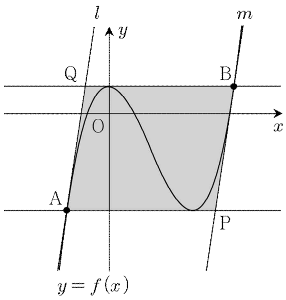
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

G079

(2014(예비)−A형30)

그림과 같이 정사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C는 y축 위에 있고, 두 꼭짓점 B, D는 x축 위에 있다. 변 AB와 변 CD가 각각 삼차함수 $y=x^3-5x$이 그래프에 접할 때, 정사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하시오. [4점]



G079 (풀이의 일부)	20번 (풀이의 일부)
[풀이] 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 O이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 직선 AB는 기울기가 1이다. 주어진 함수의 도함수는 $y'=3x^2-5$ 주어진 곡선과 직선 AB의 접점의 x좌표를 t라고 하자.(단, $t<0$) 직선 AB의 기울기는 $3t^2-5=1$ 풀면 $t=-\sqrt{2}$ 직선 AB의 방정식은 $y=x+4\sqrt{2}$ 두 점 A, B의 좌표는 $A(0,\ 4\sqrt{2})$, $B(-4\sqrt{2},\ 0)$ 두 점 사이의 거리 공식에 의하여 $\overline{AB}=8$ 따라서 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는 32이다. 답 32	접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 두면 $f'(t)=t^2-2kt=3k^2$ 풀면 $t=3k$ 또는 $t=-k$  접선의 방정식을 구하면l: $y=3k^2(x+k)+1-\frac{4}{3}k^3$ m: $y=3k^2(x-3k)+1$ 사각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여 (평행사변형 APBQ의 넓이)$=\frac{32}{9}k\times\frac{4}{3}k^3=24$

< 문항 분석 >

기울기가 주어졌을 때, 삼차함수의 그래프에 접하는 접선의 방정식을 구하고, 직선들의 교점의 좌표를 구해서, 도형의 길이 또는 넓이를 구하는 전형적인 문제이다. (G079에서 선분의 길이를 물어보았다면, 20번에서는 평행사변형의 넓이를 묻고 있다. 이 역시 평가원이 새로운 문항을 만들기 위하여 즐겨 사용하는 방법이다.)

문항의 난이도를 높이기 위하여 삼차함수의 계수가 미지수(k)를 두었는데, 이는 문항의 난이도를 높이기 위하여 평가원이 역시 자주 사용하는 방식이다. 기울기가 주어진 접선의 방정식에 대한 전형적인 풀이를 적용하면 반드시 풀리는 문제.

21

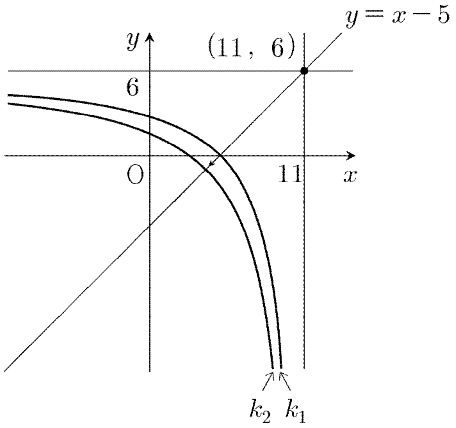
함수

$$f(x)=\frac{k}{x-11}+6\,(k\geq 36)$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 개수는? [4점] (2018(6)-나형21)

$|f(x)|\leq y\leq -x+5$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 2 이상 4 이하이다.

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

<table>
<tr><th colspan="2">21번 (풀이의 일부)</th></tr>
<tr>
<td>
[풀이1]
k가 k_1의 값을 가질 때의 함수 $f(x)$의 그래프와 k가 k_2의 값을 가질 때의 함수 $f(x)$의 그래프를 한 평면 위에 그리면 아래와 같다. (단, $k_2>k_1\geq 36$)


즉, $k(\geq 36)$의 값이 클수록 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(11,\ 6)$에서 멀어진다. 이때, 점 $(11,\ 6)$은 유리함수 $f(x)$의 두 점근선의 교점이다.
</td>
<td>
< 문항 분석 >

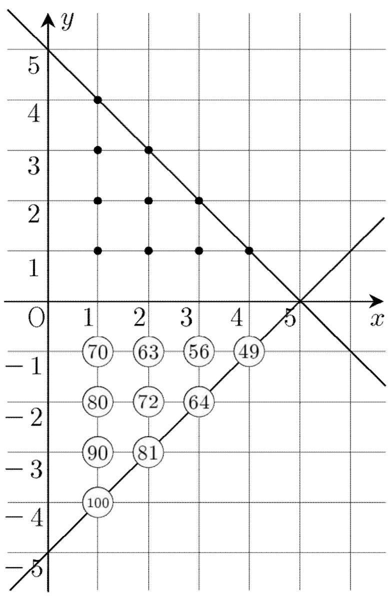
교과서 본문의 설명을 옮겨쓰면

• 유리함수
$y=\frac{k}{x-a}+b\,(k\neq 0)$
이 주어졌을 때,
k의 절댓값이 커지면 유리함수의 그래프는 $(a,\ b)$에서 멀어진다.

교과서 본문에서 위의 설명이 되어 있기 때문에, 21번을 풀 때, k의 값이 커지면(혹은 작아지면) 문제에서 주어진 함수 $f(x)$의 그래프가 어떻게 변하는지를 관찰해야 한다.
이러한 관찰 없이는 21번을 제대로 풀어내기는 힘들다.
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
< 문항 분석 >
[풀이1]: $(x-11)(y-6)=k=$(일정)에 의한 풀이. k의 값이 변할 때, 함수 $f(x)$가 10개의 격자점을 어떤 순서로 지나는 지를 파악한다.
[풀이2]: k의 값이 변함에 따라서 $y=f(x)$의 그래프의 x절편의 변화를 관찰하고, x절편이 속하는 구간을 경우(CASE)구분을 하여 문제를 해결한다.
[풀이3]: 격자점을 기준으로 한 풀이. 각각의 격자점에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 지날 때의 k의 범위를 구하고, 집합의 관점에서 우리가 원하는 k의 범위를 찾는다.
</td>
</tr>
</table>

21번 (풀이의 일부)

아래 그림처럼 연립부등식
$x>0$, $y>0$, $y \le -x+5$ $\cdots(*)$
가 나타내는 영역에 속하는 격자점의 개수는 10이다.
이 10개의 격자점을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점 각각에 대하여
$k=(x-11)(y-6)$ (←문제에서 주어진 유리함수)
으로 두고, k의 값을 구하면 아래 그림과 같다.
(※ 격자점은 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 말한다.)



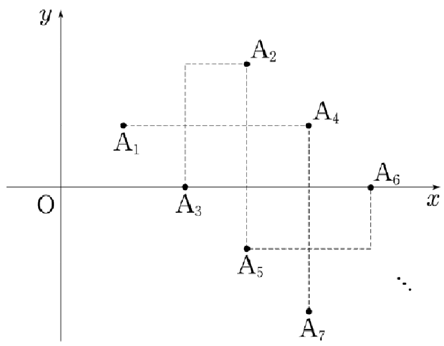
영역 $(*)$에 속하는 격자점 중에서
문제에서 주어진 연립부등식이 나타내는 영역에
속하는 점의 개수를 $g(k)$라고 하자.
k의 값을
$100 \to 90 \to 81 \to 80 \to 72 \to 70 \to 64 \to 63 \to 56 \to 49 \to 36$
로 변화시키면서, 두 함수
$f(x)$, $|f(x)|$
의 그래프를 그리고, $g(k)$의 값에 대하여 생각하자.

C163 (2012(6)−가형17/나형17)

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
(나) n이 짝수이면 점 A_n은 점 A_{n-1}을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이다.
(다) n이 3 이상의 홀수이면 점 A_n은 점 A_{n-1}을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점이다.

위의 규칙에 따라 정해진 점 A_k의 좌표가 $(7,\ -2)$이고 점 A_l의 좌표가 $(9,\ -7)$일 때, $k+l$의 값은? [4점]

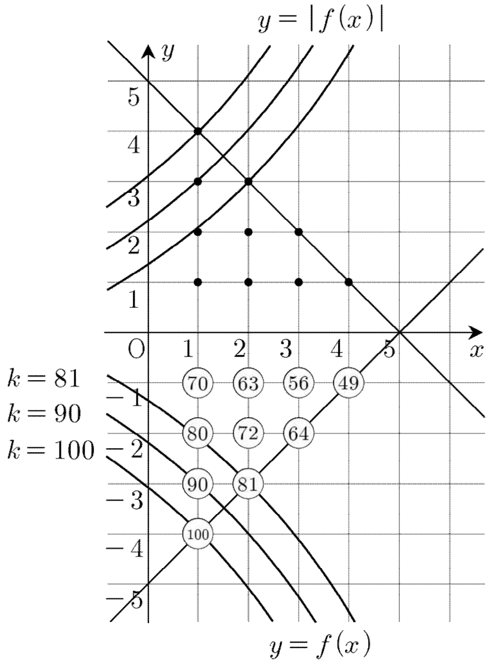


① 27 ② 29 ③ 31
④ 33 ⑤ 35

[풀이]의 도입부
모든 자연수 n에 대하여
점 A_{2n-1}은 직선 $y=-x+2$ 위에 있고,
점 A_{2n}은 직선 $y=-x+5$ 위에 있다.
⋮

< 문항 분석 >
직선: $x+y=a=$(일정) 합이 일정하다. ←C163
유리함수(쌍곡선): $xy=b=$(일정) $(b \ne 0)$ 곱이 일정하다. ←21번
원: $x^2+y^2=c^2=$(일정) $(c \ne 0)$ 제곱의 합이 일정하다.
상수 a, b, c의 값에 의하여 좌표평면 위의 점이 구분된다는 관점을 (마치 등고선과 같다고 생각하면 됩니다.) 묻고 있는 문제이다. 이 관점이 격자점과 결합된 것은 이번이 처음인 만큼, 차후에 이 관점이 다시 출제 될 가능성은 매우 높다.
10개의 격자점 각각에 대한 k의 값을 구하고, k의 값이 같은 경우, 다른 경우를 관찰한 후에, k의 값을 변화시키면서 함수 $f(x)$의 그래프가 각각의 격자점과 만나는 순서를 결정하는 것이 이 문제에 대한 전형적인 풀이일 것이다.

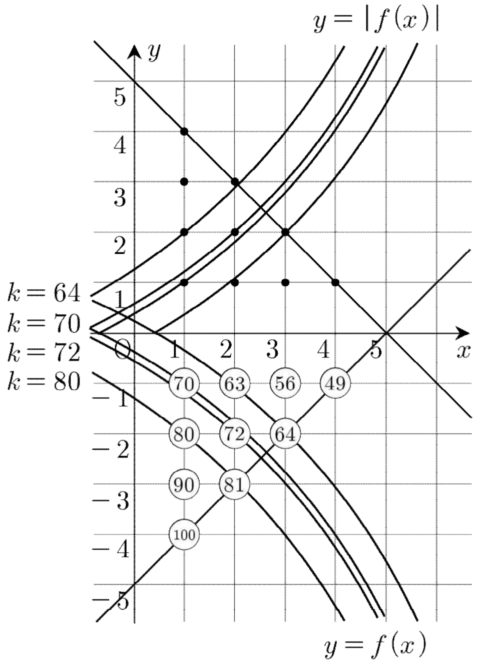
21번 (풀이의 일부)



위의 그림에서

$k>90$일 때, $g(k)$의 값은 0 또는 1이다.

$81\le k\le 90$일 때, $g(k)$의 값은 2 또는 3이다.



위의 그림에서

$72<k<81$일 때, $g(k)$의 값은 3 또는 4이다.

$64\le k\le 72$일 때, $g(k)$의 값은 5 또는 6 또는 7이다.

< 문항 분석 >

위와 동일

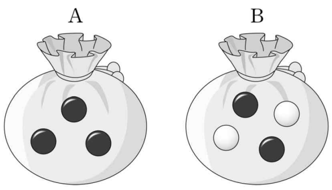
28

흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어, 꺼낸 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 m, n이라 하자. 이 시행에서 $2m \geq n$일 때, 꺼낸 흰 공의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] (2018(6)-나형28)

N101

(2014(예비)-B형10)

주머니 A에는 검은 구슬 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 검은 구슬 2개와 흰 구슬 2개가 들어 있다. 두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 색일 때, 선택된 주머니가 B이었을 확률은? [3점]



① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{1}{14}$

<table>
<tr><th>N101 (풀이의 일부)</th><th>28번 (풀이의 일부)</th></tr>
<tr><td>[풀이]
○ 주머니 A를 선택하는 경우
주머니 A에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 색일 확률을 p라고 하면
확률의 곱셈정리에 의하여 $p=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$
○ 주머니 B를 선택하는 경우
주머니 B에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 색일 확률을 q라고 하면
확률의 곱셈정리에 의하여 $q=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{12}$
조건부 확률의 정의에 의하여 구하는 확률은
$\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}}=\frac{1}{7}$
답 ④</td><td>[풀이1]
순서쌍 $(m,\ n)$은 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 0)$이다.
(1) 흰 공 1개, 검은 공 2개를 꺼낼 확률을 p_1이라고 하자. 수학적 확률의 정의에 의하여
$p_1=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35}$
(2) 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률을 p_2라고 하자. 수학적 확률의 정의에 의하여
$p_2=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35}$
(3) 흰 공 3개, 검은 공 0개를 꺼낼 확률을 p_3이라고 하자. 수학적 확률의 정의에 의하여
$p_3=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$
조건부 확률의 정의에 의하여 구하는 확률은
$\frac{q}{p}=\frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}=\dfrac{\frac{12}{35}}{\frac{18}{35}+\frac{12}{35}+\frac{1}{35}}=\frac{12}{31}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">< 문항 분석 >
표본공간을 서로 배반인 몇 개의 사건 A_1, A_2, $\cdots$, A_n으로 구분하고, 각각의 사건이 일어날 확률 p_1, p_2, $\cdots$, p_n을 구한 후, 조건부 확률의 정의에 의하여 $\frac{p_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k+\cdots+p_n}$ $(1 \leq k \leq n)$으로 계산하는 전형적인 풀이를 적용하는 문제들이다. 이때, 각각의 사건이 일어날 확률은 수학적 확률, 확률의 덧셈/곱셈정리를 이용해서 구하면 된다. 주어지는 상황은 주로 ‘주사위/동전 던지기’, ‘주머니에서 구슬 뽑기’처럼 교과서 예제의 소재들이 등장한다.</td></tr>
</table>

29

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$b_1 = a_1$

이고, 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + a_n & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ b_{n-1} - a_n & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10} = a_{10}$일 때, $\dfrac{b_8}{b_{10}} = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(2018(6)-나형29)

C171

(2017(6)-나형20)

첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + (-1)^n \times 2 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + 1 & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 43$일 때, a의 값은? [4점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

<table>
<tr><th>C171 (풀이의 일부)</th><th>29번 (풀이의 일부)</th></tr>
<tr><td>
[풀이]
수열 $\{a_n\}$을 나열하면
<table>
<tr><td>a_1</td><td>a_2</td><td>a_3</td></tr>
<tr><td>a</td><td>$a-2$</td><td>a</td></tr>
<tr><td>a_4</td><td>a_5</td><td>a_6</td></tr>
<tr><td>$a+1$</td><td>$a+3$</td><td>$a+1$</td></tr>
<tr><td>a_7</td><td>a_8</td><td>a_9</td></tr>
<tr><td>$a+2$</td><td>a</td><td>$a+2$</td></tr>
<tr><td>a_{10}</td><td>a_{11}</td><td>a_{12}</td></tr>
<tr><td>$a+3$</td><td>$a+5$</td><td>$a+3$</td></tr>
<tr><td>a_{13}</td><td>a_{14}</td><td>a_{15}</td></tr>
<tr><td>$a+4$</td><td>$a+2$</td><td>$a+4$</td></tr>
</table>
⋮ ⋮ ⋮
주어진 조건에 의하여
$a_{15} = a+4 = 43$
$\therefore\ a = 39$
답 ⑤
</td><td>
[풀이1]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(\neq 0)$라고 하자.
문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여
$b_1 = a_1$
$b_2 = b_1 + a_2 = a_1 + a_2$
$b_3 = b_2 - a_3 = a_1 + a_2 - a_3$
$b_4 = b_3 + a_4 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4$
$b_5 = b_4 + a_5 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5$
$b_6 = b_5 - a_6 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6$
$b_7 = b_6 + a_7 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7$
$b_8 = b_7 + a_8 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8$
$b_9 = b_8 - a_9$
$= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 - a_9$
$b_{10} = b_9 + a_{10}$
$= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 - a_9 + a_{10}$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
< 문항 분석 >
문제에서 주어진 수열의 귀납적 정의에 의하여 수열을 나열하고, 규칙을 발견한다. (발견적 추론)
위의 두 문제는
$a_1,\ a_2,\ a_3\ /\ a_4,\ a_5,\ a_6\ /\ \cdots \Leftrightarrow b_1,\ b_2,\ b_3\ /\ b_4,\ b_5,\ b_6\ /\ \cdots$
와 같이 3개씩 항을 끊어서 관찰해야 한다. 문제에서 3의 배수를 언급하고 있기 때문이다.
수학적 귀납법에서는 특수한 꼴의 점화식(예를 들어, $a_{n+1} = pa_n + q$)의 일반항을 구하는 문제가 더 이상 출제되지 않으므로, ‘나열⇒관찰’의 관점에서 문제가 출제되고 있다.
29번의 경우에는 ‘(3의)배수’, ‘등차수열(등차중앙)’이 내적 결합되어 난이도가 높아졌다.
</td></tr>
</table>

C020

(2009-나형19)

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_5+a_9=45$일 때, a_1+a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

C020 (풀이의 일부)	29번 (풀이의 일부)
[풀이2] a_1, a_5, a_9는 이 순서대로 공차가 8인 등차수열이다. 등차중앙의 정의에 의하여 $2a_5=a_1+a_9$ 이를 문제에서 주어진 등식에 대입하면 $a_1+a_5+a_9=3a_5=45$에서 $a_5=15$ $\therefore\ a_1+a_{10}=a_5+a_6=15+17=32$ 답 32	문제에서 주어진 조건에 의하여 $b_{10}=a_{10}$으로 두고, 이 등식을 간단히 하면 $a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8-a_9=0$ 등차수열의 정의에 의하여 $a_2-a_3=a_5-a_6=a_8-a_9=-d$ 이므로, 다시 등식을 간단히 하면 $a_1+a_4+a_7-3d=0$ 등차중앙의 정의에 의하여 $2a_4=a_1+a_7$이므로, 다시 등식을 간단히 하면 $3a_4-3d=0$ 즉, $a_4=a_1+3d=d$ 정리하면 $a_1=-2d$ 등차수열의 정의와 등차중앙의 정의를 이용하여 b_{10}, b_8을 d에 대한 식으로 표현하자. $b_{10}=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8-a_9+a_{10}$ $=a_1+a_2+d+a_5+d+a_8+d$ $=a_1+3a_5+3d=4a_1+15d=7d(\because a_1=-2d)$ $b_8=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8$ $=a_1+a_2+d+a_5+d+a_8$ $=a_1+3a_5+2d=4a_1+14d=6d(\because a_1=-2d)$ $\frac{q}{p}=\frac{b_8}{b_{10}}=\frac{6d}{7d}=\frac{6}{7}$이므로 $p=7$, $q=6$ $\therefore\ p+q=13$ 답 13
< 문항 분석 > C020 : a_1, a_5, a_9 $\rightarrow$ a_5가 등차중앙 29번 : a_1, a_4, a_7 $\rightarrow$ a_4가 등차중앙 임을 이용하면 계산을 단축할 수 있다. 이처럼 등차수열 관련 문항의 경우 등차중앙을 이용하면 계산 분량이 줄어드는 경우가 많다.	

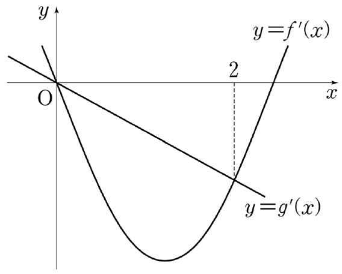
30

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
(나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.
$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점] (2018(6)-나형30)

G150

(2012(6)-나형19)

삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(0)=g(0)$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다.
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

< 문항 분석 >
30번의 [풀이1]: $\alpha=0$인 경우 (평행이동의 관점)
30번의 [풀이2]: α가 임의의 실수인 경우
2017학년도 가형 30번의 경우 $\alpha=0$으로 두고, 문제를 접근하면 좀 더 수월하게 문제를 해결할 수 있었다. 이 관점의 문제가 이번에 문과 30번에 출제된 것이다. 이처럼 가형에서 출제되었던 소재가 나형에 다시 출제되는 것은 빈번하다.

30번에서 주어진 등식을 다시 쓰면
$f(\alpha)-g(\alpha)=0$
$f'(\alpha)-g'(\alpha)=0$
$f'(\beta)-g'(\beta)=0$
에서 $h(x)=f(\triangle)-g(\triangle)$(단, $\triangle=\alpha,\ \beta$)으로 두는 것이 자연스럽다. (수학1의 방정식 단원의 상당수의 문제들이 이 방법으로 풀린다.)

G150번에서는 $h(x)=f(x)-g(x)$로 문제에서 주었으며, 이 관점에서 출제된 미분법/적분법 문제는 상당수에 이른다.

G024

(2001-인문11/자연11)

삼차함수 $y=f(x)$가 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여

$$f(a)=f(b)=0,\ f'(a)=f'(c)=0$$

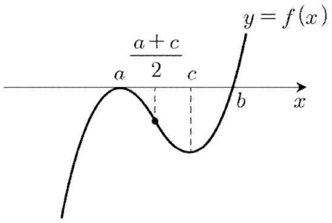
을 만족시킨다. c를 a와 b로 나타내면? [2점]

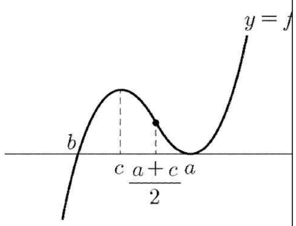
① $a+b$　② $\frac{a+b}{2}$　③ $\frac{a+b}{3}$　④ $\frac{a+2b}{3}$　⑤ $\frac{2a+b}{3}$

<table>
<tr><th>G024 (풀이의 일부)</th><th>30번 (풀이의 일부)</th></tr>
<tr><td>
[풀이]
함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 1로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
주어진 조건에서
$f(a)=f(b)=0$
인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=(x-a)(x-b)(x-d)$ (단, d는 상수)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=(x-b)(x-d)+(x-a)(x-d)$
$+(x-a)(x-b)$
주어진 조건에서 $f'(a)=0$이므로
$f'(a)=(a-b)(a-d)=0$
$a\neq b$이므로 $d=a$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=(x-a)^2(x-b)$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=2(x-a)(x-b)+(x-a)^2$
주어진 조건에서 $f'(c)=0$이므로
$f'(c)=(c-a)(3c-a-2b)=0$
$a\neq c$이므로
$\therefore\ c=\frac{a+2b}{3}$
답 ④
</td><td>
[풀이2]
$h(x)=f(x)-g(x)$로 두면
함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.
조건 (가), (나)에서 $g'(\alpha)\neq g'(\beta)$이므로 $\alpha\neq\beta$이다. 왜냐하면 일차함수 $g'(x)$는 일대일대응이기 때문이다. 조건 (가), (나)에서
$h(\alpha)=0$, $h'(\alpha)=0$, $h'(\beta)=0$
인수정리에 의하여 $h(x)=(x-\alpha)Q(x)$
(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)
함수 $h(x)$의 도함수는
$h'(x)=Q(x)+(x-\alpha)Q'(x)$
$h'(\alpha)=Q(\alpha)=0$,
$h'(\beta)=Q(\beta)+(\beta-\alpha)Q'(\beta)=0$
인수정리에 의하여 함수 $Q(x)$의 방정식을
$Q(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$
함수 $Q(x)$의 도함수는
$Q'(x)=2x-\alpha-\gamma$
이므로
$h'(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+(\beta-\alpha)(2\beta-\alpha-\gamma)=0$
정리하면
$(\beta-\alpha)(3\beta-\alpha-2\gamma)=0$
$\beta\neq\alpha$이므로 $\gamma=\frac{3\beta-\alpha}{2}$
함수 $h(x)$의 방정식은
$h(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ (단, $\alpha\neq\beta$)
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
< 문항 분석 >
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$, $f(\gamma)=0$ 혹은 $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$
의 상황이 주어진 것은 G024번 이후에 지속적으로 반복되고 있다.
위의 풀이는 인수정리를 이용하여 ‘산술적인 방법’으로 문제를 해결한 것이다.
</td></tr>
</table>

G024 (풀이의 일부)

[참고]
문제에서 주어진 조건에서 $f(a)=f'(a)=0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(a,\ 0)$에서 x축에 접한다.
문제에서 주어진 조건에서 $f(b)=0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(b,\ 0)$에서 x축과 만난다.
문제에서 주어진 조건에서 $f'(a)=f'(c)=0$이므로
함수 $f(x)$의 두 극점은 각각 $(a,\ f(a))$, $(c,\ f(c))$이다.

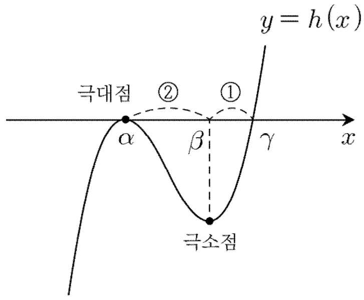




삼차함수 $f(x)$의 그래프는 두 극점의 중점에 대하여 대칭인데, 대칭점 $\left(\frac{a+c}{2},\ f\left(\frac{a+c}{2}\right)\right)$가 원점이 되도록
함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 양의 방향으로 $-\frac{a+c}{2}$ 만큼 평행이동시켜서 얻은 곡선을 $y=g(x)$라고 하자.
삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근은 각각 $a,\ a,\ b$이므로
삼차방정식 $g(x)=0$의 세 근은 각각
$a-\frac{a+c}{2}$, $a-\frac{a+c}{2}$, $b-\frac{a+c}{2}$이다.
함수 $g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로
함수 $g(x)$의 방정식을 다음과 같이 둘 수 있다.
$g(x)=x^3-px$(단, $p>0$)
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여
$$\left(a-\frac{a+c}{2}\right)+\left(a-\frac{a+c}{2}\right)+\left(b-\frac{a+c}{2}\right)=0$$
정리하면
$$\therefore\ c=\frac{a+2b}{3}$$

30번 (풀이의 일부)

함수 $h(x)$의 그래프는



(단, $h(\gamma)=0$)
내분점의 공식에 의하여
$\beta=\frac{\alpha+2\gamma}{3}$이므로 $\gamma=\frac{3\beta-\alpha}{2}$
함수 $h(x)$의 방정식은
$h(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ (단, $\beta>\alpha$)

< 문항 분석 >
위의 식을 그림으로 해석하면
$f(\alpha)=f'(\alpha)=0,\ f(\gamma)=0$ (단, $\alpha<\gamma$)
→ 함수 $f(x)$의 그래프가 x축 위에 점 $(\alpha,\ 0)$에서 x축에 접하며, 또 다른 점 $(\gamma,\ 0)$에서 x축과 만난다.
이때, 또 다른 극점의 좌표는 $\left(\frac{\alpha+2\gamma}{3},\ f\left(\frac{\alpha+2\gamma}{3}\right)\right)$이다.
$f(\alpha)=f'(\alpha)=0,\ f'(\beta)=0$ (단, $\alpha<\beta$)
→ 함수 $f(x)$의 그래프가 x축 위에 점 $(\alpha,\ 0)$에서 x축에 접하며, 또 다른 점 $(\frac{3\beta-\alpha}{2},\ 0)$에서 x축과 만난다.
삼차함수의 그래프에서 비율에 관한 공식은 교과서에서는 나오지 않지만, 암기해 두는 편이 낫다.