

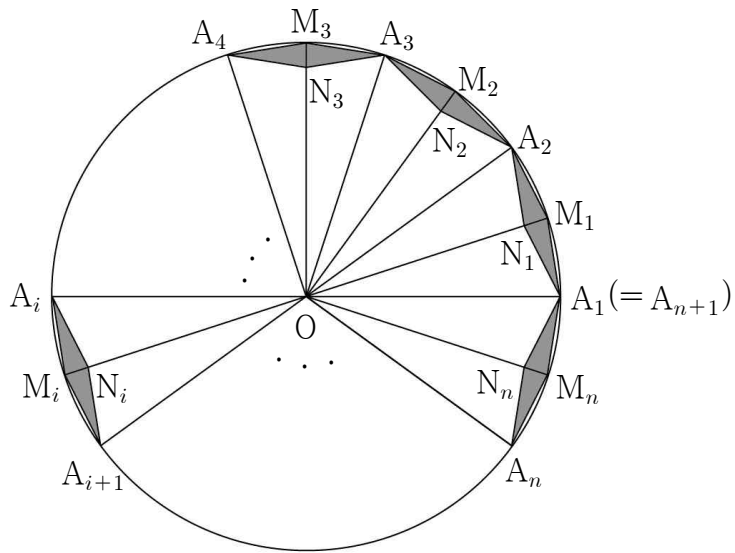
고지우의 **난문현답**

제 5 일

1. 2016년 7월 교육청
2. 2011년 10월 교육청
3. 2016년 수능
4. 2012년 6월 평가원
5. 2010년 9월 평가원
6. 2012년 9월 평가원
7. 2006년 수능
8. 2011년 경찰대
9. 2006년 수능
10. 2006년 10월 교육청

1. 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 $n(n \geq 4)$ 등분한 점을 A_1, A_2, \dots, A_n 이라 하자.

호 $A_i A_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, n$)을 이등분한 점을 M_i 라 하고 사각형 $A_i M_i A_{i+1} N_i$ 가 마름모가 되도록 하는 선분 OM_i 위의 점을 N_i 라 하자. n 개의 사각형 $A_1 M_1 A_2 N_1, A_2 M_2 A_3 N_2, A_3 M_3 A_4 N_3, \dots, A_n M_n A_{n+1} N_n$ 의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \times S_n)$ 의 값은? (단, $A_{n+1} = A_1$)



- ① π^3 ② $2\pi^3$ ③ $3\pi^3$ ④ $4\pi^3$ ⑤ $5\pi^3$

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 15, \quad g(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

에 대하여 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq b$ 일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$ 이다.

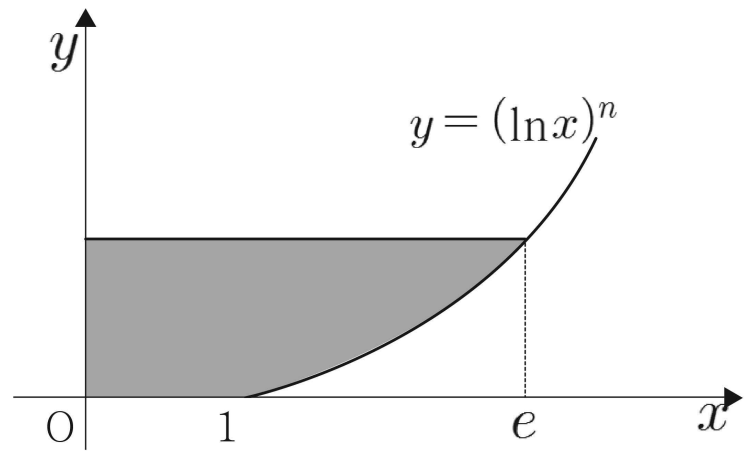
(단, a, b, c 는 상수이다.)

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)} dt$ 이다.

$\int_0^6 f(x) dx = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

4. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = (\ln x)^n (x \geq 1)$ 과 x 축, y 축 및 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n 이라 하자

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



ㄱ. $1 \leq x \leq e$ 일 때, $(\ln x)^n \geq (\ln x)^{n+1}$ 이다.

ㄴ. $S_n < S_{n+1}$

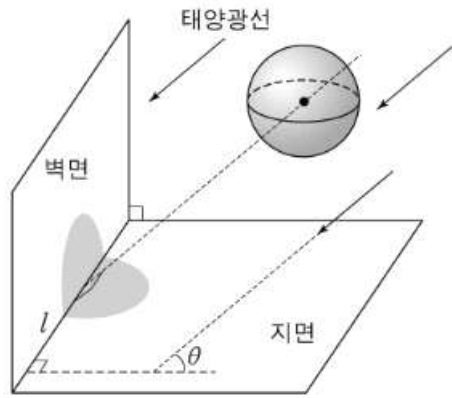
ㄷ. 함수 $f(x) = (\ln x)^n (x \geq 1)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면

$$S_n = \int_0^1 g(x) dx \text{이다.}$$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ 인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양광선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l 과 수직으로 만난다.

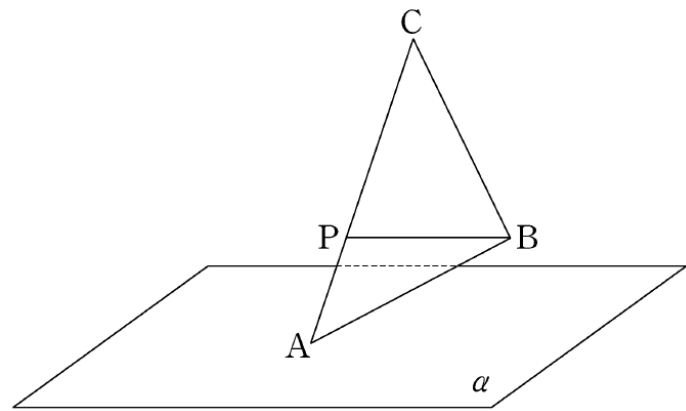
벽면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l 까지 거리의 최댓값을 a 라 하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l 까지 거리의 최댓값을 b 라 하자 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



- ㄱ. 그림자와 교선 l 의 공통부분의 길이는 $2r$ 이다.
 ㄴ. $\theta = 60^\circ$ 이면 $a < b$ 이다.
 ㄷ. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 그림과 같이 평면 α 위에 점 A 가 있고, α 로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C 가 있다. 선분 AC 를 1:2로 내분하는 점 P 에 대하여 $\overline{BP} = 4$ 이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S 라 하자. S^2 의 값을 구하시오.



7. 좌표공간에서 xy 평면, yz 평면, zx 평면은 공간을 8개의 부분으로 나눈다. 이 8개의 부분 중에서

$$\text{구 } (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 24$$

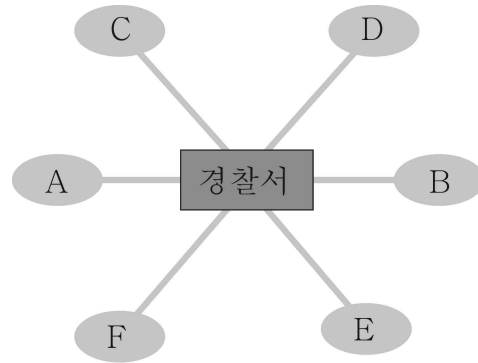
가 지나는 부분의 개수는?

- ① 4 ② 5 ③ 6
 ④ 7 ⑤ 8

8. 아래 그림과 같이 A, B, C, D, E, F의 6개의 구역이 경찰서를 중심으로 하여 길로 연결되어 있다. A와 B의 넓이는 각각 4km^2 이고 C, D, E, F의 넓이는 각각 2km^2 이다.

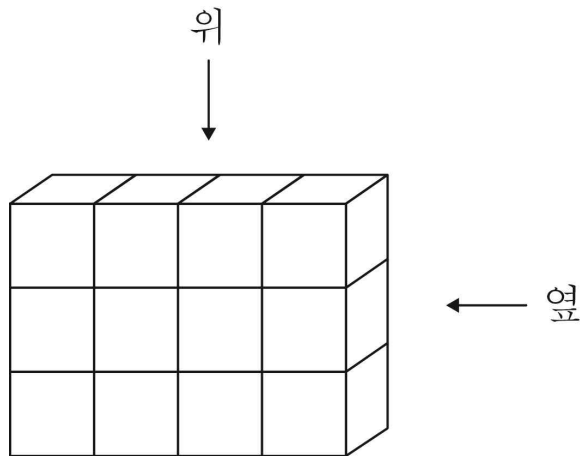
2명의 경찰관이 이 6개의 구역을 넓이의 합이 같아지도록 2부분으로 나누어 1부분씩을 맡고, 각자 맡은 모든 구역을 순서를 정하여 순찰하는 방법의 수는?

(단, 1개의 구역을 나누지는 않는다.)

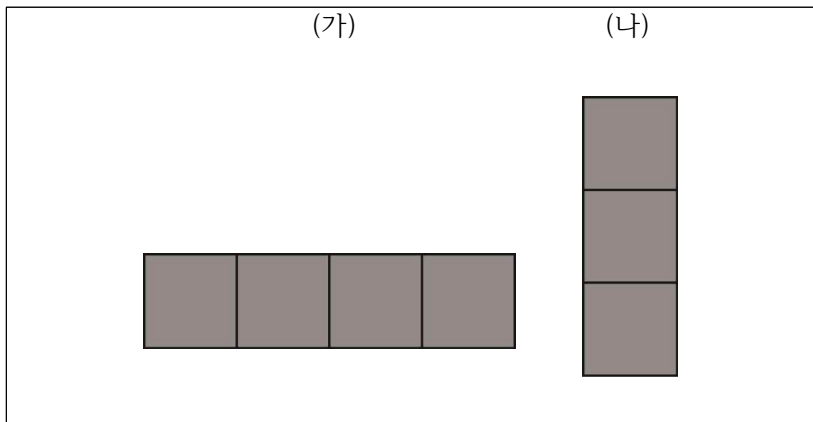


- ① 524 ② 528 ③ 532
 ④ 536 ⑤ 540

9. 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.



이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 (가), 옆에서 본 모양이 (나)와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수는?



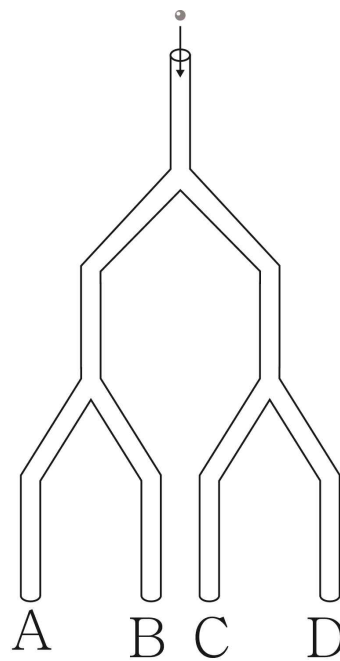
- ① 30 ② 36 ③ 42
- ④ 48 ⑤ 54

10. 아래 그림은 어떤 오락기를 단순화하여 그린 것이다. 이 오락기는 입구에서 공을 넣으면 A,B,C,D 중 어느 한 곳을 지나면서 그 위치의 꺼져 있는 전등은 켜지고, 켜져 있는 전등은 꺼지도록 되어 있다.

예를 들어 전구가 모두 꺼진 상태에서 공을 두 번 넣어 두 번 모두 A를 지나면 A위치의 전등은 켜졌다 꺼지고, 각각 A,B를 지나면 A,B 두 위치에 있는 전등은 모두 켜지게 된다. 이와 같이 공이 지날 때마다 전등이 켜지거나 꺼지기를 반복하다가 A,B,C,D 네 곳 모두 전등이 켜지면 게임은 끝난다. 여섯 번째 공을 넣었을 때 이 게임이 끝나게 될 확률을 $\frac{a}{b}$ 라고 하자.

(a, b 는 서로소인 자연수). 이때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

(단, 처음 상태는 전등이 모두 꺼져 있으며, 갈림길에서 양쪽 방향으로 공이 지나갈 확률은 서로 같다.)



5일차 과제

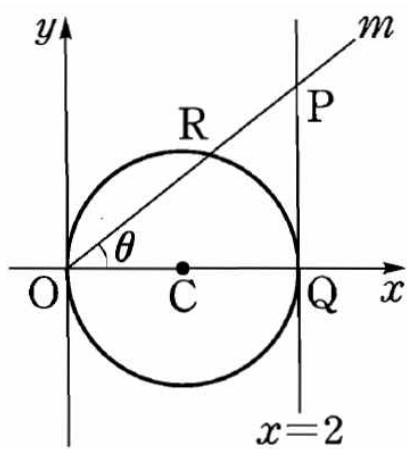
1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\circ \sin \frac{1}{x}$ 의 값은?

- ① 0 ② $\frac{\pi}{180}$ ③ $\frac{1}{\pi}$
- ④ 1 ⑤ $\frac{180}{\pi}$

3. 함수 $f(x) = 4 \cos x - \cos 2x$ ($0 < x < 2\pi$)는 $x = a$ 에서 극솟값 b 를 갖는다. 이때 ab 의 값은?

- ① -5π ② -2π ③ 0
- ④ 2π ⑤ 5π

2. 아래쪽 그림과 같이 중심이 $C(1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 직선 $x=2$ 가 원점 O 를 지나고 기울기가 양수인 직선 m 과 만나는 점을 P , x 축과 만나는 점을 Q 라 하고, 직선 m 이 원과 만나는 원점이 아닌 점을 R 라 하자. 직선 m 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ , 호 RQ 의 길이를 l 이라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{PR}}{l^2}$ 의 값을 구하여라.



4. 곡선 $y = \sqrt{x}$ 위의 점 P 에서의 접선과 x 축 및 두 직선 $x=2$, $x=6$ 으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이의 최솟값을 구하여라.

5일차 과제

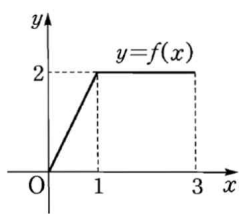
5. 정적분 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ 의 값과 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이가 같을 때, r 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

7. 곡선 $y = \ln(a-x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1일 때, 상수 a 의 값은? (단, $a > 1$)

- ① $\frac{1}{2}e$ ② e ③ $2e$
 ④ e^2 ⑤ $2e^2$

6. $0 \leq x \leq 3$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 정적분 $\int_0^2 e^x f(x+1) dx$ 의 값을 구하면?



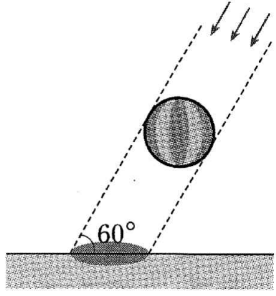
- ① $2e^2 - 2$ ② $2e^2$ ③ $2e^2 + 1$
 ④ $3e^2 - 2$ ⑤ $3e^2 - 1$

8. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$\int_0^1 f(x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1} g(x) dx$ 의 값을 구하여라.

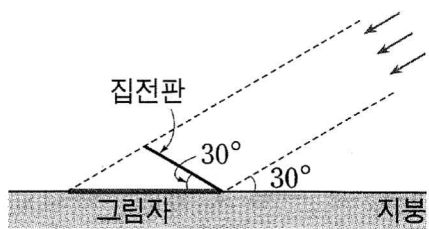
5일차 과제

9. 아래쪽 그림과 같이 구 모양의 애드벌룬이 하늘에 떠 있다. 태양이 지면과 60° 의 각도로 비출 때, 지면 위에 생긴 애드벌룬의 그림자의 넓이는 $8\sqrt{3}\pi m^2$ 이다. 이때 애드벌룬의 반지름의 길이는 몇 m 인지 구하여라.

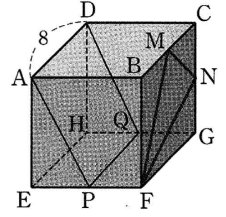


10. 아래쪽 그림은 지붕과 30° 의 각을 이루면서 설치되어 있는 태양열 집전판과 그 그림자를 나타낸 것이다. 지붕이 태양 빛과 이루는 각의 크기가 30° 일 때, 지붕 위에 생긴 집전판의 그림자의 넓이가 21이다. 태양열 집전판의 넓이는?

- ① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $5\sqrt{3}$
- ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $7\sqrt{3}$



11. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 8인 정육면체에서 네 모서리 EF, GH, BC, CG 의 중점을 각각 P, Q, M, N 이라 할 때, $\triangle FNM$ 의 평면 $APQD$ 위로의 정사영의 넓이는?



- ① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{48}{5}$
- ④ $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{48\sqrt{5}}{5}$

12. 점 $P(0, 0, 4)$ 에서 나온 빛에 의하여 xy 평면에 구 $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ 의 그림자가 생긴다. 이 그림자의 넓이를 구하여라.

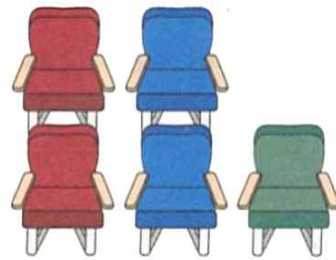
5일차 과제

13. 두 구 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 6 = 0$,
 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 10y - 2z + a = 0$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 a
 의 개수는?

- ① 14 ② 15 ③ 16
 ④ 17 ⑤ 18

14. 구 $x^2 + y^2 + z^2 + kx - 6y + 10z + 18 = 0$ 이 xy 평면과 만나서
 생기는 원의 넓이를 S , yz 평면과 만나서 생기는 원의 넓이를 S'
 이라 하자. $S : S' = 3 : 1$ 일 때, 상수 k 에 대하여 k^2 의 값을 구
 하여라.

15. 아래쪽 그림과 같은 좌석에 다섯 명의 학생이 앉아 발레 공
 연의 일부를 관람했다. 10분간의 휴식 시간 후 2부 공연을 관람
 하기 위해 임의로 좌석에 앉을 때, 한 사람만 1부 공연에 앉은
 열과 같은 열의 좌석에 앉게 되는 방법의 수를 구하여라.



16. 각 자리의 숫자의 합이 4인 자연수를 작은 수부터 순서대
 로 나열했을 때, 가장 작은 다섯 자리 자연수는 몇 번째 수인지
 구하여라.

5일차 과제

17. 지우와 헤리가 각각 정답이 한 개인 오지선다형 문제 5개를 풀었는데 헤리는 1번 문제부터 5번 문제까지의 답을 각각 1, 2, 3, 4, 5로 택했고, 지우는 답을 모두 3으로 택했다. 이때 지우와 헤리 둘 다 3문제씩 맞히는 경우의 수를 구하여라.

18. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

- (가) $A \cap B = \emptyset$
(나) $n(A) = n(B) = 2$
(다) 집합 A 의 원소 중 가장 큰 수는 집합 B 의 원소 중 가장 큰 수보다 크다.

- ① 70 ② 84 ③ 90
④ 96 ⑤ 105

19. 10명의 회원으로 구성된 동아리에서 각 회원이 동아리 모임에 참석할 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다. 구성원의 $\frac{4}{5}$ 이상이 참석할 때 동아리 활동을 진행할 수 있다고 하면 동아리 활동이 진행될 확률이 $\frac{n}{2^7}$ 이다. 이때 자연수 n 의 값을 구하여라.

20. 한 개의 주사위를 60번 던질 때, 6의 약수가 k 번 나올 확률을 $P(k)$ 라 하자. 이때 $\sum_{k=1}^{30} \{P(2k-1) - P(2k)\}$ 의 값을 구하여라.